

Υποδειγματική Άσκηση 1.1

Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

$$f(x) = \frac{x}{x+1}, \quad g(x) = \frac{x^2+1}{x^2-5x+6},$$

$$h(x) = \frac{x-1}{x^2+x+1}, \quad \varphi(x) = (x+1)(|x|-2)^{-1}$$



Απ: $\mathbb{R}-\{-1\}$, $\mathbb{R}-\{2, 3\}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}-\{-2, 2\}$

Υποδειγματική Άσκηση 1.2

Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

$$f(x) = \sqrt{x-1},$$

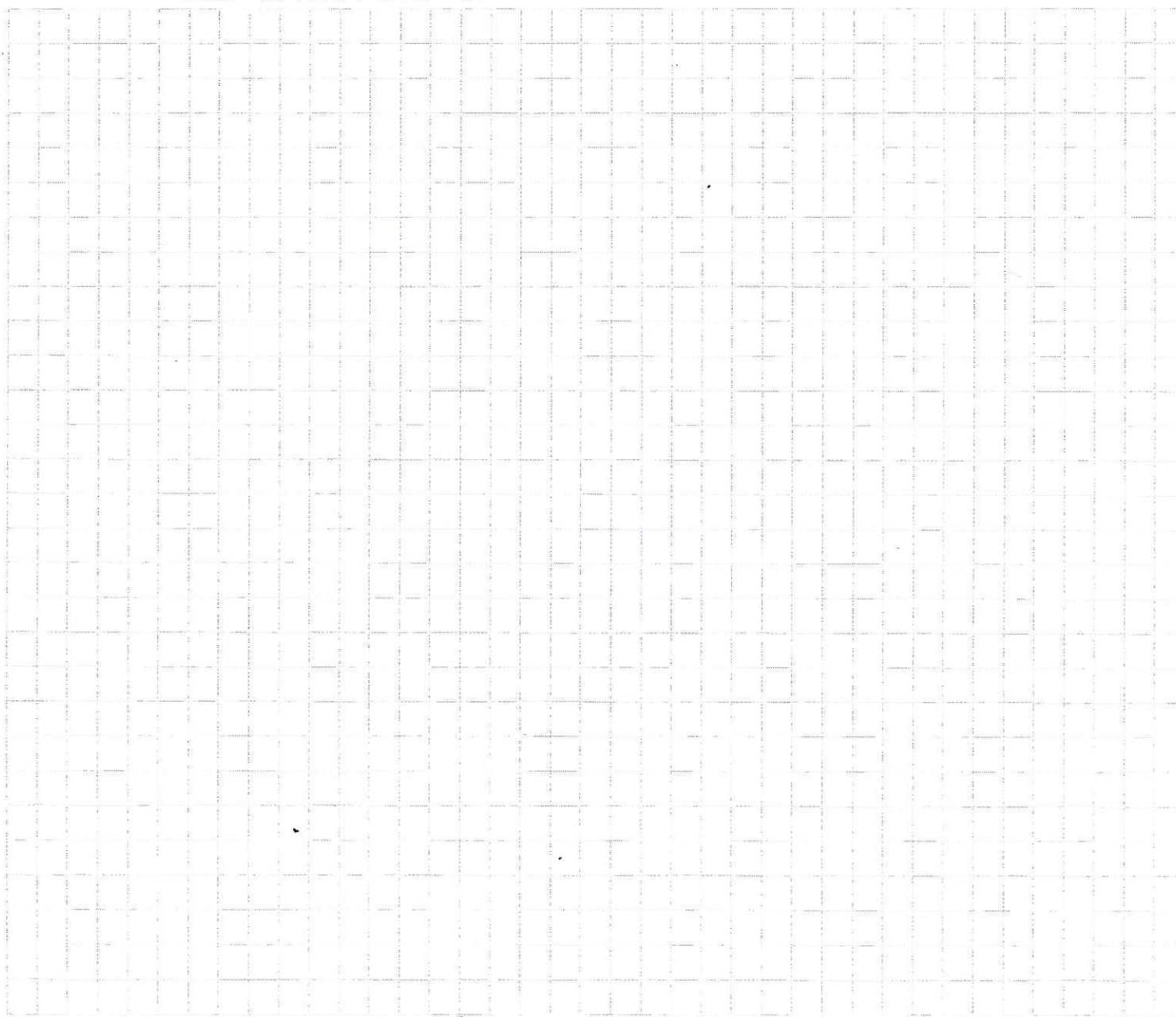
$$g(x) = \sqrt{-2x+2},$$

$$h(x) = \sqrt{x^2-x-2},$$

$$\varphi(x) = (x^2 + 1)^{\frac{1}{2}}$$



Απ: $[1, +\infty)$, $(-\infty, 1]$, $(-\infty, -1] \cup [2, +\infty)$, $\mathbb{R}$



Υποδειγματική Άσκηση 1.3

Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

$$f(x) = \log(x+1),$$

$$g(x) = \ln(-x^2+1),$$

$$h(x) = \ln(e^x - e),$$

$$\varphi(x) = \ln(|x| + x)$$

Απ: $(-1, +\infty)$, $(-1, 1)$, $(-1, +\infty)$, $\mathbb{R}^*$

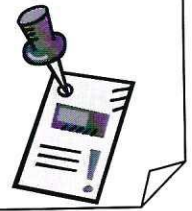


Υποδειγματική Άσκηση 1.4

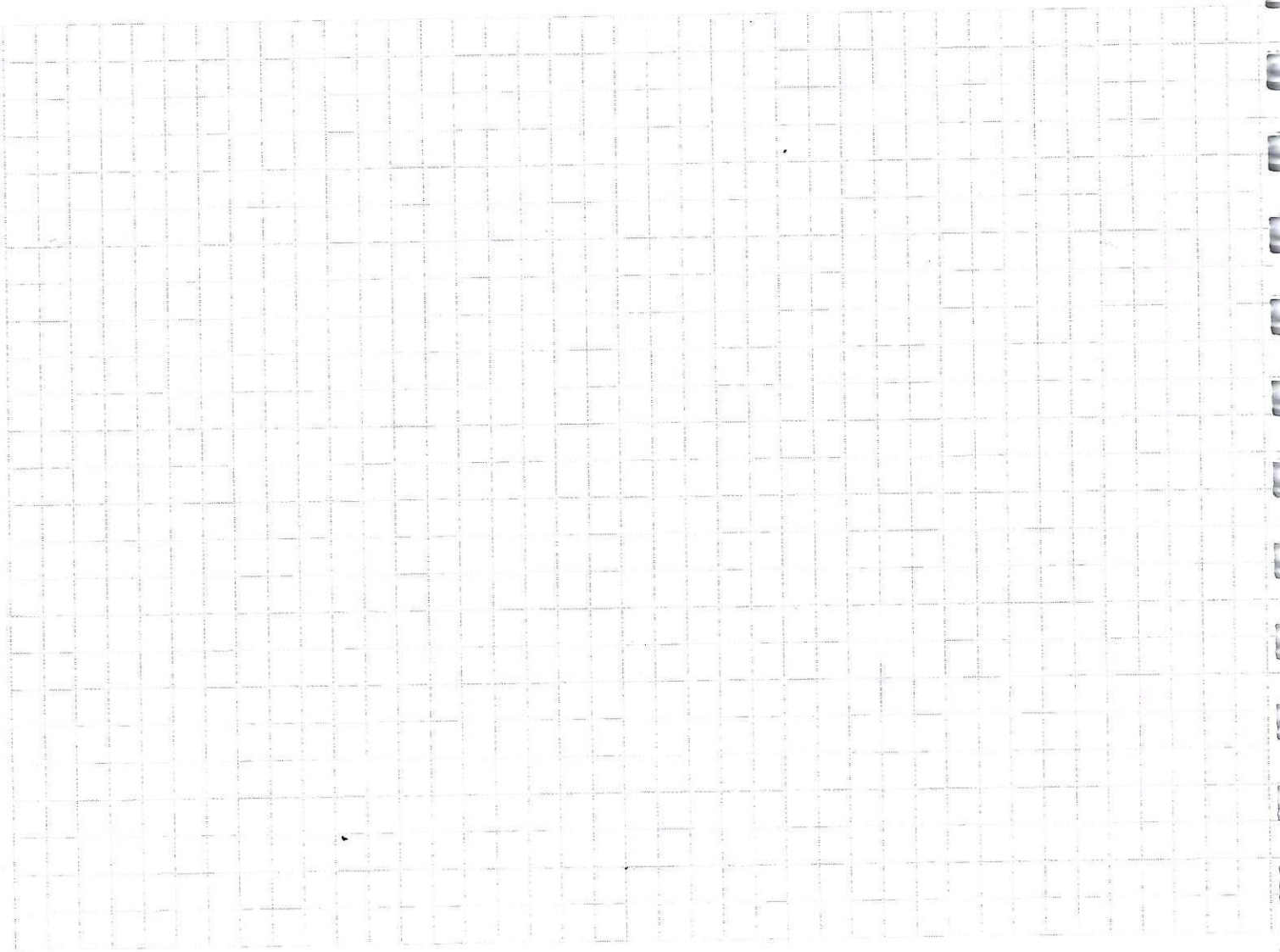
Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}+x}{x-1}, \quad g(x) = \frac{\sqrt{x}-2}{x^2-5x+4},$$

$$h(x) = \frac{x-1}{2-\sqrt{x}}, \quad \varphi(x) = \sqrt{\ln^2 x + 2\ln x - 3}$$



Απ: $[0, 1) \cup (1, +\infty)$, $[0, 1) \cup (1, 4) \cup (4, +\infty)$, $[0, 4) \cup (4, +\infty)$ $(0, e^{-3}] \cup [e, +\infty)$



Υποδειγματική Άσκηση 1.5

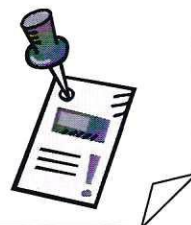
Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 1, & \text{όταν } x \neq 1 \\ 2, & \text{όταν } x = 1 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} \sqrt{x} + 1, & \text{όταν } x > 1 \\ \sqrt{x^2 + 1}, & \text{όταν } x \leq -2 \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} h_1(x), & x < -2 \\ h_2(x), & 0 < x < 3, \\ h_3(x), & x \geq 3 \end{cases}$$

$$\varphi(x) = \begin{cases} \varphi_1(x), & x \in (-\infty, -4) \\ \varphi_2(x), & x \in (-4, 2) \\ \varphi_3(x), & x \in (2, +\infty) \end{cases}$$



Απ: $\mathbb{R}, (-\infty, -2] \cup (1, +\infty), (-\infty, -2) \cup (0, +\infty), (-\infty, -4) \cup (-4, 2) \cup (2, +\infty)$

Υποδειγματική Άσκηση 1.6

Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

$$f(x) = \ln(\sqrt{x^2+1}-x) \quad g(x) = \ln(\sqrt{x^2+1}+x)$$

Απ: $\mathbb{R}, \mathbb{R}$



Υποδειγματική Άσκηση 2.1

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x^2 + x + 3$

- i. Ποιο το πεδίο ορισμού της f
- ii. Να βρείτε τις τιμές των 0, 1, -1 και 2
- iii. Ποια x έχουν τιμή το 5
- iv. Να αποδείξετε ότι $f(1-x) - f(2-x) - 2x + 4 = 0$
- v. Να βρεθούν οι τιμές $f(x+1)$, $f(-x+2)$, $f(2x)$



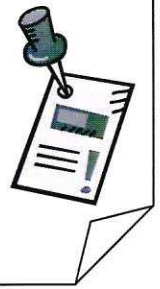
Απ: i. $\mathbb{R}$, ii. 3, 5, 3, 9, iii. -2, 1, v. $x^2 + 3x + 5$, $x^2 - 5x + 9$, $4x^2 + 2x + 3$

Υποδειγματική Άσκηση 2.2

Να βρεθούν οι τιμές $f(1)$, $f(-1)$ και $f(0)$ στις παρακάτω συναρτήσεις.

$$\text{i. } f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases} \quad \text{ii. } f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} + 6, & x > 0 \\ x^3 + 1, & x < 0 \end{cases}$$

$$\text{iii. } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2 + 4}, & x < 1 \\ \ln x, & x > 3 \end{cases} \quad \text{iv. } f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+4}, & x \in [0, +\infty) \\ x+3, & x \in (-\infty, 0) \end{cases}$$



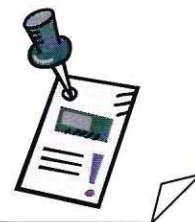
Απ: i. $\mathbb{R}$, 2, 3, 2, ii. 7, 0, δεν υπάρχει, iii. δεν υπάρχει, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{4}$, iv. $\mathbb{R}$, $\sqrt{5}$, 2, 2

Υποδειγματική Άσκηση 2.3

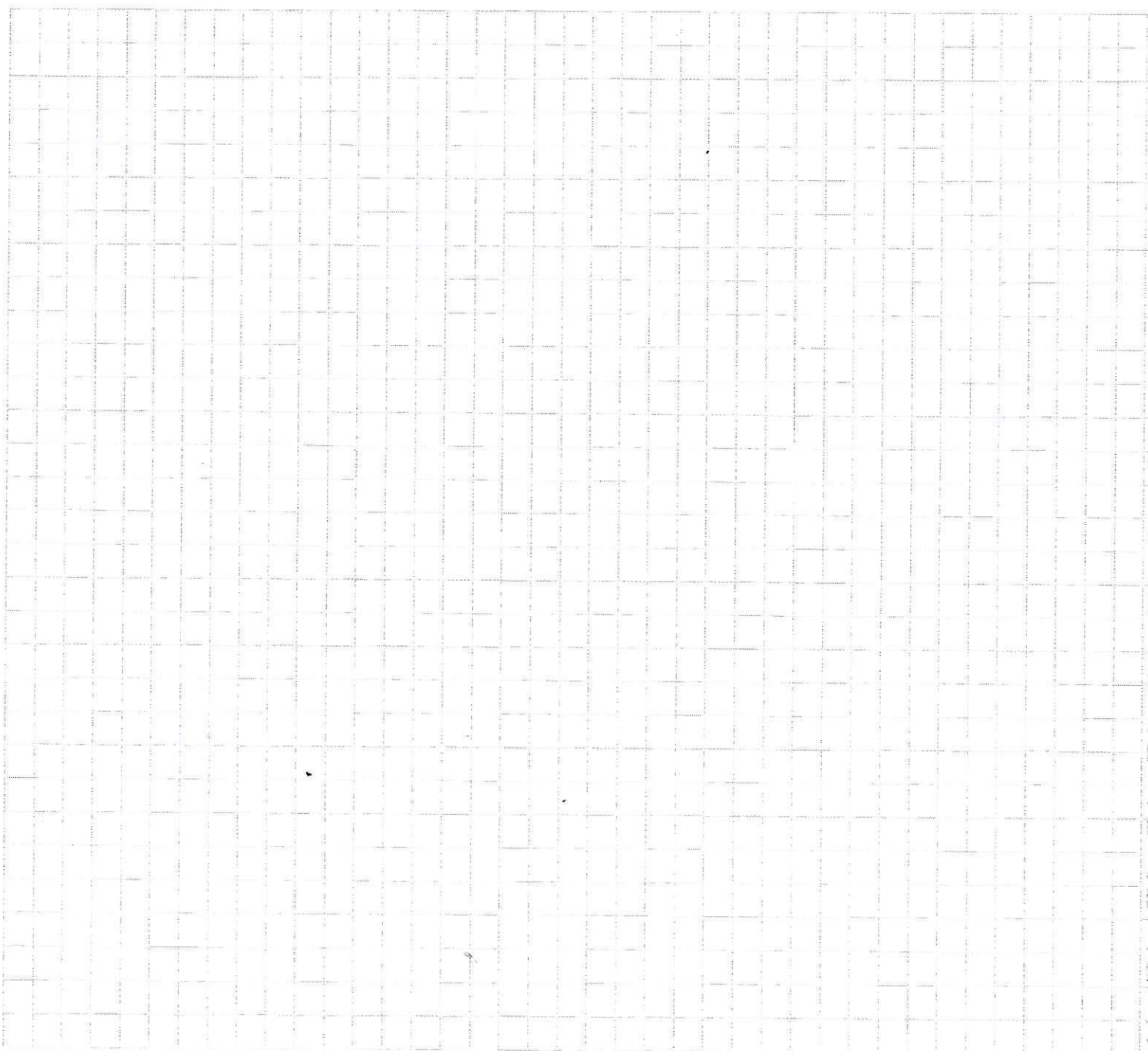
Για τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ γνωρίζουμε ότι:

$$f(x^2-2x) = x^2+x+3 \quad (1)$$

Να υπολογιστεί το $f(-1)$



Απ: 5



Υποδειγματική Άσκηση 2.4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x$. Να βρεθεί ο $x \in \mathbb{R}$,

ώστε $f(x^3) = f(4x)$.



Απ: -2, 0, 2

Υποδειγματική Άσκηση 2.5

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{1-4x^2}$

- i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
- ii. Αν το σημείο $M(x, y)$ ανήκει στην καμπύλη της f , να αποδείξετε ότι η απόστασή του από την αρχή των αξόνων O , είναι $(OM) = \sqrt{1-3x^2}$.



Απ: $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

Υποδειγματική Άσκηση 3.1

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x^3 + (2-\alpha)x^2 - (\alpha+3)x + \alpha^2 - 5$ με $\alpha \in \mathbb{R}$

α. Να βρείτε την τιμή του α έτσι ώστε η C_f , να διέρχεται από το σημείο $M(1, -6)$.

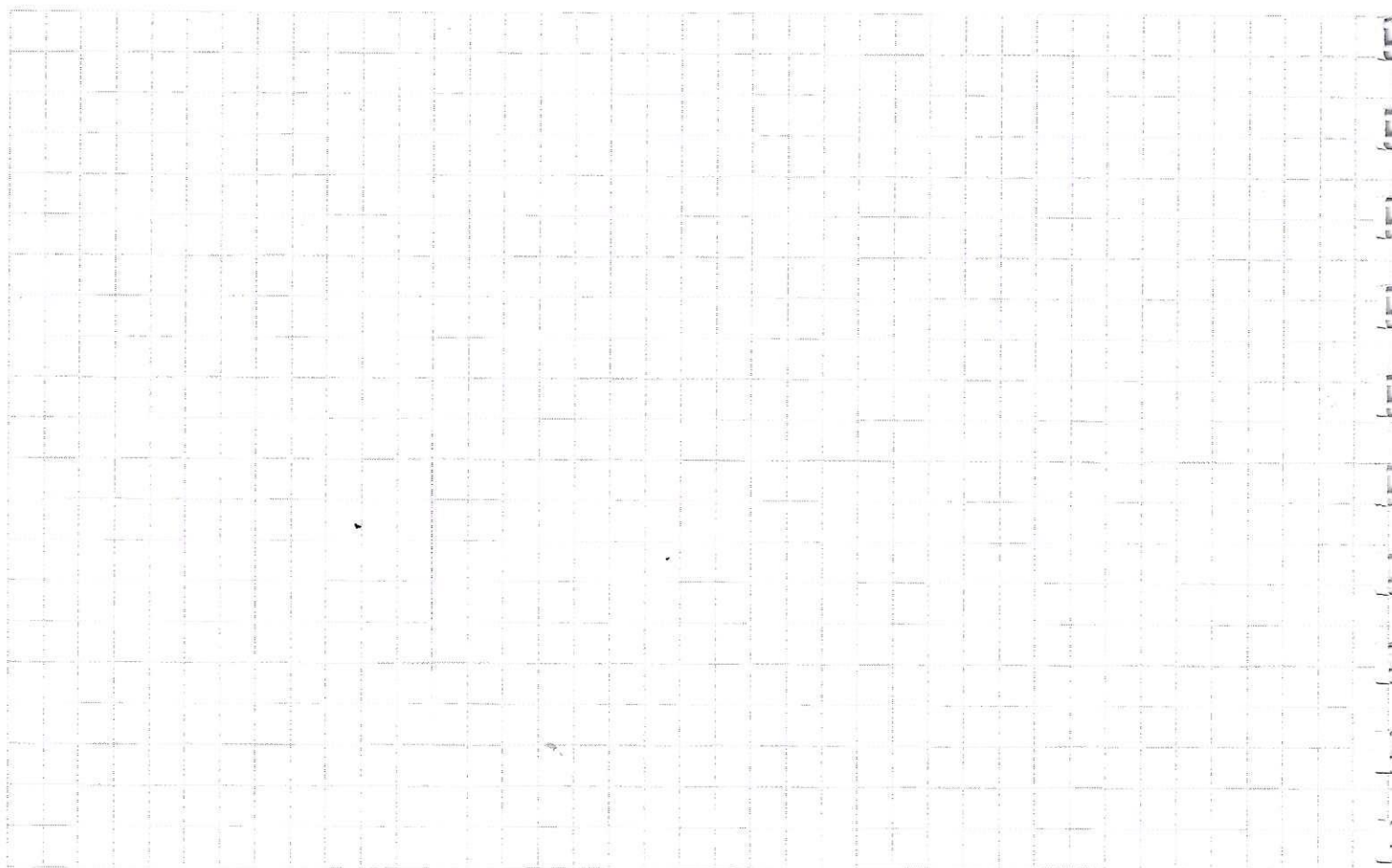
β. Αν $\alpha = 1$:

- i) Να βρεθούν τα κοινά σημεία με τον $x'x$.
- ii) Να βρεθεί η σχετική θέση της C_f με τον $x'x$.
- iii) Να βρεθούν τα σημεία τομής με τη C_g όπου $g(x) = -4x - 4$ και τα διαστήματα που η C_f βρίσκεται πάνω (κάτω) από την C_g



Απ: i. $\alpha = 1$, ii. $A(2, 0)$, $B(-1, 0)$, $\Gamma(-2, 0)$, iii. πάνω $x'x$: $(-2, -1) \cup (2, +\infty)$, κάτω $x'x$: $(-\infty, -2) \cup (-1, 2)$,

iv. $A'(0, -4)$, $B(-1, 0)$, $x \in (-1, 0) \cup (0, +\infty)$



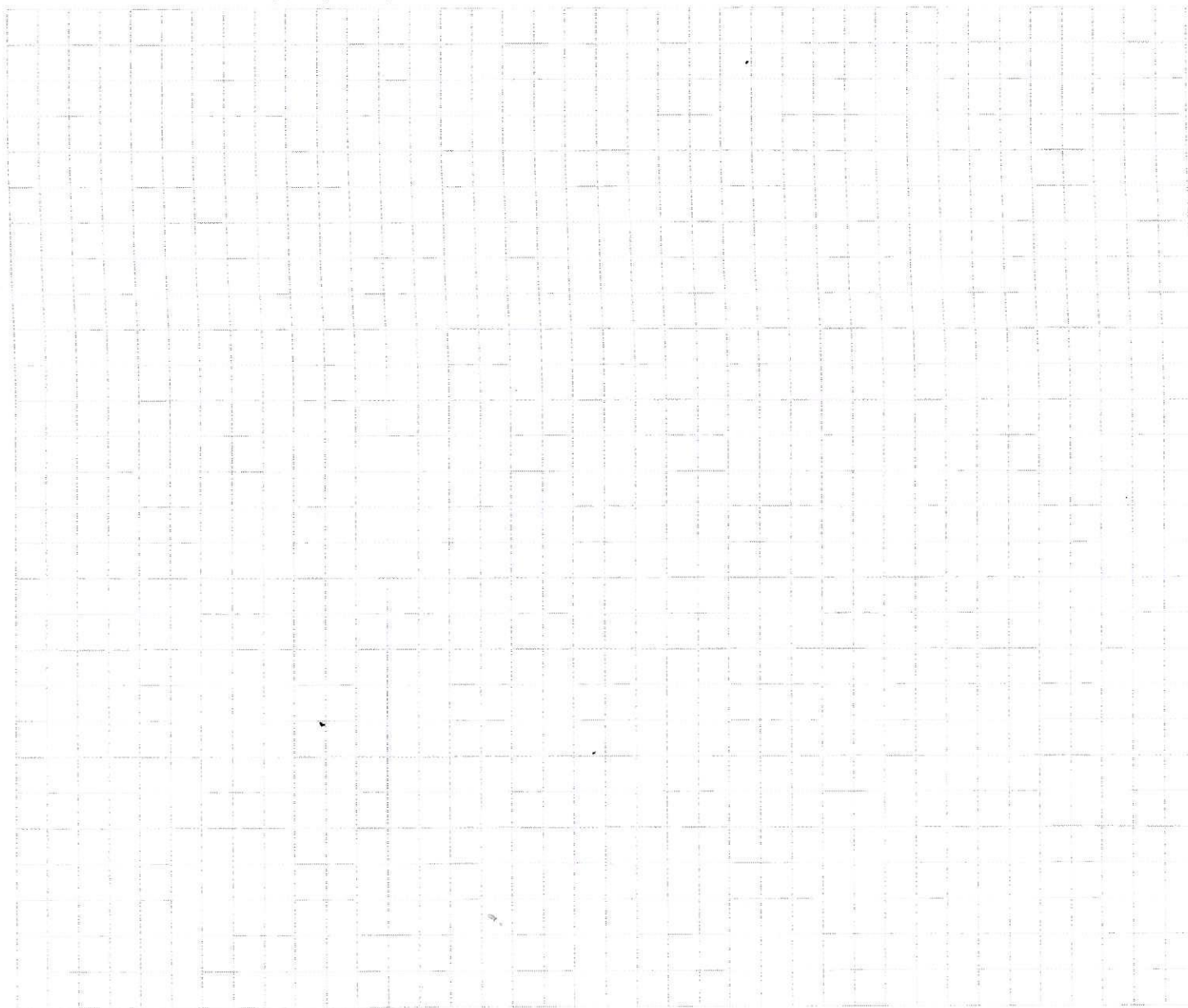
Υποδειγματική Άσκηση 3.2

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{1}{x^2+4}$ και $g(x) = x - \frac{4}{5}$.

- i. Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών τους παραστάσεων.
- ii. Να βρείτε τα διαστήματα, στα οποία η γραφική παράσταση της g είναι πάνω από τη γραφική παράσταση της f .



Απ: i. $A(1, 1/5)$, ii. $x \in (1, +\infty)$



Υποδειγματική Άσκηση 3.3

Έστω συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

$$f^2(x) - f(x) - 1 = x(x - 1), \text{ για κάθε } x \in A.$$

Να δείξετε ότι η C_f δεν τέμνει τον άξονα $x'x$.



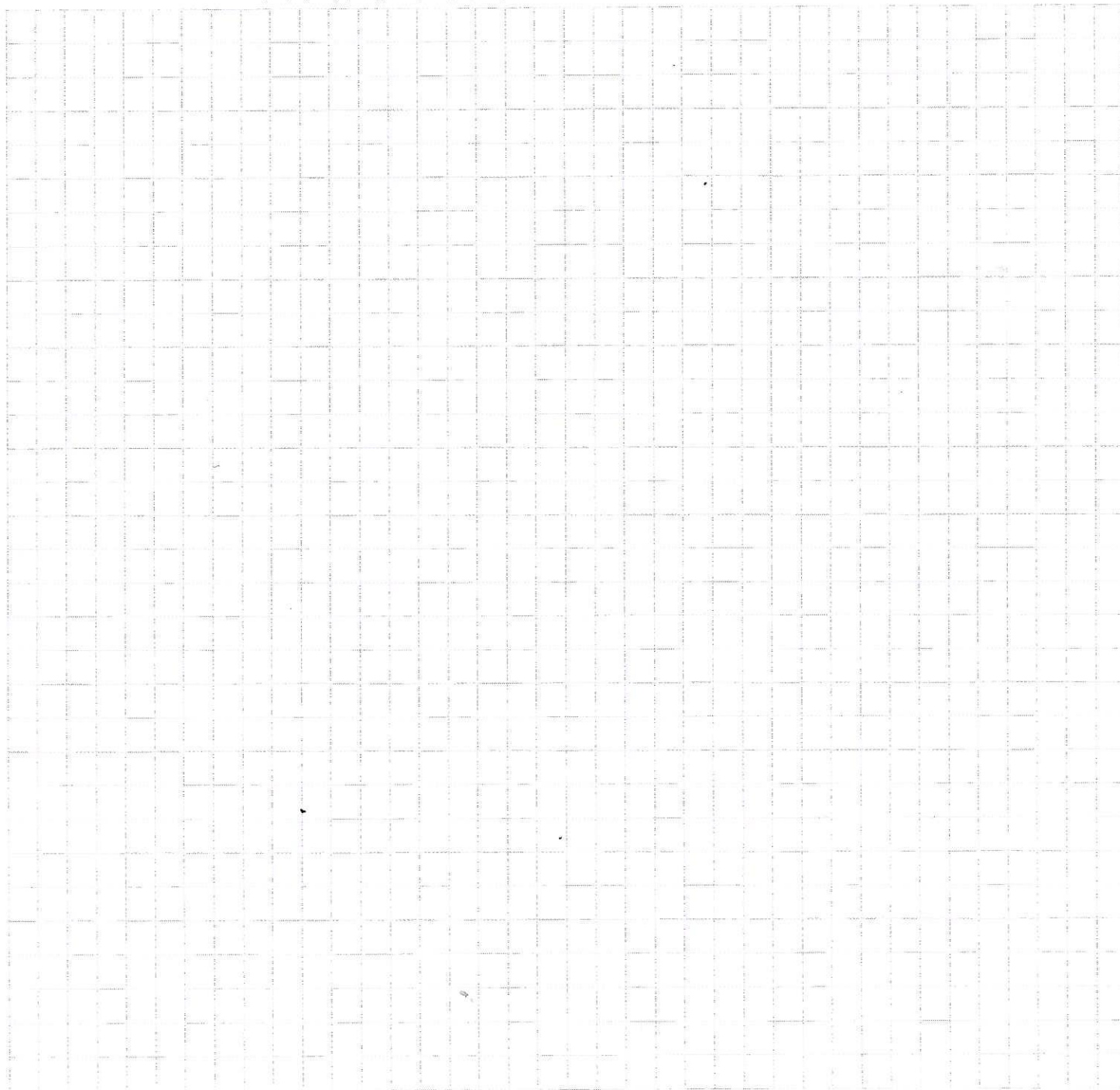
Υποδειγματική Άσκηση 4.1

Να βρεθεί το σύνολο τιμών των συναρτήσεων

i. $f(x) = \frac{x-2}{x-3}$ ii. $f(x) = \ln(x-2)$

ii. iii. $f(x) = x^2 - 4x + 3$

Απ: i. $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$, ii. $\mathbb{R}$, iii. $[-1, +\infty)$



Υποδειγματική Άσκηση 4.2

Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^3 + 2x^2 - x + 2$.

- i. Να βρείτε τις τιμές $f(0)$ και $f(2)$
- ii. Να αποδειχθεί ότι το $y=4$ ανήκει στο σύνολο τιμών της f .

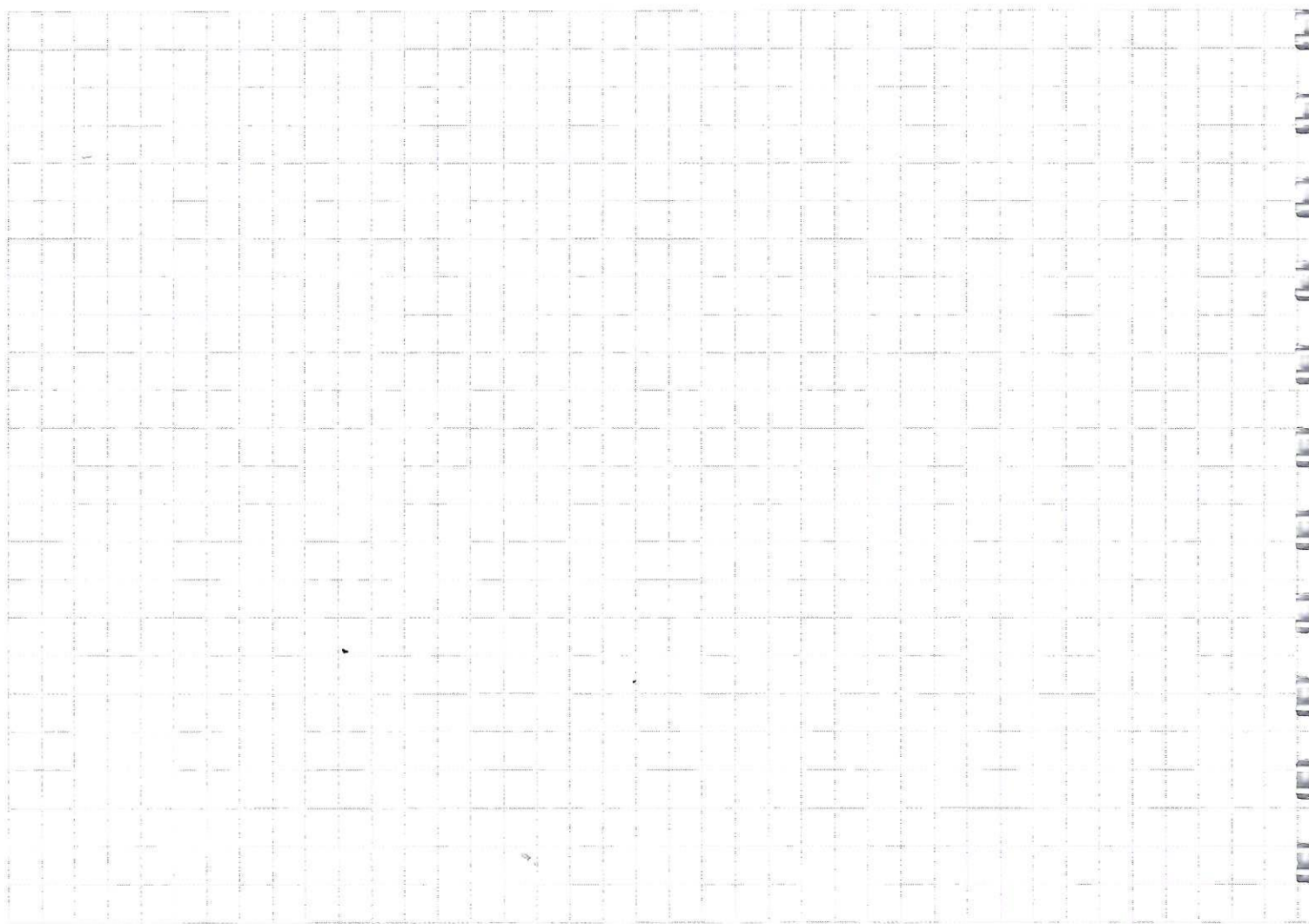


Απ: i. 2, 16

Υποδειγματική Άσκηση 4.3

Δίνεται συνάρτηση $f(x) = 2 + \sqrt{x-1}$

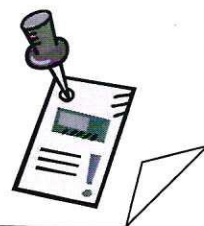
- i. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .
- ii. Να αποδείξετε ότι, για κάθε $\alpha > 0$, οι παρακάτω εξισώσεις έχουν τουλάχιστον μια λύση:
α) $2 + \sqrt{x-1} = \alpha + \frac{1}{\alpha}$ β) $2 + \sqrt{x-1} = \frac{4}{1+\eta\mu^2\alpha}$
- iii. Να βρείτε τη μέγιστη τιμή της παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε να ισχύει: $3\lambda \leq 3 + \sqrt{x-1}$, για κάθε $x \geq 1$.



Υποδειγματική Άσκηση 4.4

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{x-2}{x+1}$ και $g(x) = \begin{cases} e^x - 1, & x=1 \\ \ln x - 1, & x>1 \end{cases}$

- i. Να σχεδιαστούν C_f, C_g
- ii. Να βρεθεί το πλήθος των ριζών των εξισώσεων
 $f(x) = 0, f(x) = e$
 $g(x) = 0, g(x) = 4$
- iii. Να βρεθεί το πλήθος των ριζών των εξισώσεων
 $f(x) = \alpha, g(x) = \alpha$ για τις διάφορες τιμές του α .

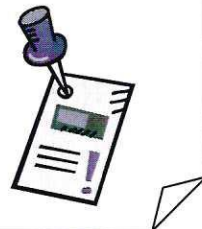


Υποδειγματική Άσκηση 5.1

Να εξετάσετε σε ποιες από τις παρακάτω περιπτώσεις ισχύει $f = g$.

i. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+3} + \sqrt{3}}, g(x) = \sqrt{x+3} - \sqrt{3}$

ii. $f(x) = \frac{x^2 + 3|x|}{x^2 - 9}, g(x) = \frac{|x|}{|x| - 3}$



Απ: i. $f \neq g$, ii. $f = g$

Υποδειγματική Άσκηση 5.2

Να εξετάσετε σε ποιες από τις παρακάτω περιπτώσεις ισχύει $f = g$. (Να βρεθεί το ευρύτερο σύνολο που είναι ίσες)

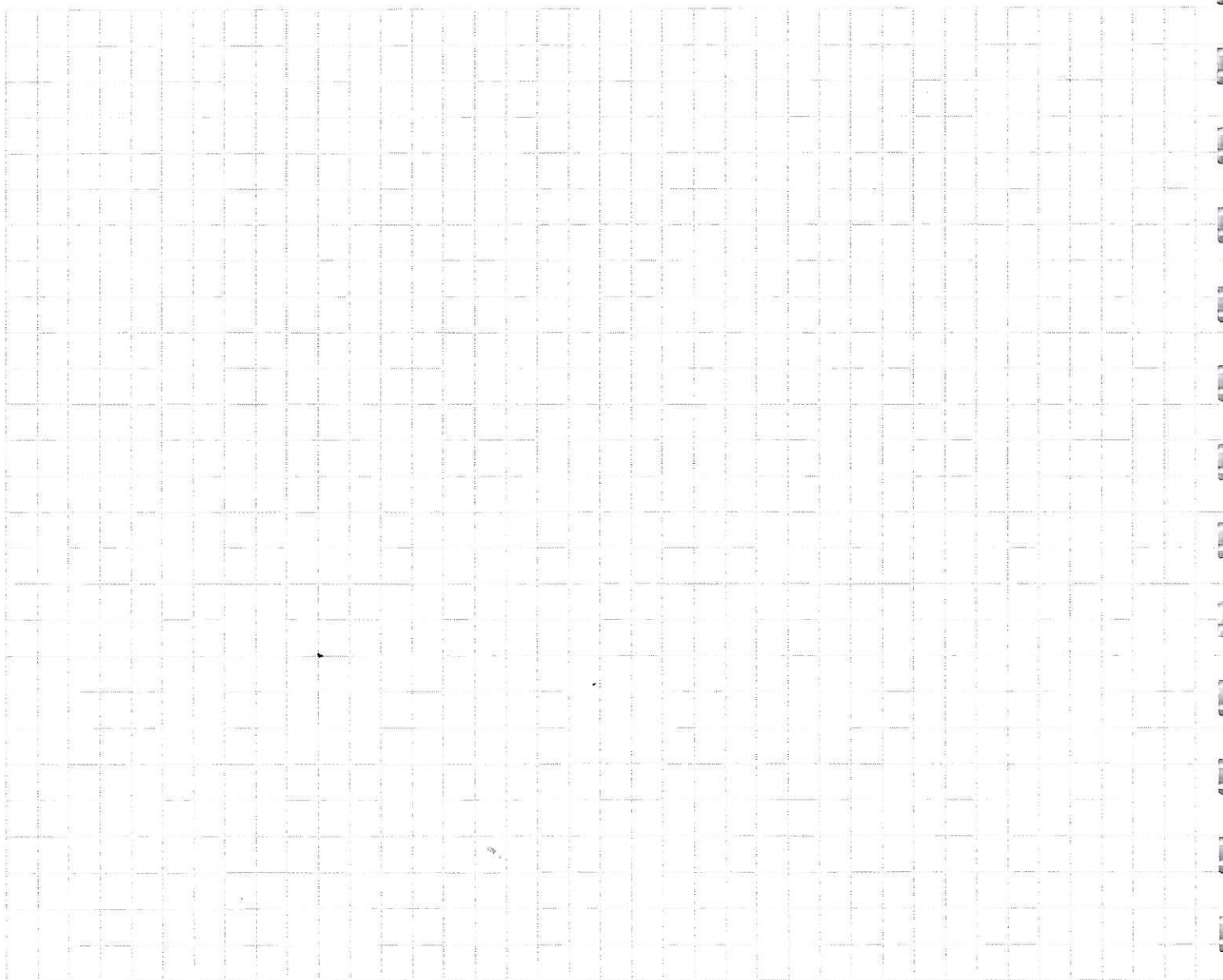
i. $f(x) = \ln x^6$, $g(x) = 6 \ln x$

ii. $f(x) = \sqrt{\frac{x-3}{x}}$, $g(x) = \frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x}}$

iii. $f(x) = x+2$, $g(x) = \sqrt{x^2+4x+4}$



Απ: i. $f \neq g$, $(0, +\infty)$, ii. $f \neq g$, $[3, +\infty)$, iii. $f \neq g$, $[-2, +\infty)$



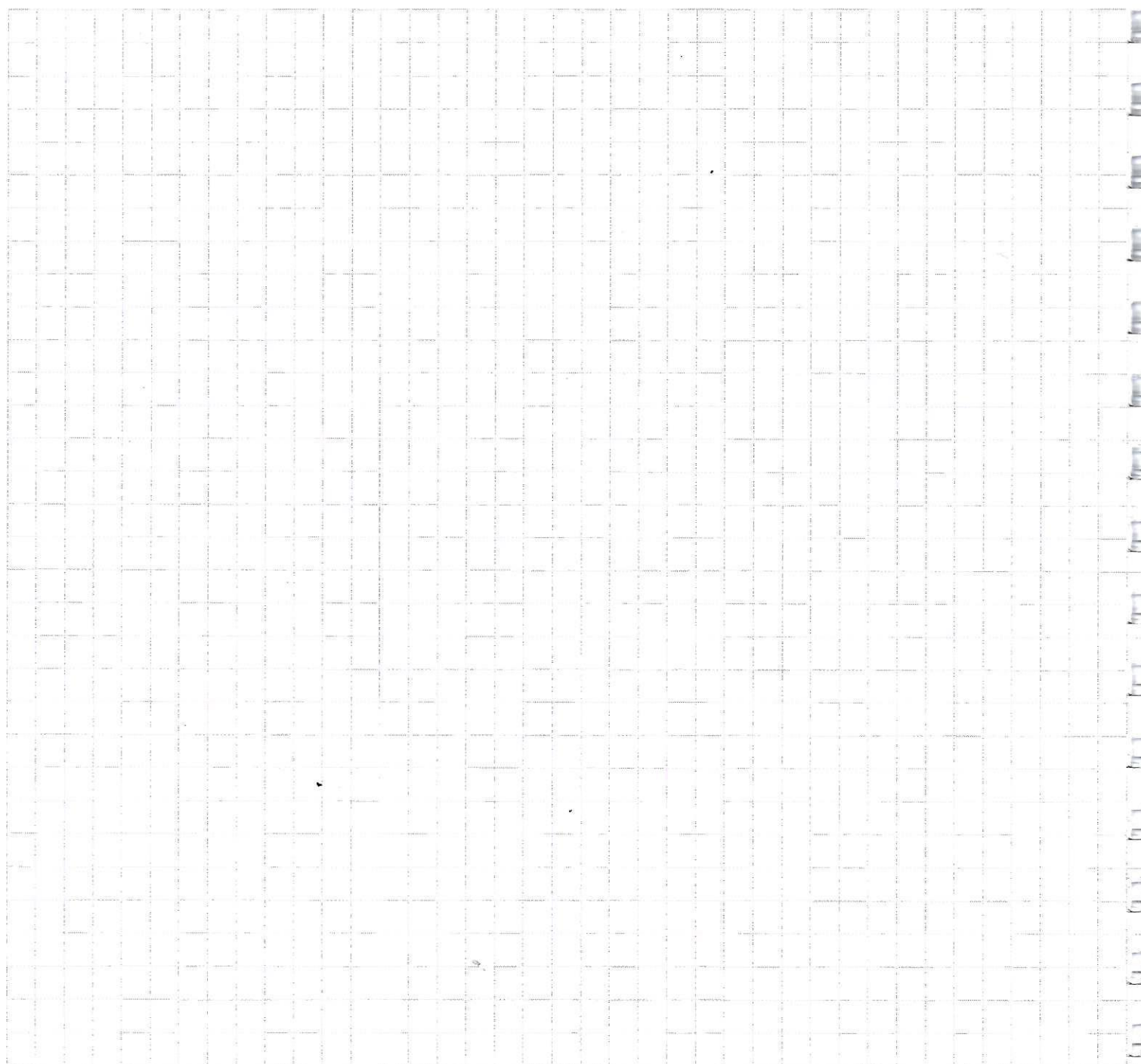
Υποδειγματική Άσκηση 5.3

Να προσδιορίσετε τους $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε οι συναρτήσεις

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2-3x} \text{ και } g(x) = \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x-3} \text{ να είναι ίσες.}$$



$$\text{Απ: } \alpha = -\frac{1}{3}, \beta = \frac{4}{3}$$



Υποδειγματική Άσκηση 5.4

Έστω $f(x) = \frac{\lambda x^2 - 3x + 2}{x - \lambda}$ και $g(x) = \frac{x^2 - \mu x + 2}{x - \lambda^2}$.

Να βρεθούν οι τιμές των $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

ώστε οι συναρτήσεις f, g να είναι ίσες.

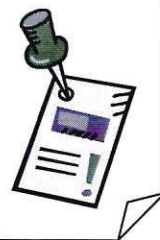


Απ: $\lambda = 1, \mu = 3$

Υποδειγματική Άσκηση 6.1

Έστω $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$ και $g(x) = \ln x$.

Να βρεθούν οι συναρτήσεις $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ αν ορίζονται.



Απ: $D_{f+g} = D_{f-g} = D_{f \cdot g} = (0, 2) \cup (2, +\infty)$

$D_{\frac{f}{g}} = (0, 1) \cup (1, 2) \cup (2, +\infty)$

Υποδειγματική Άσκηση 6.2

$$\text{Έστω } f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x, & x > 1 \\ x - 2, & x < -2 \end{cases} \text{ και } g(x) = \begin{cases} -x^2 + 9x - 22, & x > 1 \\ -6x + 5, & x < -3 \end{cases}$$

- i. Να βρεθούν D_f, D_g
- ii. Να βρεθούν οι τιμές $f(2), g(2), f(-4)$
- iii. Να βρεθούν οι συναρτήσεις $f+g, f-g$ και οι τιμές $(f+g)(2), (f-g)(2)$
- iv. Να λυθεί η εξίσωση $(f+g)(x)=0$



Απ: i. $(-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$

$(-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$

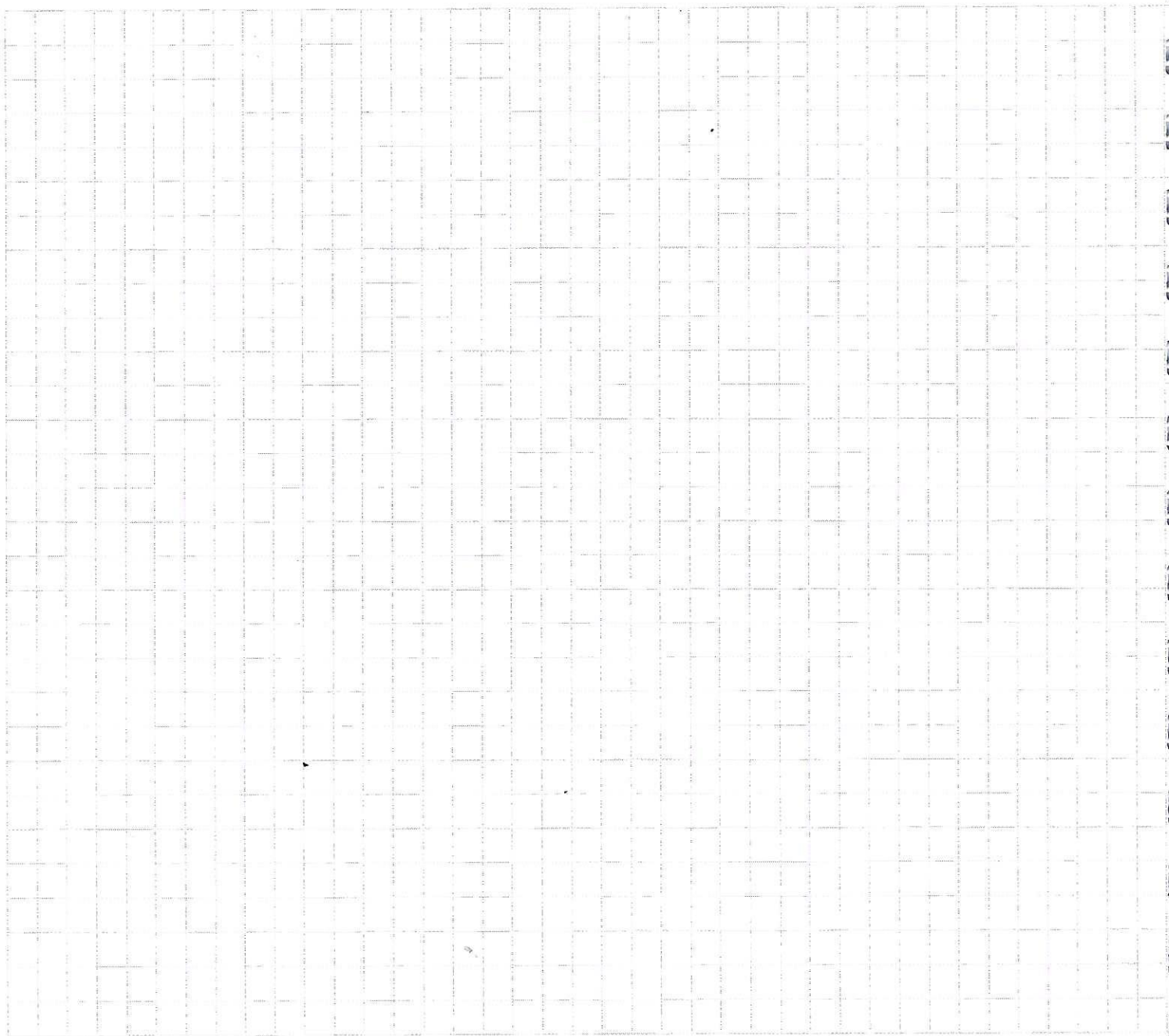
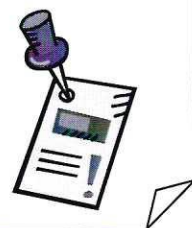
ii. 8, -8, -6 iii. 0, 16 iv. 2

Υποδειγματική Άσκηση 6.3

Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα :

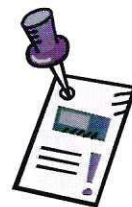
$$(f^2 + g^2)(x) \leq 2(f + g)(x) - 2 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδειχθεί ότι $f = g$



Υποδειγματική Άσκηση 7.1

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{1}{x}$ και $g(x) = \frac{x}{x-2}$.



Να βρεθούν (αν ορίζονται) οι συναρτήσεις: $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$, $g \circ g$.

Απ: $D_{f \circ g} = (-\infty, 0) \cup (0, 2) \cup (2, +\infty)$, $\frac{x-2}{x}$, $D_{g \circ f} = (-\infty, 0) \cup (0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, +\infty)$,

$\frac{1}{1-2x}$, $D_{f \circ f} = \mathbb{R}^* \setminus x$, $D_{g \circ g} = (-\infty, 2) \cup (2, 4) \cup (4, +\infty)$, $\frac{x}{-x+4}$

Υποδειγματική Άσκηση 7.2

Έστω $f(x) = \sqrt{1-x}$ και $g(x) = \frac{1}{x+2}$.

Να βρεθούν οι fog , gof , εφόσον ορίζονται



Απ: $D_{\text{fog}} = (-\infty, -2) \cup (-1, +\infty)$, $\sqrt{\frac{x+1}{x+2}}$, $D_{\text{gof}} = (-\infty, 1]$, $\frac{1}{\sqrt{x-1}+2}$

Υποδειγματική Άσκηση 7.3

Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = \begin{cases} x-2, & \text{αν } x \leq 1 \\ x+2, & \text{αν } x > 1 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 1-x, & \text{αν } x > 0 \\ 1+x, & \text{αν } x \leq 0 \end{cases}$$

Να ορίσετε τη $f \circ g$, $g \circ f$



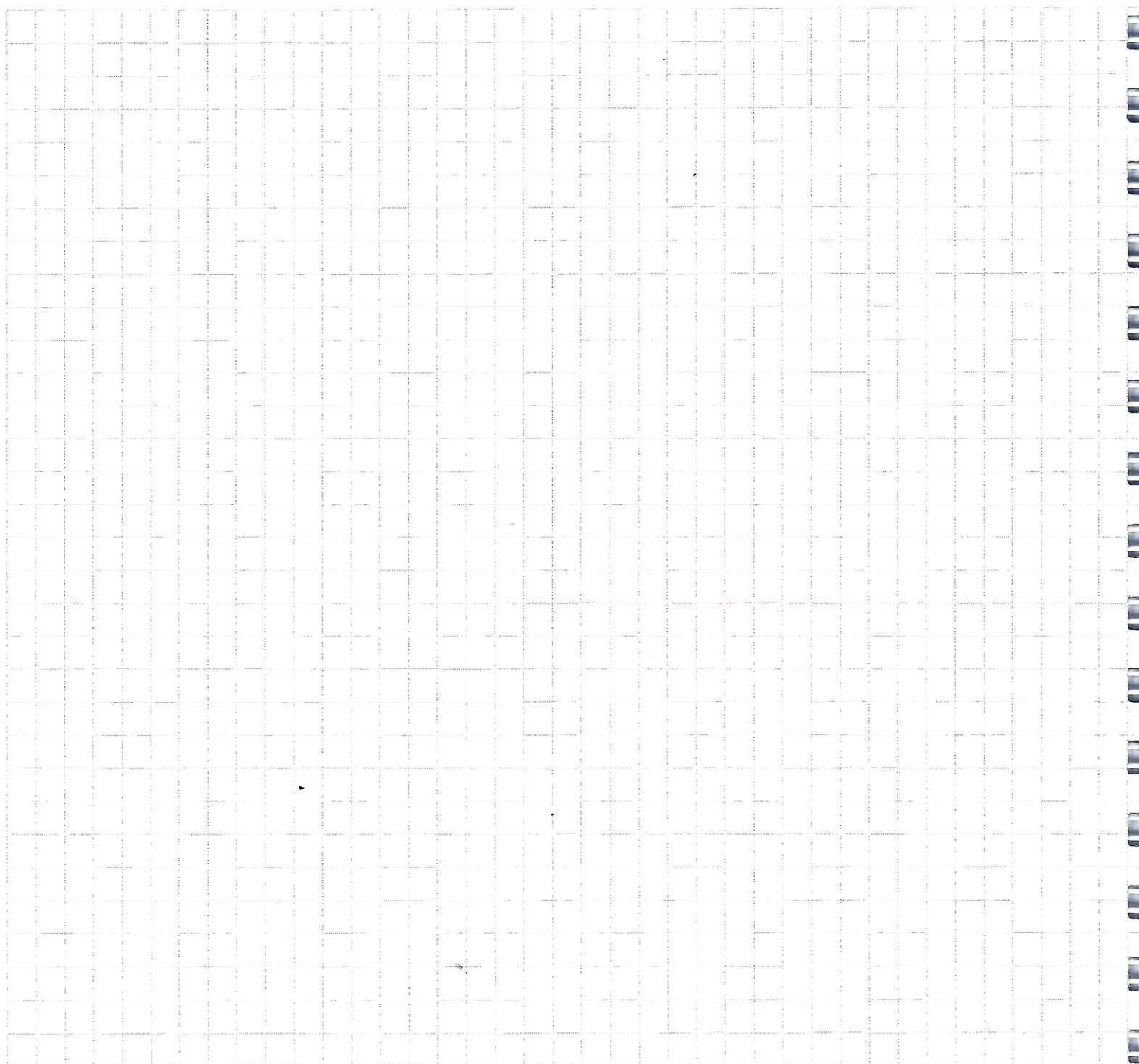
Υποδειγματική Άσκηση 7.4

Έστω συνάρτηση $f: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$. Να βρεθεί το πεδίο

ορισμού της συνάρτησης $h(x) = f(\ln x + 2)$



Απ: $\left[\frac{1}{e}, +\infty \right)$



Υποδειγματική Άσκηση 7.5 (Αποσύνθεση)

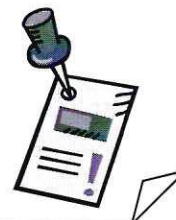
Να εκφράσετε τη συνάρτηση f ως σύνθεση δυο ή περισσότερων συναρτήσεων αν:

i. $f(x) = \eta\mu(x^3 + 1),$

ii. $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu^2 4x + 3.$

iii. $f(x) = \ln(e^{4x} - 1),$

iv. $f(x) = \eta\mu^2(5x)$



Υποδειγματική Άσκηση 7.6 (Αποσύνθεση)

Έστω $(f \circ g)(x) = x^2 - 4x + 3$, $x \in \mathbb{R}$ και $g(x) = x + 2$.

Να βρεθεί η f .

Απ: $f(x) = x^2 - 8x + 15$, $x \in \mathbb{R}$



Υποδειγματική Άσκηση 7.7 (Αποσύνθεση)

Έστω $(f \circ g)(x) = |x|$ και $f(x) = \sqrt{1-x^2}$.

Να βρεθεί η $g(x)$

Απ: $|g(x)| = |x|$



8^η Κατηγορία

Πως βρίσκω τη συνάρτηση f -

Συναρτησιακές σχέσεις

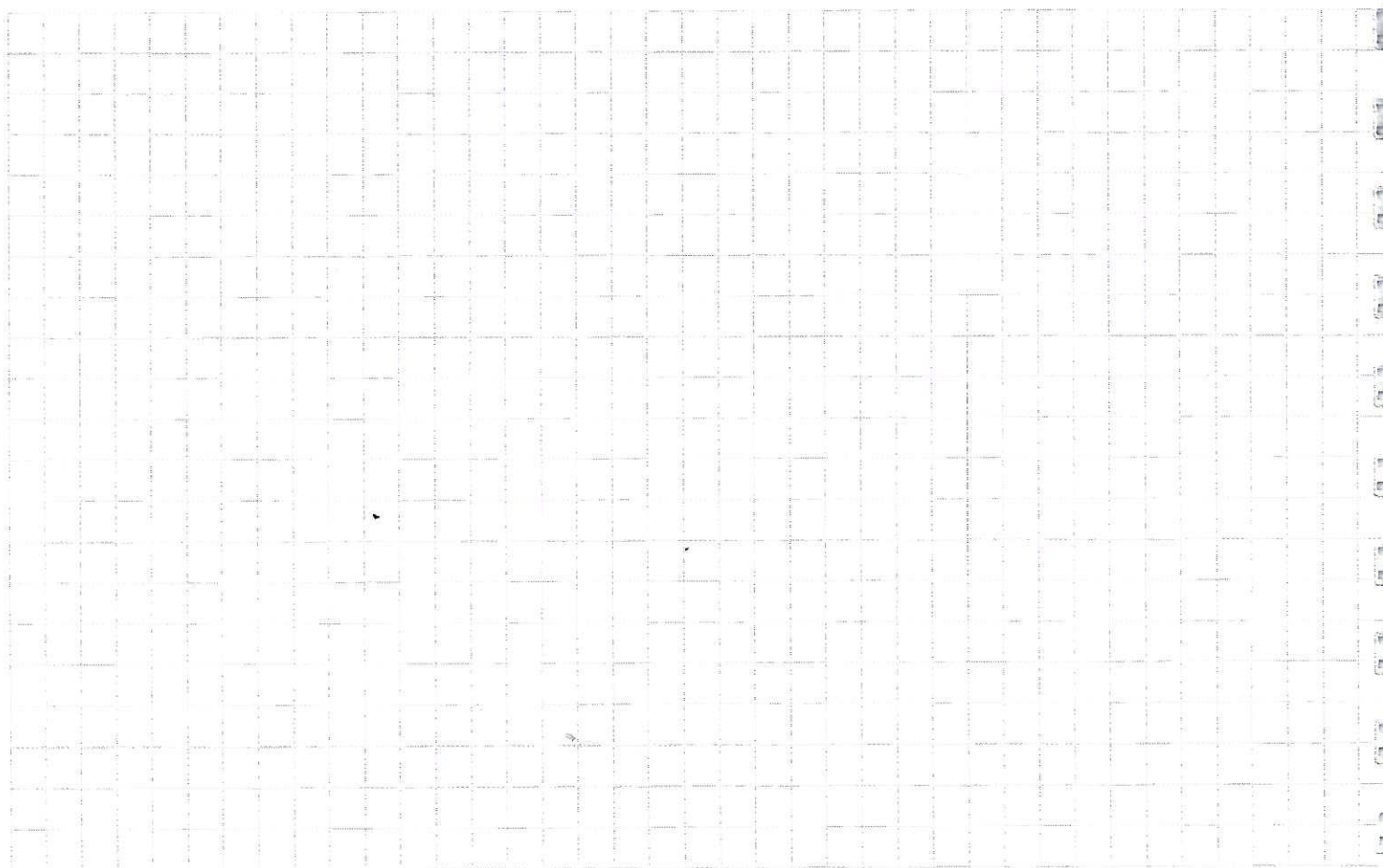
Υποδειγματική Άσκηση 8.1

Αν $f\left(\frac{1}{x}\right) = x^3 + \ln x + e^{\frac{1}{x}} + 2$, για κάθε $x > 0$,

να βρεθεί η συνάρτηση f.



Απ: $f(x) = \frac{1}{x^3} - \ln x + e^x + 2, x > 0$



Υποδειγματική Άσκηση 8.2

Αν για την συνάρτηση f ισχύει $f(x) + 2f(1 - x) = x^2 + x$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης f .



Απ: $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{7}{3}x + \frac{4}{3}, x \in \mathbb{R}$

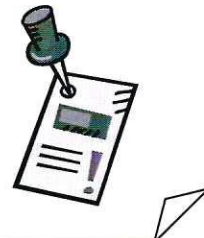
Όταν βρίσκω την $f(x)$
κάνω επαλήθευση στη
σχέση

Υποδειγματική Άσκηση 8.3

Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $f(x) > x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $f^2(x) = 1 + 2xf(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f .



Υποδειγματική Άσκηση 9.1

Να εξετάσετε τις παρακάτω συναρτήσεις ως προς τη συμμετρία τους

i. $f(x) = x^3 - 3x$

iii. $f(x) = \ln \frac{2+x}{2-x}$

ii. $f(x) = \sin x - 4$

iv. $f(x) = \frac{|x|}{x^2 + 6}$



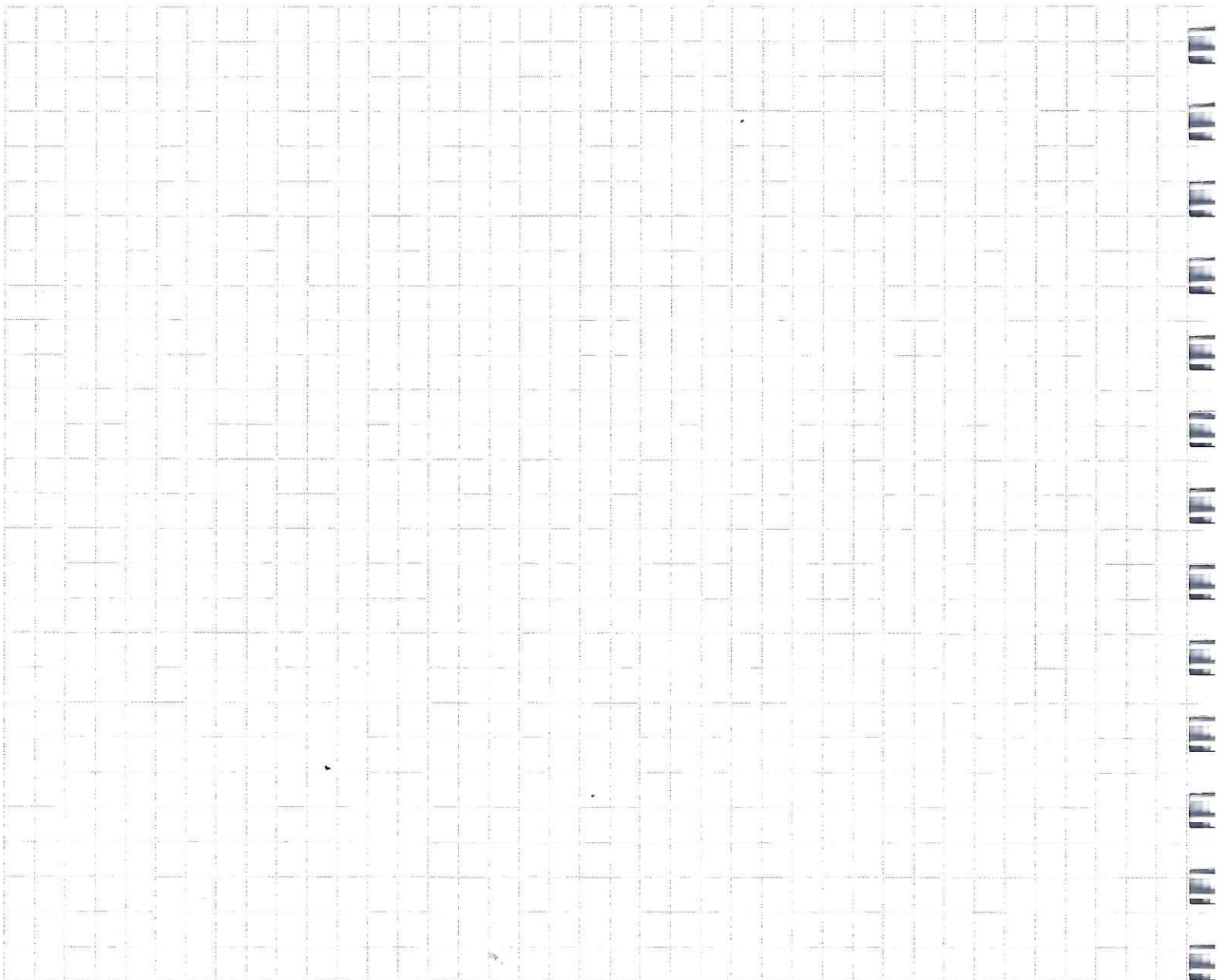
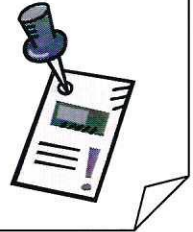
Απ: περιτή, άρτια, περιτή, άρτια

Υποδειγματική Άσκηση 9.2

Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ να ισχύει

$f(x+y)=f(x)+f(y)$. Να δείξετε ότι :

- i. $f(0)=0$
- ii. η f είναι περιττή



Υποδειγματική Άσκηση 9.3

Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ να ισχύει

$f(x+y) - f(x-y) = f(x) f(y)$. Να δείξετε ότι :

- i. $f(0) = 0$
- ii. η f είναι άρτια

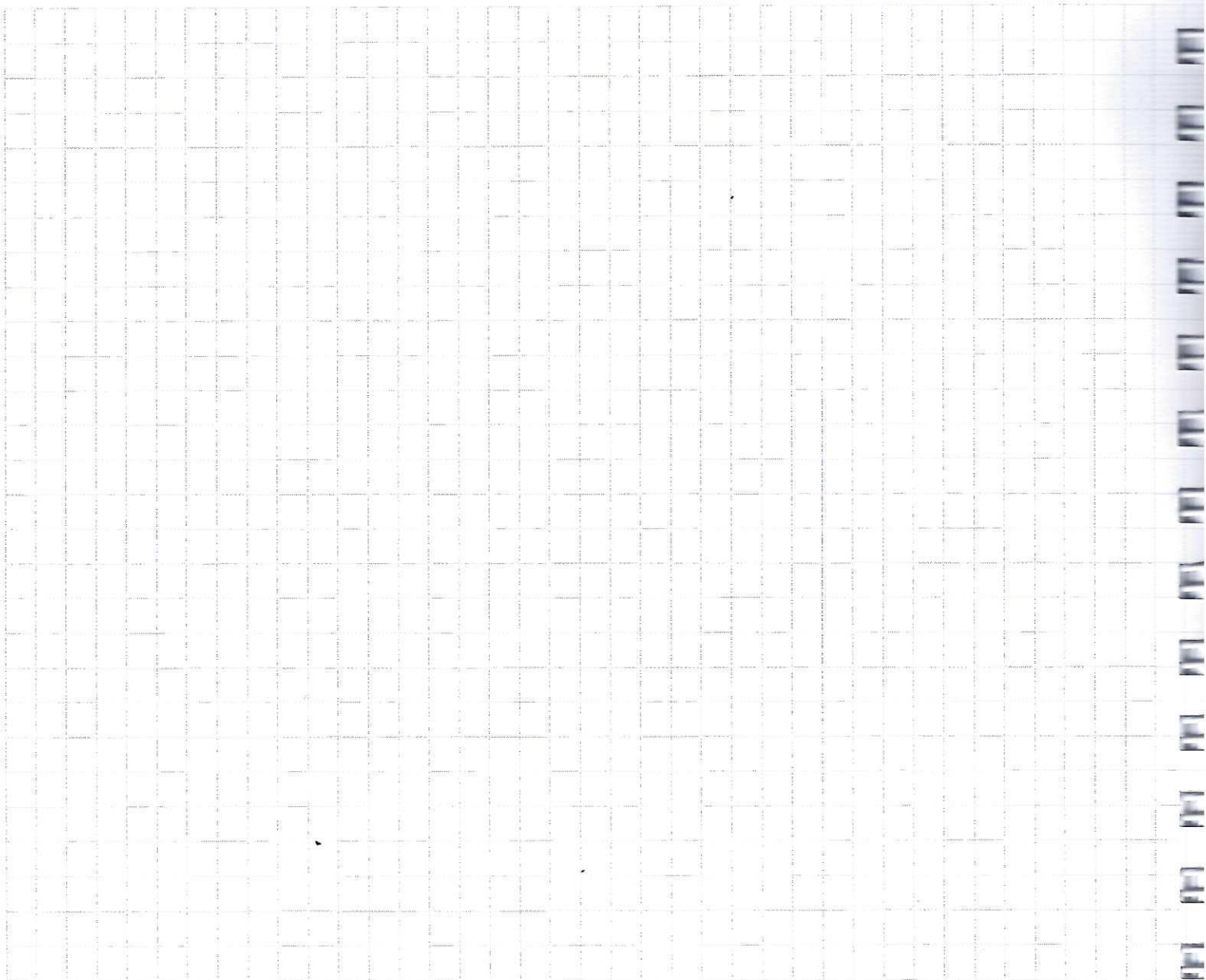
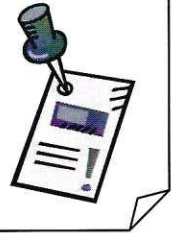


Υποδειγματική Άσκηση 9.4

Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$x \cdot f(x) + xf(-x) + 2x + 2f(-x) = 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι περιττή.

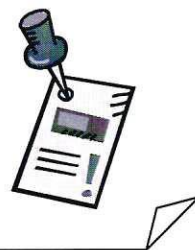


Υποδειγματική Άσκηση 9.5

Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία

$$\text{ισχύει } \frac{1-f(x)}{1+f(x)} = e^{-x}, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι η f είναι περιττή



Υποδειγματική Άσκηση 10.1

Να μελετήσετε τις παρακάτω συναρτήσεις ως προς τη μονοτονία τους

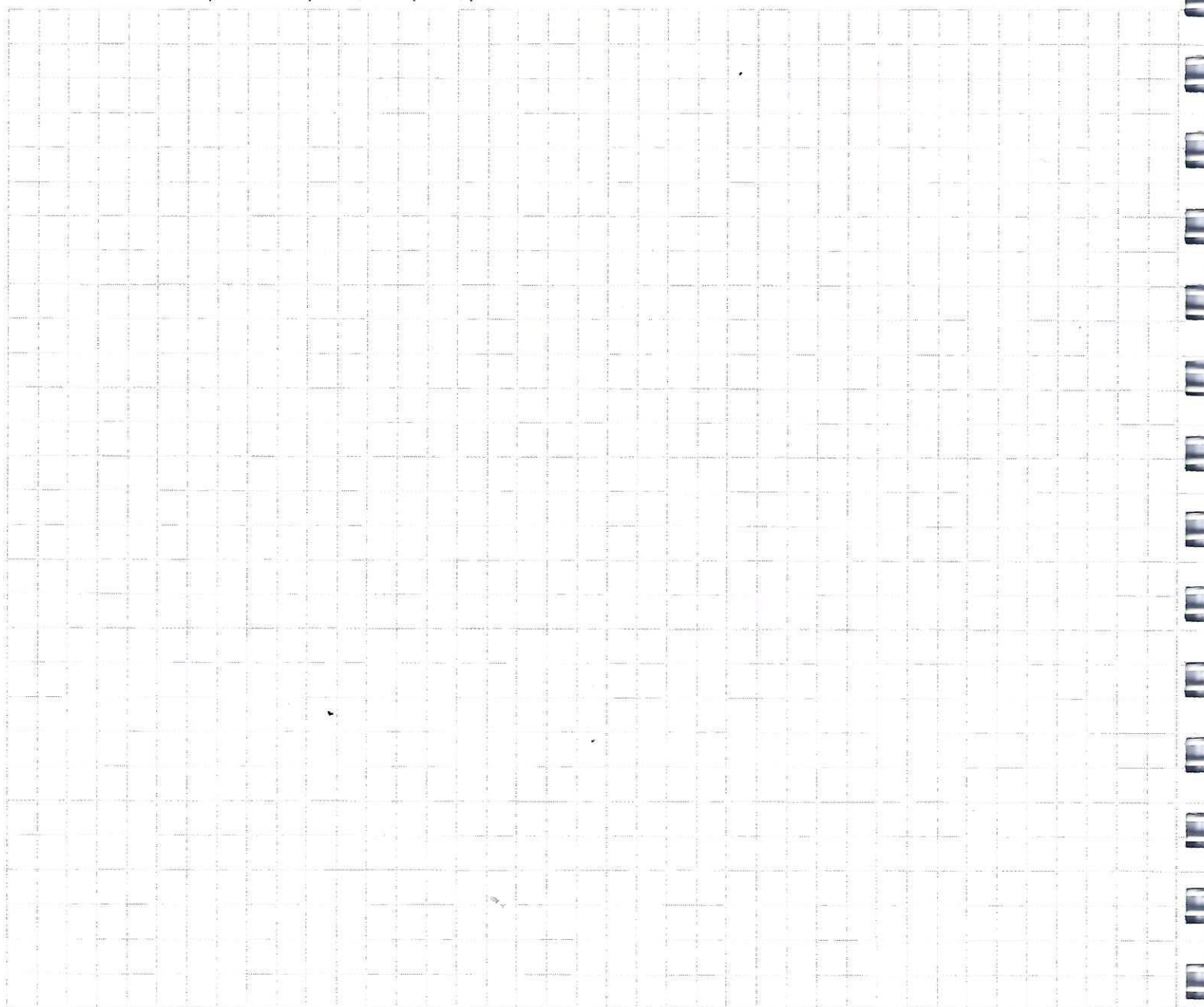
i. $f(x) = 5x+1$, ii. $f(x) = -2x+3$, iii. $f(x) = 3\ln x+2$,

ii. iv. $f(x) = -\ln x+4$, v. $f(x) = e^x+1$,

iii. vi. $f(x) = e^{x-1}+2$, vii. $f(x) = \sqrt{x+1}$

Απ: i. f γν. αυξ., ii. f γν. φθ, iii. f γν αυξ για $x > 0$, iv. f γν φθιν για $x > 0$

v. f γν. αυξ, vi. f γν. αυξ, vii. f γν αυξ για $x \geq -1$



Υποδειγματική Άσκηση 10.2

Να μελετήσετε τις παρακάτω συναρτήσεις ως προς τη μονοτονία τους

i. $f(x) = e^x + 2x - 1$, ii. $f(x) = x^3 + 3x + 2$,

iii. $f(x) = -\ln x - 2x + 1$, iv. $f(x) = \frac{1}{x-2}$,

v. $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0 \\ x+4, & x > 0 \end{cases}$, vi. $f(x) = \frac{x+2}{x+1}$



Απ: i. f γν. αυξ., ii. f γν. αυξ. iii. f γν. φθιν για $x > 0$, iv. f γν. φθιν για $x < 2$ και f γν. αυξ. για $x > 2$

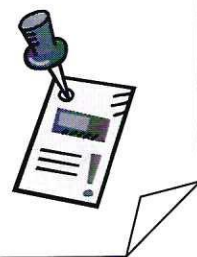
v. f γν. φθιν για $x \leq 0$ και f γν. αυξ. για $x > 0$

Υποδειγματική Άσκηση 10.3

Έστω $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δυο γνησίως μονότονες συναρτήσεις. Να αποδειχθεί ότι:

i. Αν οι f, g έχουν το ίδιο είδος μονοτονίας, τότε η $g \circ f$ είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση.

ii. Αν οι f, g δεν έχουν το ίδιο είδος μονοτονίας, τότε η $g \circ f$ είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση.

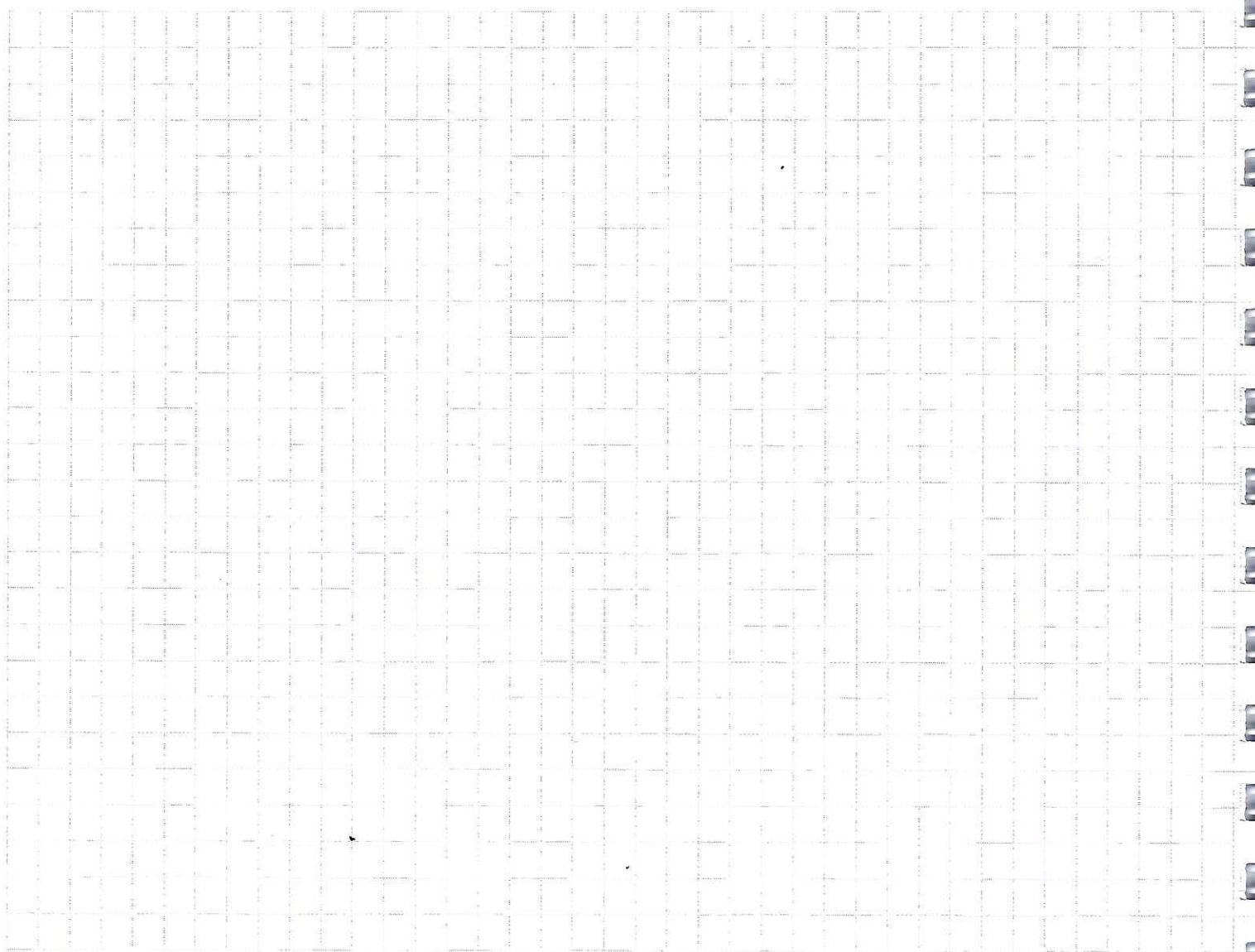


Υποδειγματική Άσκηση 10.4

Αν για τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει

$$2f^3(x) + 2e^{f(x)} = 3x - 2, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ τότε να αποδείξετε}$$

ότι η f είναι γν. αύξουσα (με δύο τρόπους)



Υποδειγματική Άσκηση 10.5

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε: $f^3(x) + f(x) = -x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

- i. Να αποδείξετε ότι f γν. φθίνουσα στο $\mathbb{R}$
- ii. Να αποδείξετε ότι η f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.



Υποδειγματική Άσκηση 11.1

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha^x - \ln x$, $x > 0$ και $\alpha \in (0, 1)$.

i. Να αποδειχθεί ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$.

ii. Να λυθεί η ανίσωση

$$\alpha^{x^2+2x+7} - \alpha^{x^2+9} < \ln(x^2+2x+7) - \ln(x^2+9).$$

Απ: ii. $x > 1$



Υποδειγματική Άσκηση 11.2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^{2013} + x^{2011} + 1$.

i. Να αποδειχθεί ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

ii. Να λυθεί η ανίσωση $x^{2013} + x^{2011} - 2 > 0$.

iii. Να λυθεί η ανίσωση $f(f(x)) < 3$.

Απ: ii. $x > 1$ iii. $x < 0$



Προσοχή στους
περιορισμούς

Υποδειγματική Άσκηση 11.3

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι γνησίως μονότονη με $f(2014) < f(2012)$

- i. Να βρεθεί το είδος της μονοτονίας της f
- ii. Να λυθεί η ανίσωση $f(-3x+2) \leq f(-x^2)$



Απ: i. f γν. φθιν, ii. $(-\infty, 1] \cup [2, +\infty)$

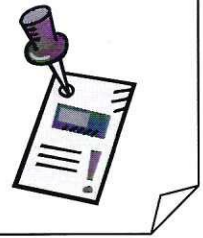
Προσοχή στους
περιορισμούς

Υποδειγματική Άσκηση 11.4

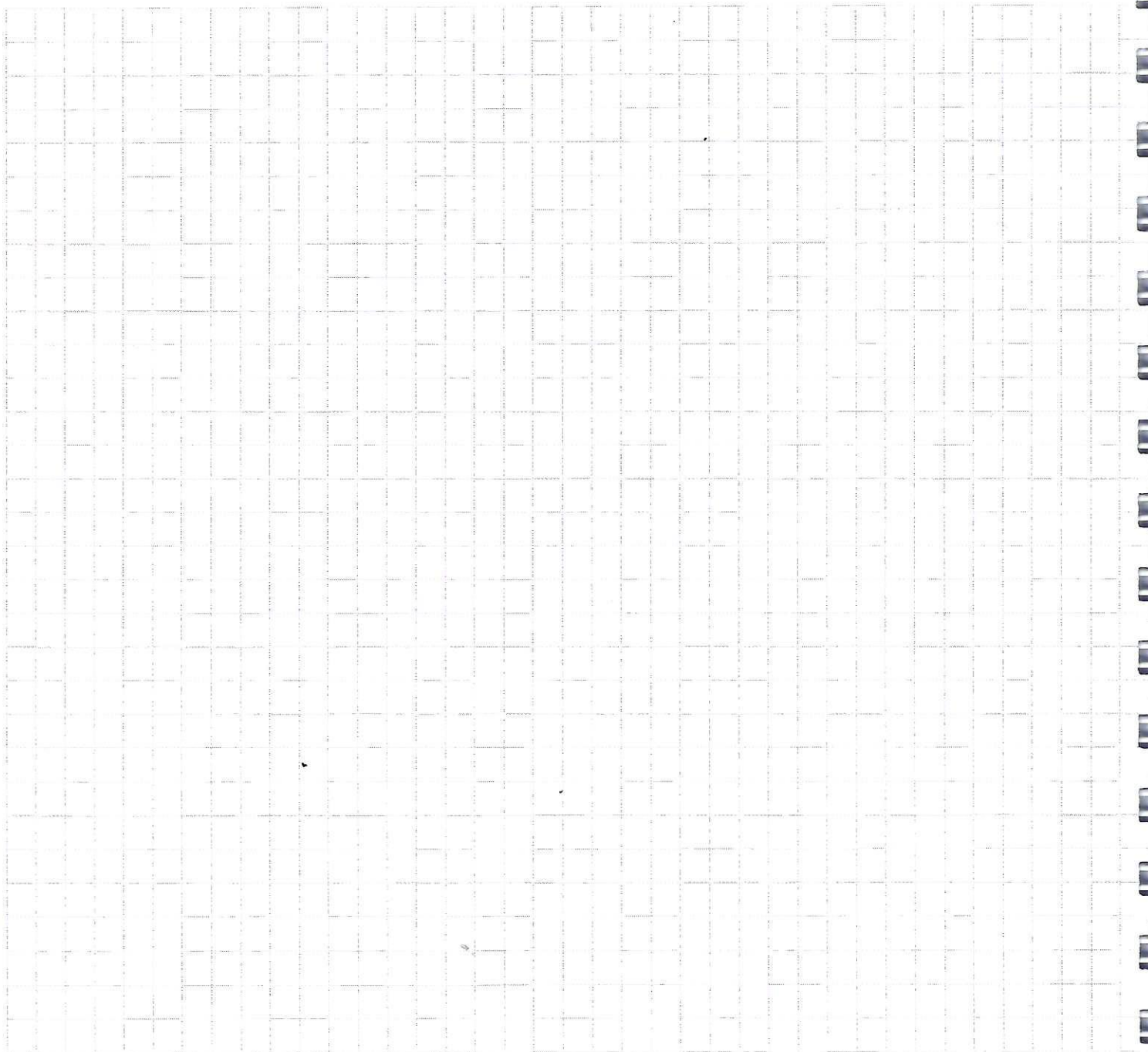
Να λύσετε τις ανισώσεις

i. $e^{1-x} < 1 + \ln x$

ii. $5x^3 + \ln x < \frac{2}{x} + 3$



Απ: i. $(1, +\infty)$, ii. $(0, 1)$

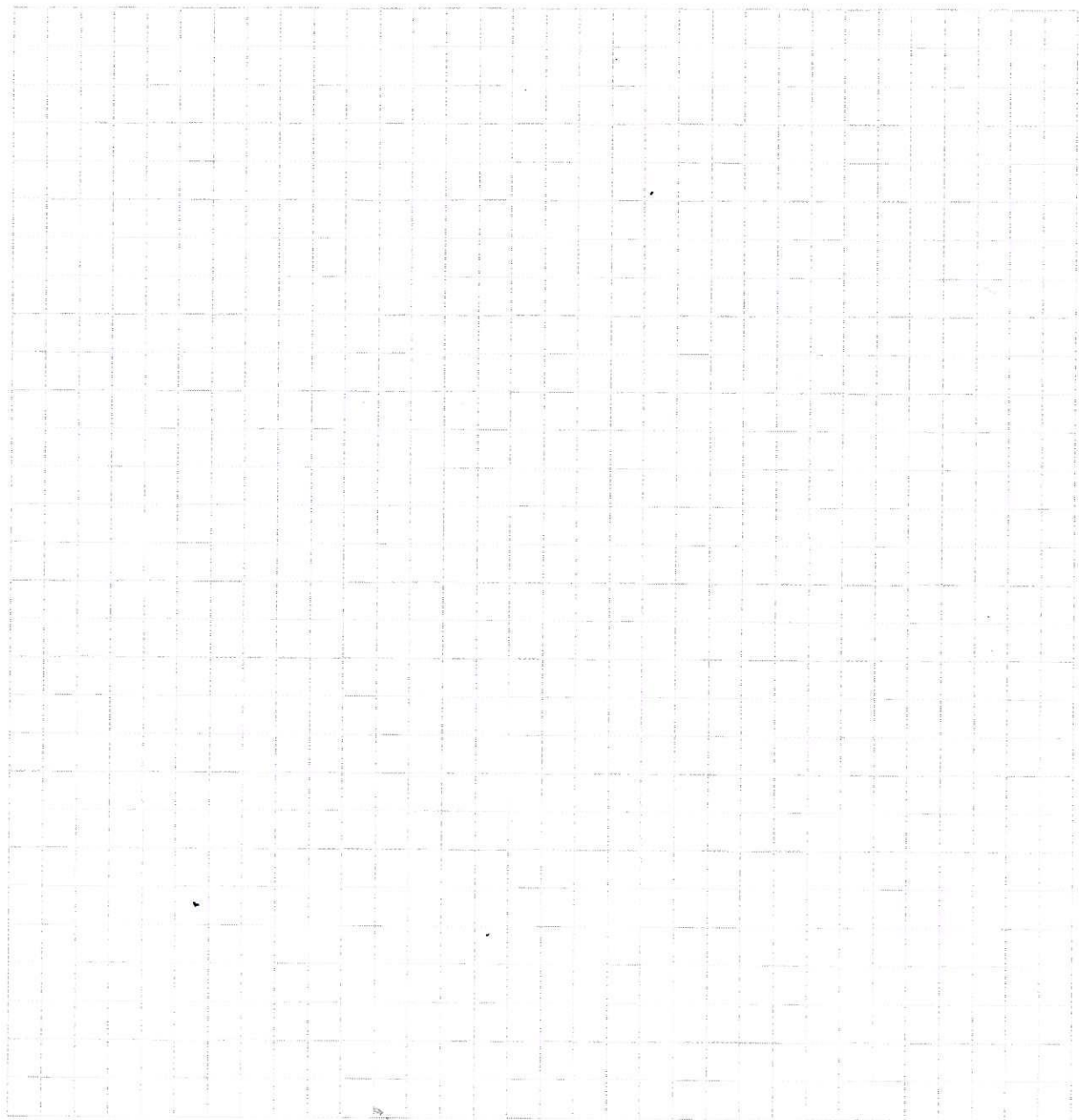


Υποδειγματική Άσκηση 11.5

Να λύσετε τις ανισώσεις:

i. $\sqrt{x^2+2} - \sqrt{3x} > \ln \frac{3x}{x^2+2}$

ii. $(x-2)(x+1) < e^x - e^{x^2-2}$

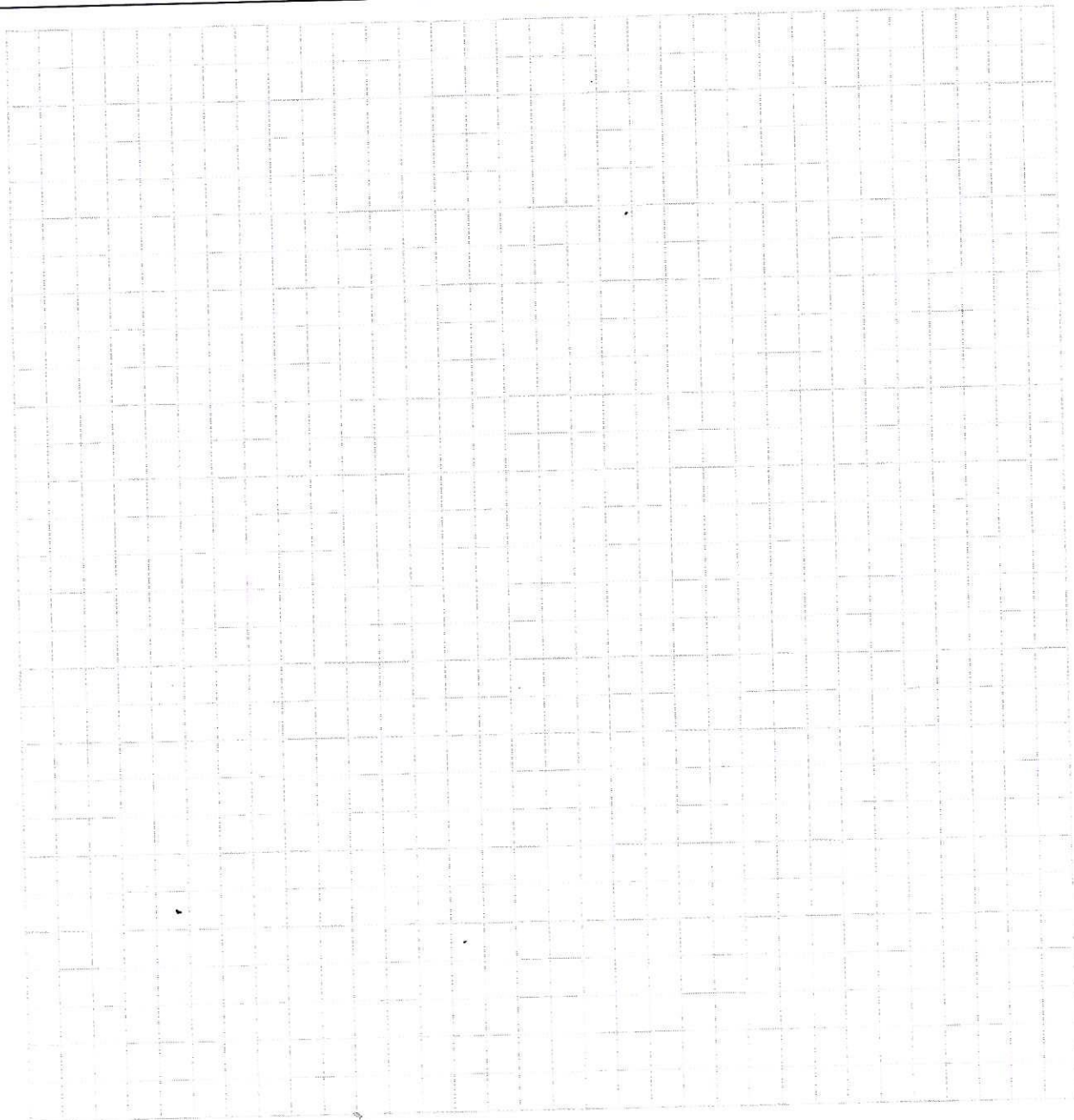


Υποδειγματική Άσκηση 11.6

Δίνεται $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ γνησίως αύξουσα.

Να λύσετε την ανίσωση:

$$f(x^4 + 1) - f(2) < f\left(\frac{1}{x^4 + 1}\right) - f\left(\frac{1}{2}\right)$$



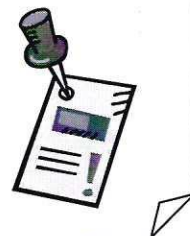
Υποδειγματική Άσκηση 12.1

Να λυθούν οι εξισώσεις

i. $e^x + 3x = 1$

ii. $x + 5\ln x = 1$

Απ: i. $x = 0$, ii. $x = 1$



Υποδειγματική Άσκηση 12.2

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι γνησίως φθίνουσα με την ιδιότητα $f(2-x) + f(x+4) = 0$

i. Να λυθεί η ανίσωση $f(x^2 - 6x + 8) < 0$

ii. Να λυθεί η εξίσωση $f(x) = 0$



Απ: i. $(-\infty, 1) \cup (5, +\infty)$, ii. $x = 3$

Υποδειγματική Άσκηση 12.3

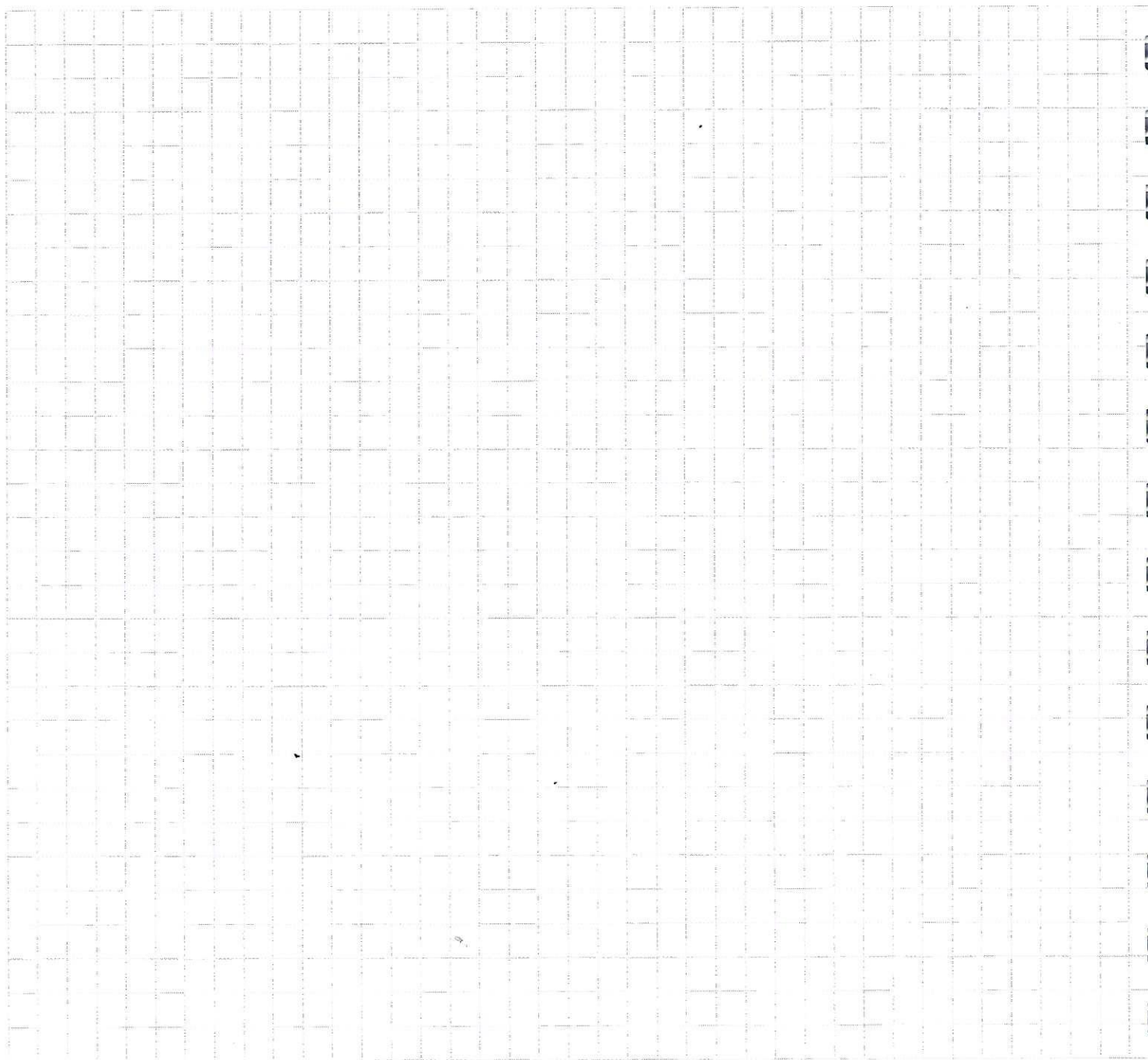
Να λυθούν οι εξισώσεις:

i. $(x^3 + x^2)^3 - (x + 1)^3 = 2(x + 1 - x^3 - x^2)$

ii. $(x - 1)^2 = \ln \frac{1+e^{2x}}{1+e^{x^2}} + 1$



Απ: i. $x = -1$ ή $x = 1$, ii. $x = 0$ ή $x = 2$

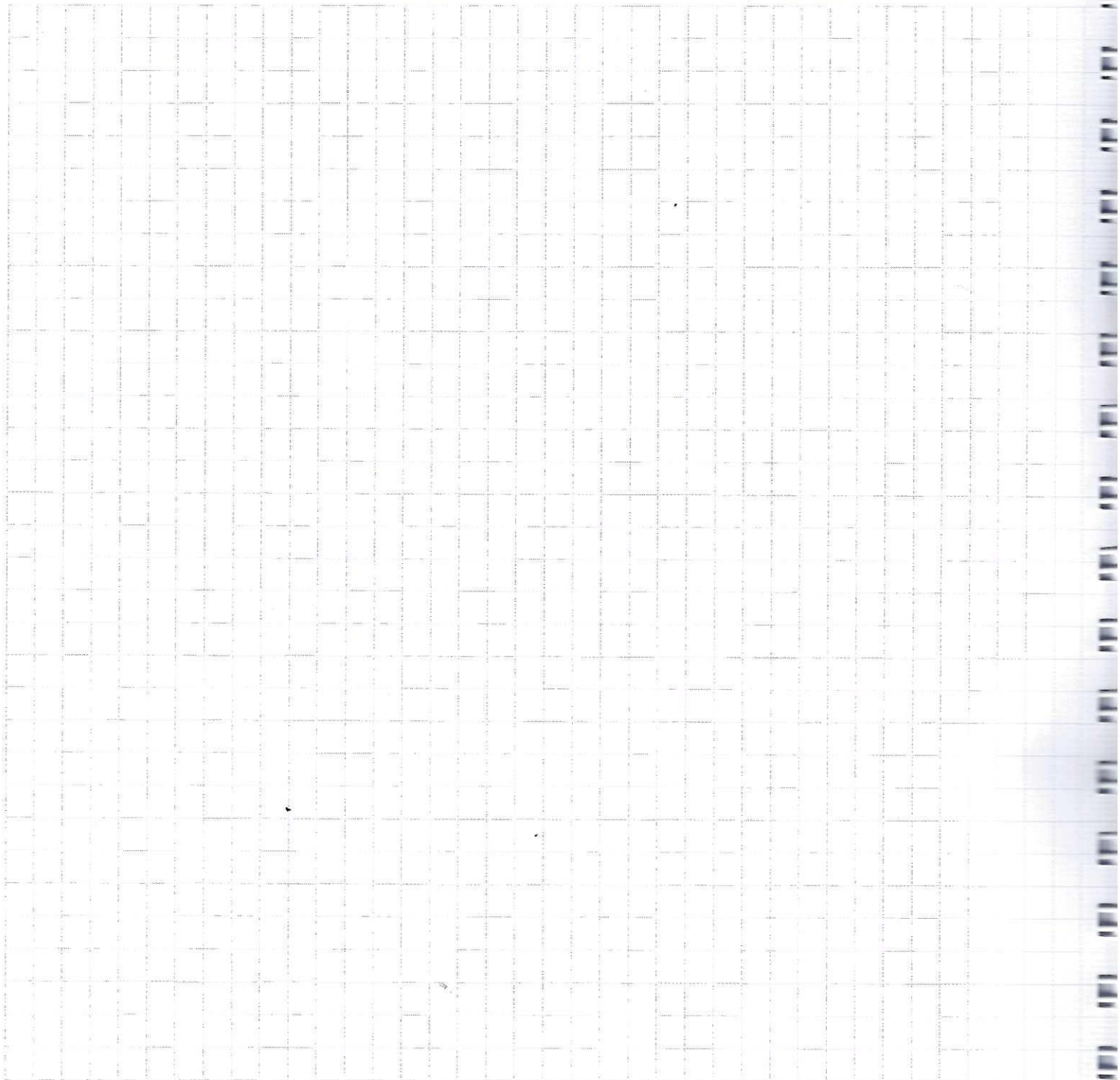


Υποδειγματική Άσκηση 13.1

Να αποδείξετε τις ανισότητες

i. $e^x \geq 1-x$ για $x \geq 0$

ii. $\ln x > -x+e+1$ για $x > e$



Υποδειγματική Άσκηση 13.2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{3}{x} - 2\ln x$

- i. Να βρείτε τη μονοτονία της f .
- ii. Να αποδείξετε ότι $f(e) + f(\pi) > f(e + 2) + f(\pi + 1)$



14^η Κατηγορία

Πώς δείχνω ότι f έχει ακρότατο

Υποδειγματική Άσκηση 14.1

Να βρεθούν τα ακρότατα των συναρτήσεων

- i. $f(x) = 2(x - 2)^2 + 1$
- ii. $f(x) = 4 - 3|x - 1|$
- iii. $f(x) = 3 - \sqrt{x-4}$
- iv. $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$
- v. $f(x) = 1 + x^2 + 6|x|$
- vi. $f(x) = \ln(x^2 - 4x + 5)$



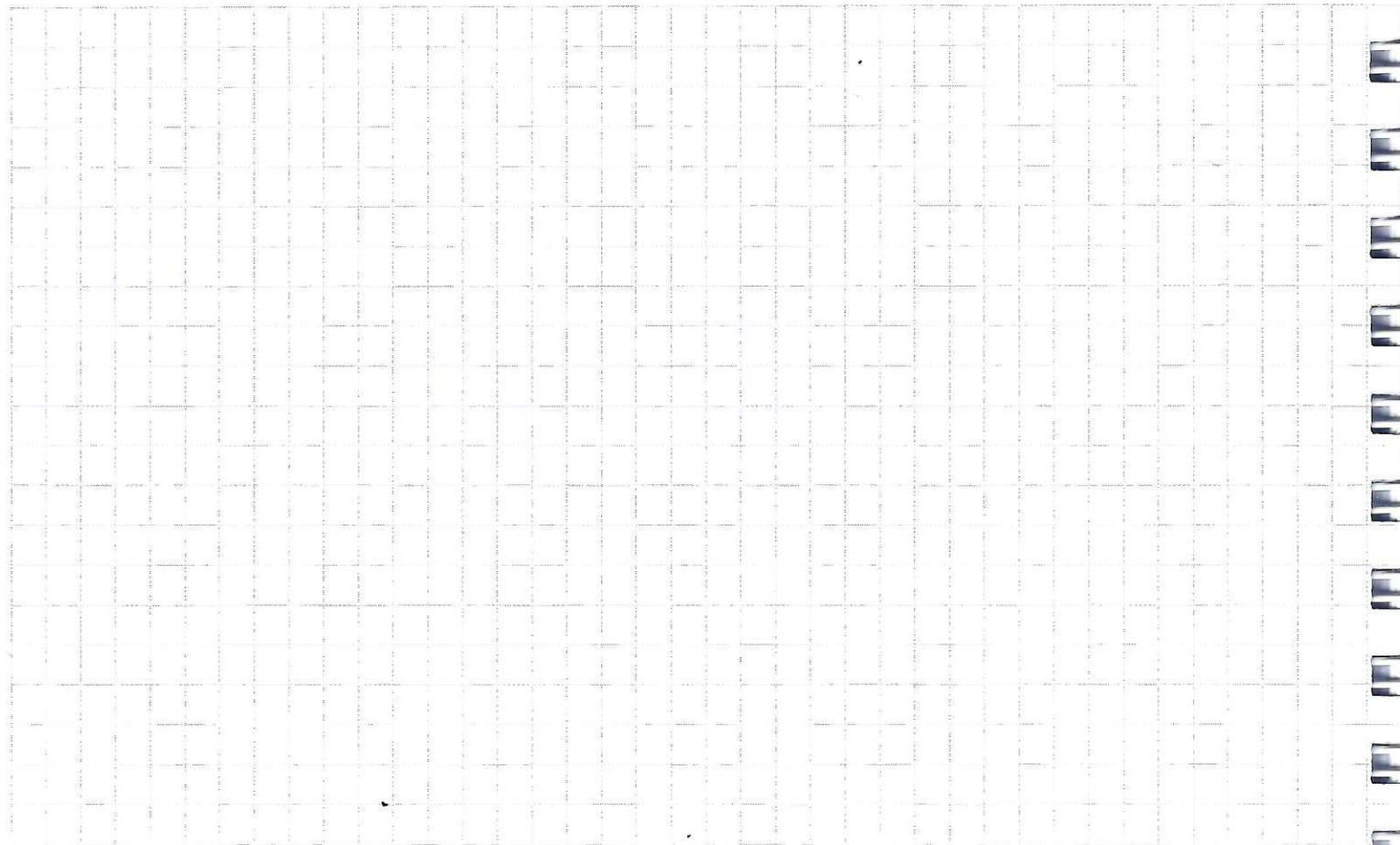
Απ: i. ελαχ. $x = 2$, με τιμή 1, ii. μέγιστο $x = 1$, με τιμή 4, iii. μέγιστο $x = 4$, με τιμή 3,

iv. ελαχ για $x = 1$ ή $x = -1$ το $f(1) = f(-1) = 2$, v. ελαχ για $x = 0$ το $f(0) = 1$, vi. ελαχ για $x = 2$ το $f(2) = 0$

Υποδειγματική Άσκηση 14.2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 4}$

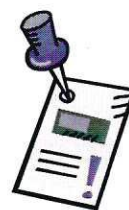
- i. Να δείξετε ότι $-1 \leq f(x) \leq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- ii. Να εξετάσετε αν οι αριθμοί $-1, 1$ είναι η ελάχιστη - μέγιστη τιμή.
- iii. Να δείξετε ότι για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ $|f(x_1) - f(x_2)| < 2$



Υποδειγματική Άσκηση 14.3

Να λυθεί η εξίσωση:

$$\ln((x-1)^2 + 1) + 1 = \frac{1}{|x-1|+1}$$



Υποδειγματική Άσκηση 15.2

Αν $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $2(f \circ f)(x) = 2f(x) + 3x^3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να αποδειχθεί ότι:

i. Η f (1-1) αντιστρέφεται.

ii. Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

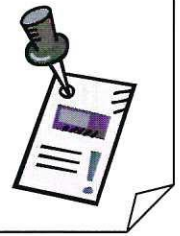


Υποδειγματική Άσκηση 15.3

Έστω οι συναρτήσεις f, g ορισμένες στο $\mathbb{R}$ με

την $g \circ f$ να είναι συνάρτηση "1-1".

Δείξτε ότι και η f είναι "1-1".

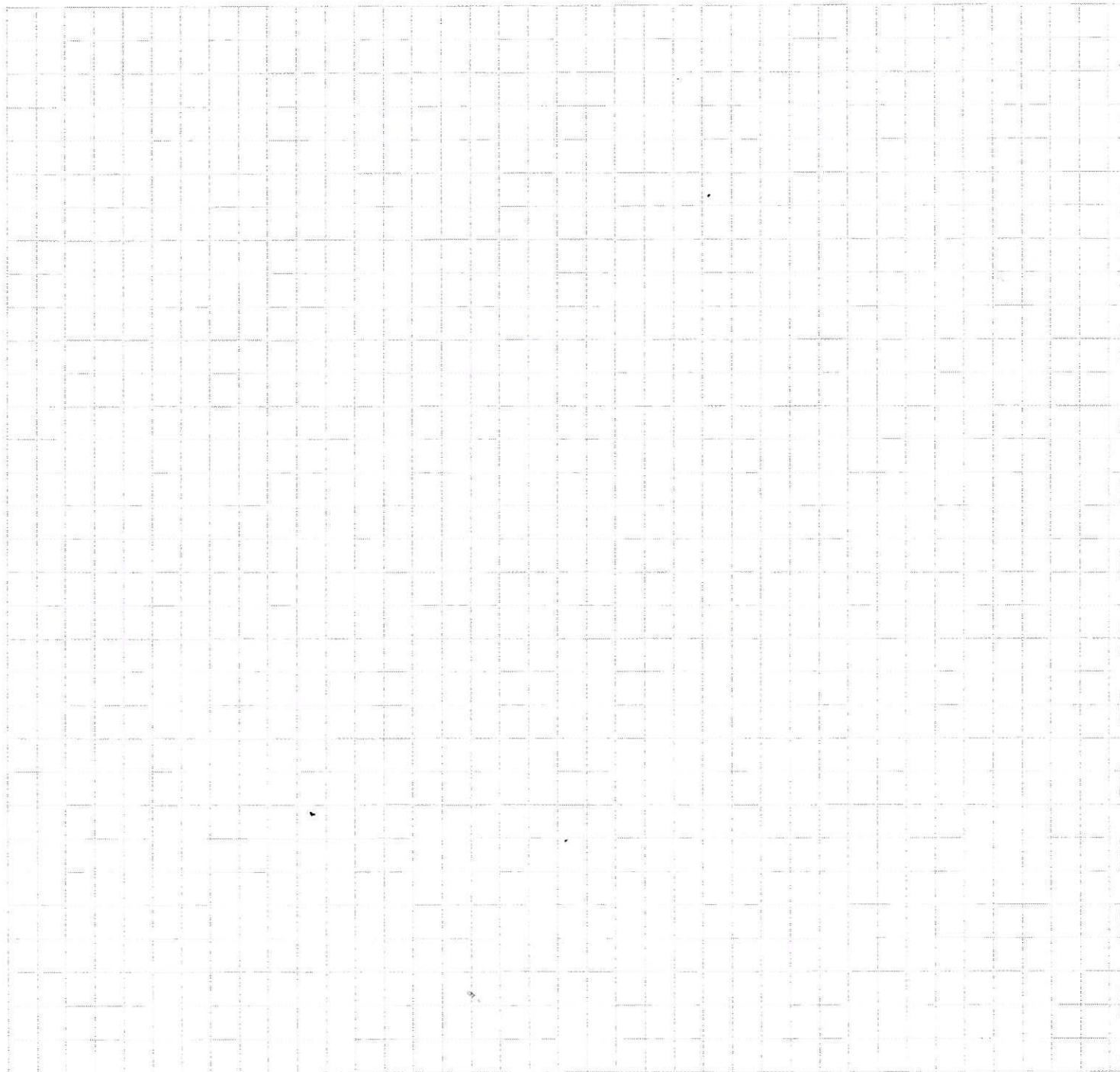


Υποδειγματική Άσκηση 15.4

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$|f(x) - f(y)| \geq |x - y| \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι η f είναι "1-1".



Υποδειγματική Άσκηση 15.5

Να εξετάσετε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι 1-1

(αντιστρέψιμες)

i. $f(x) = x^6 + 1$

ii. $f(x) = x^2 - 2x + 2 + \sin 2\pi x, x \in \mathbb{R}$



Απ: i. όχι, ii. όχι

Υποδειγματική Άσκηση 15.6

Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $x^3 + f(x) + e^{f(x)} = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι:

- i. Η f είναι 1-1
- ii. Η f δεν μπορεί να είναι γνησίως αύξουσα.



Υποδειγματική Άσκηση 15.7

Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $(f \circ f)(x) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η συνάρτηση $g(x) = e^x + e^{f(x)}$, $x \in \mathbb{R}$ που είναι 1-1.

- i. Να δείξετε ότι η f είναι 1-1
- ii. Να δείξετε ότι $(g \circ f)(x) = g(x)$
- iii. Να βρείτε τη συνάρτηση f .



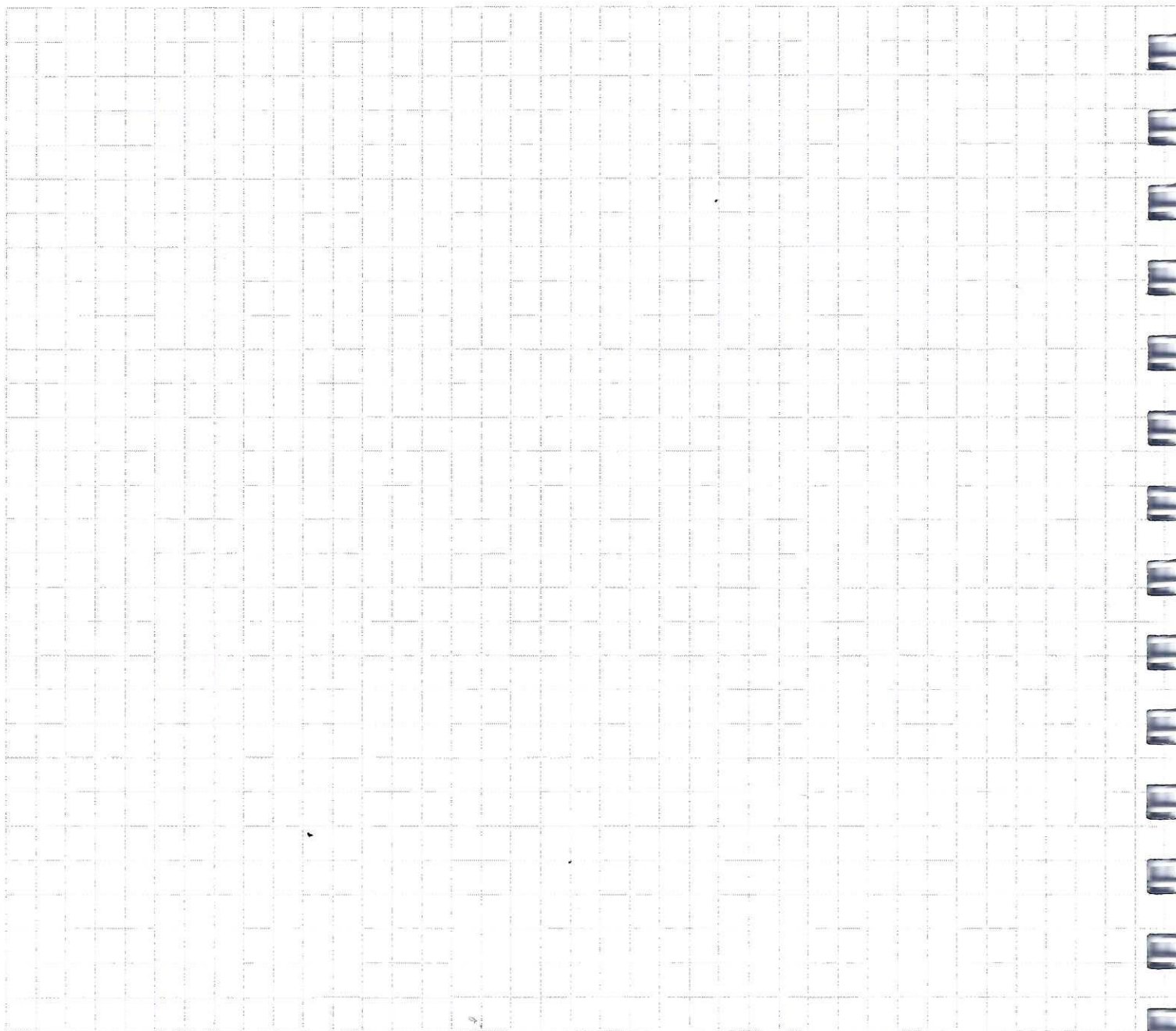
Απ: iii. $f(x) = x$

Υποδειγματική Άσκηση 15.8

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα

$$f^2(x) \leq f(x) f(5-x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να δείξετε ότι η f δεν είναι 1-1



Υποδειγματική Άσκηση 16.1

Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση:

$$f(f(x)) + f^3(x) = 6x + 4, \quad x \in \mathbb{R}.$$

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι "1-1".

ii. Να λύσετε την εξίσωση: $f(2x^3 + x) = f(4-x)$, όταν $x \in \mathbb{R}$.

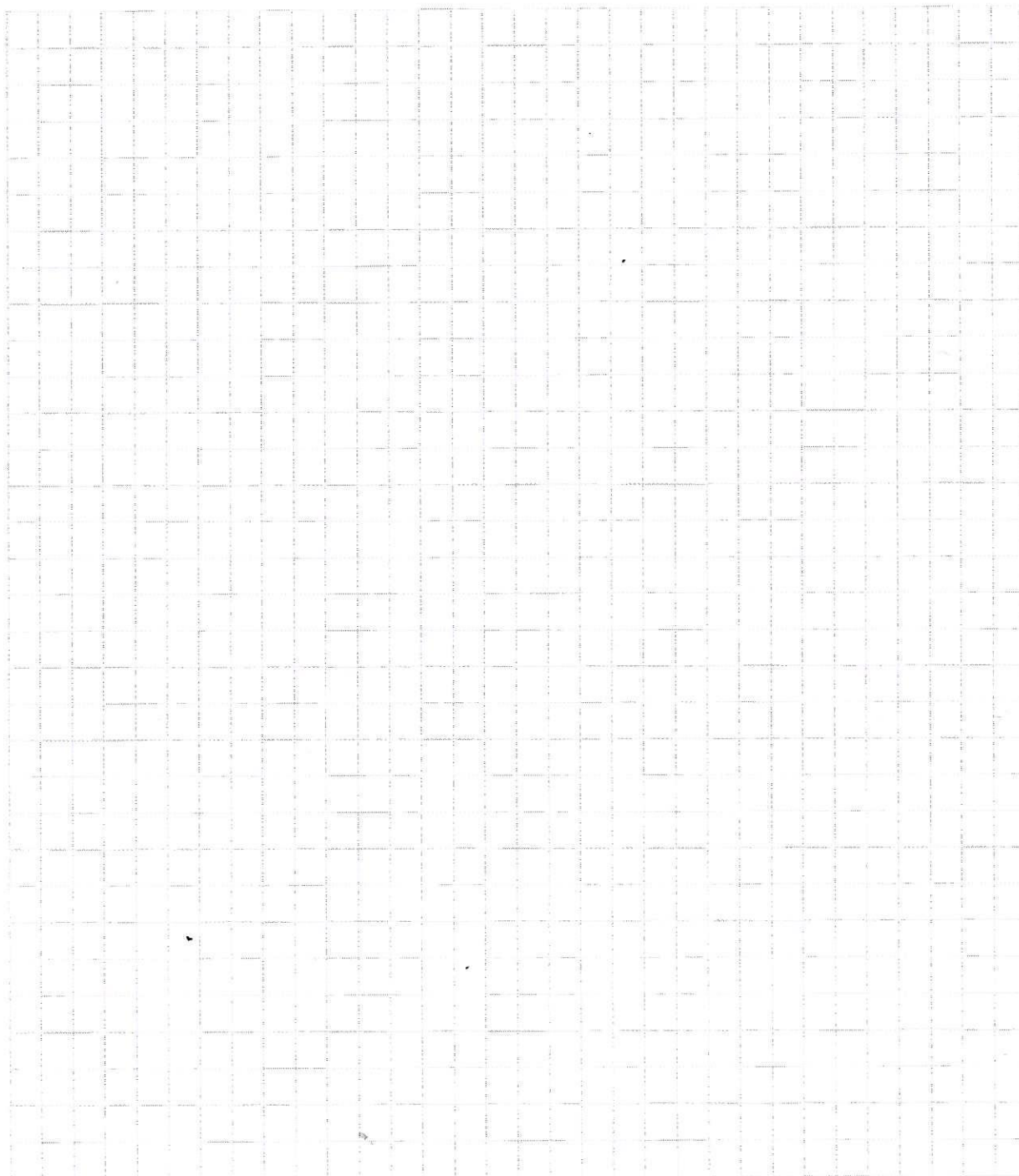
Απ: ii. $x = 1$



Προσοχή στους
περιορισμούς

Υποδειγματική Άσκηση 16.2

Θεωρούμε συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$, που είναι "1-1", για την οποία ισχύει: $f(x) \cdot f(1-x) = f(\alpha x + \beta)$, $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι $\alpha = 0$.

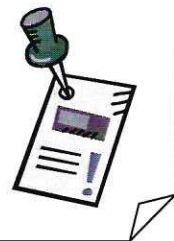


Υποδειγματική Άσκηση 16.3

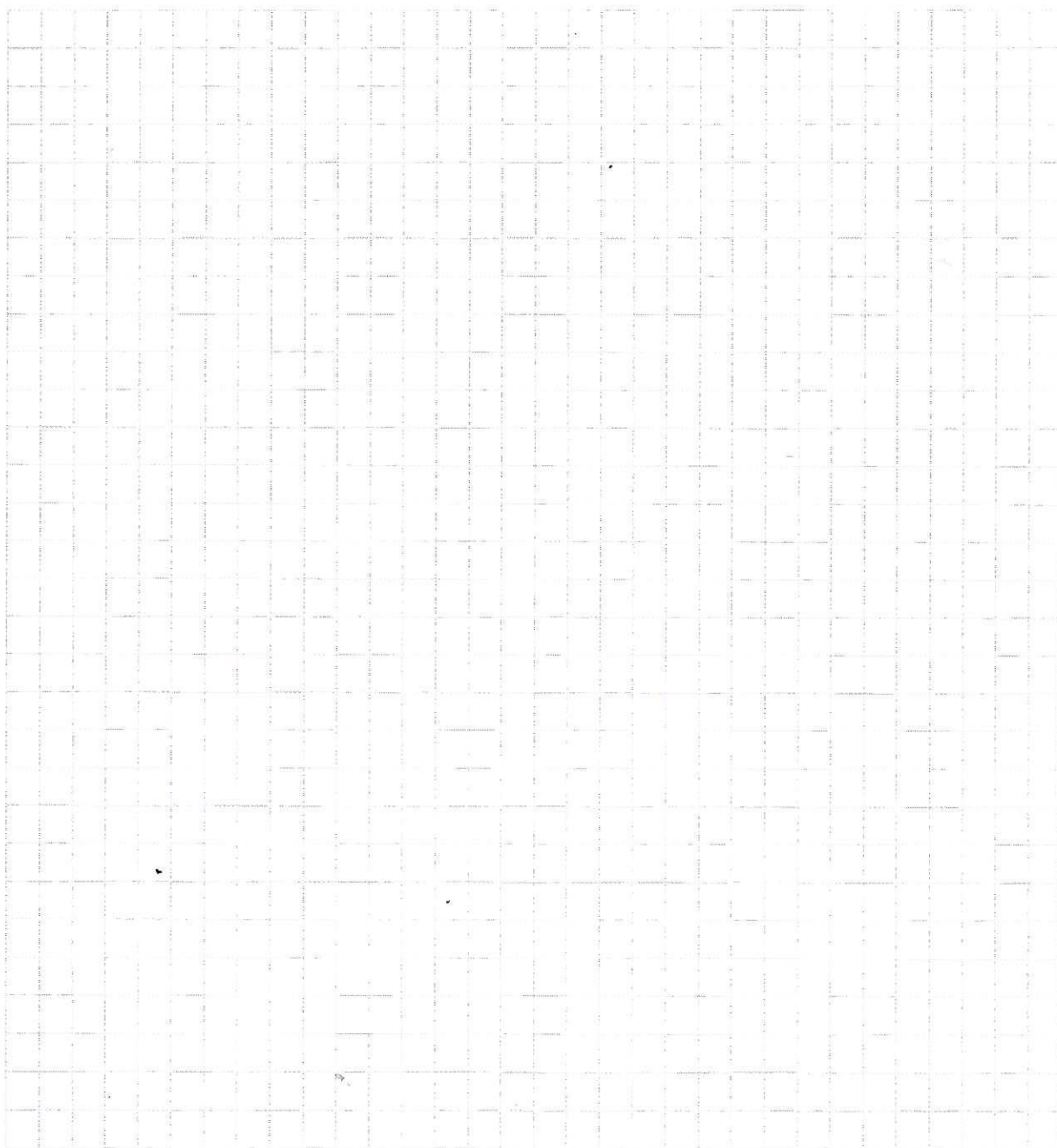
Αν για τη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει

$$e^{f(x)} - e^{-f(x)} = x - \frac{1}{x}, \text{ για κάθε } x > 0 \text{ τότε να βρείτε τον}$$

τύπο της συνάρτησης f .



Απ: $f(x) = \ln x, x > 0$



Υποδειγματική Άσκηση 16.4

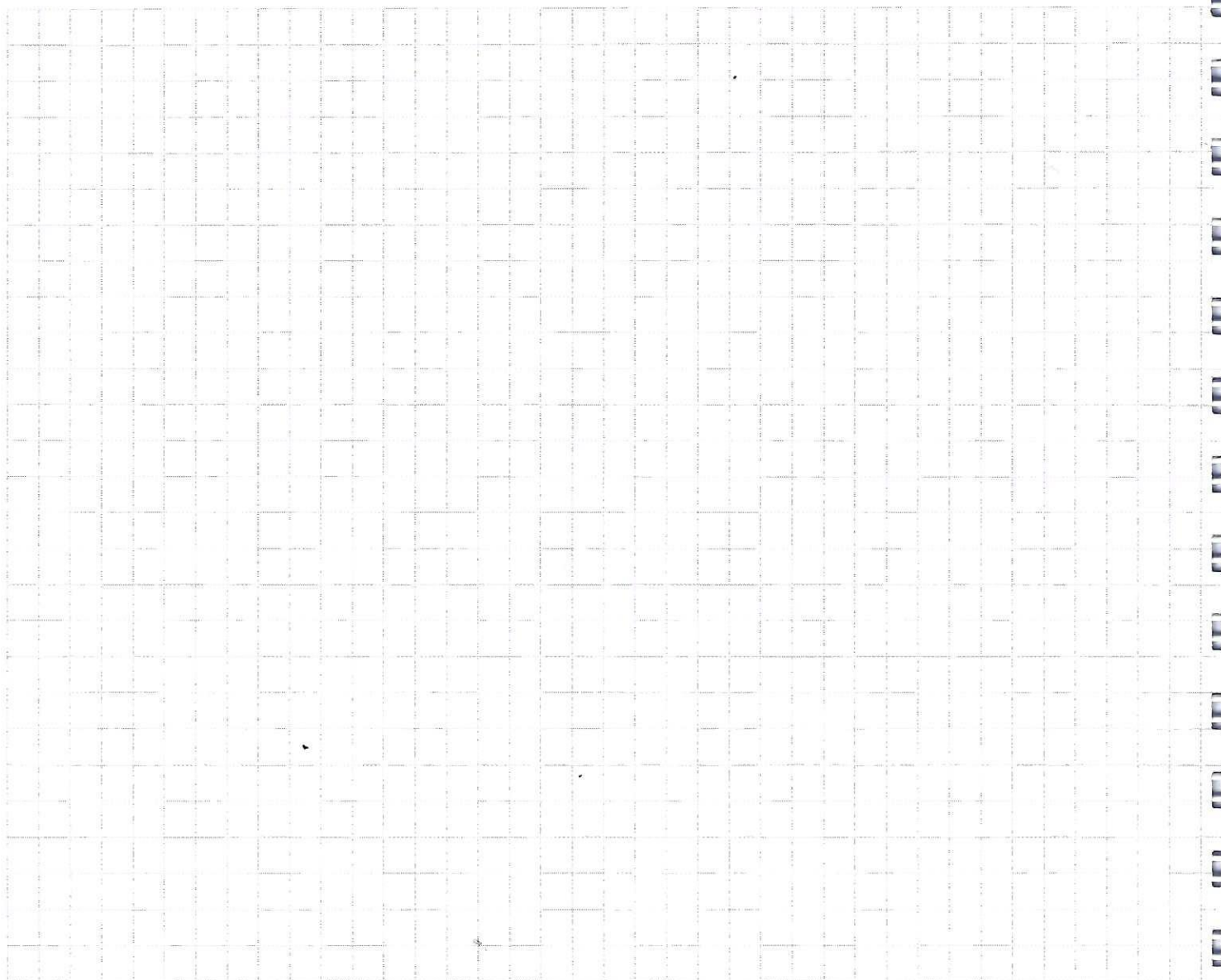
Δίνεται $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι 1-1 για κάθε $x \neq 0$ ικανοποιεί τη σχέση: $(f \circ f)(x) \cdot f(x) = 2$

i) να αποδειχθεί ότι $f(f(x)) = x, x \neq 0$

ii) να βρεθεί ο τύπος της f



Απ: ii. $f(x) = \frac{2}{x}, x \in \mathbb{R}^*$



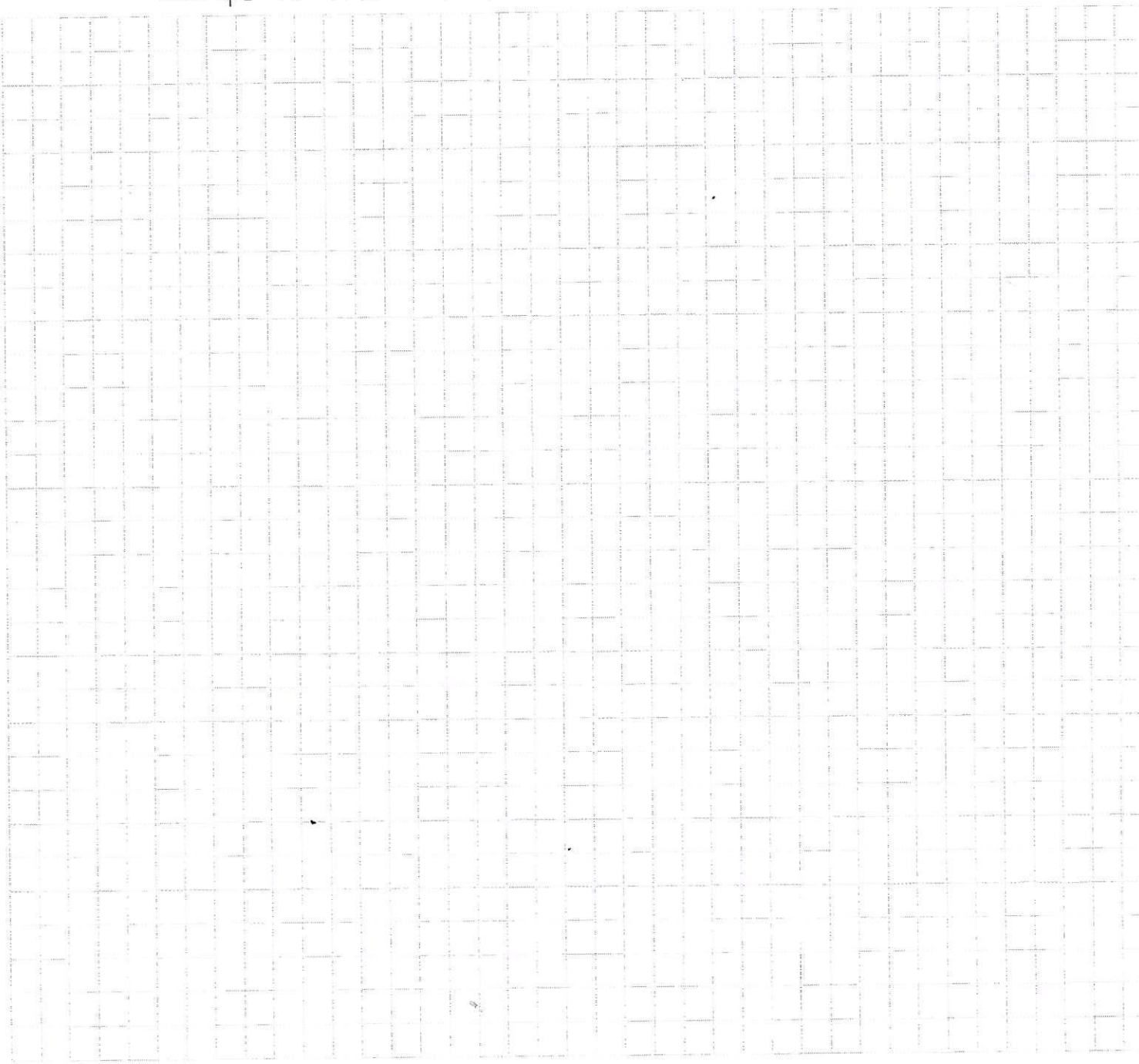
Υποδειγματική Άσκηση 17.1

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{x-2} - 1$

- i. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται
- ii. Να προσδιορίσετε την αντίστροφή της



Απ: ii. $D_{f^{-1}} = (-1, +\infty)$ $f^{-1}(x) = 2 + \ln(x + 1)$



Υποδειγματική Άσκηση 17.2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2e^{3x-1} + 2$

- i. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται
- ii. Να προσδιορίσετε την αντίστροφή της



Απ: $D_{f^{-1}} = (2, +\infty)$ $f^{-1}(x) = \frac{\ln(\frac{x-2}{2})+1}{3}$

Υποδειγματική Άσκηση 17.3

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$

- i. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται
- ii. Να προσδιορίσετε την αντίστροφή της

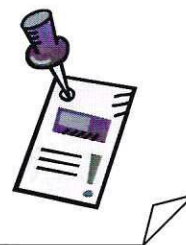


Απ: $D_{f^{-1}} = (0, 1)$, $f^{-1}(x) = \ln \frac{x}{1-x}$

Υποδειγματική Άσκηση 17.4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x-3} - 2$

- i. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται
- ii. Να προσδιορίσετε την αντίστροφη της
- iii. Να σχεδιαστούν οι C_f , $C_{f^{-1}}$



Απ: ii. $D_{f^{-1}} = [-2, +\infty)$ $f^{-1}(x) = x^2 + 4x + 7$

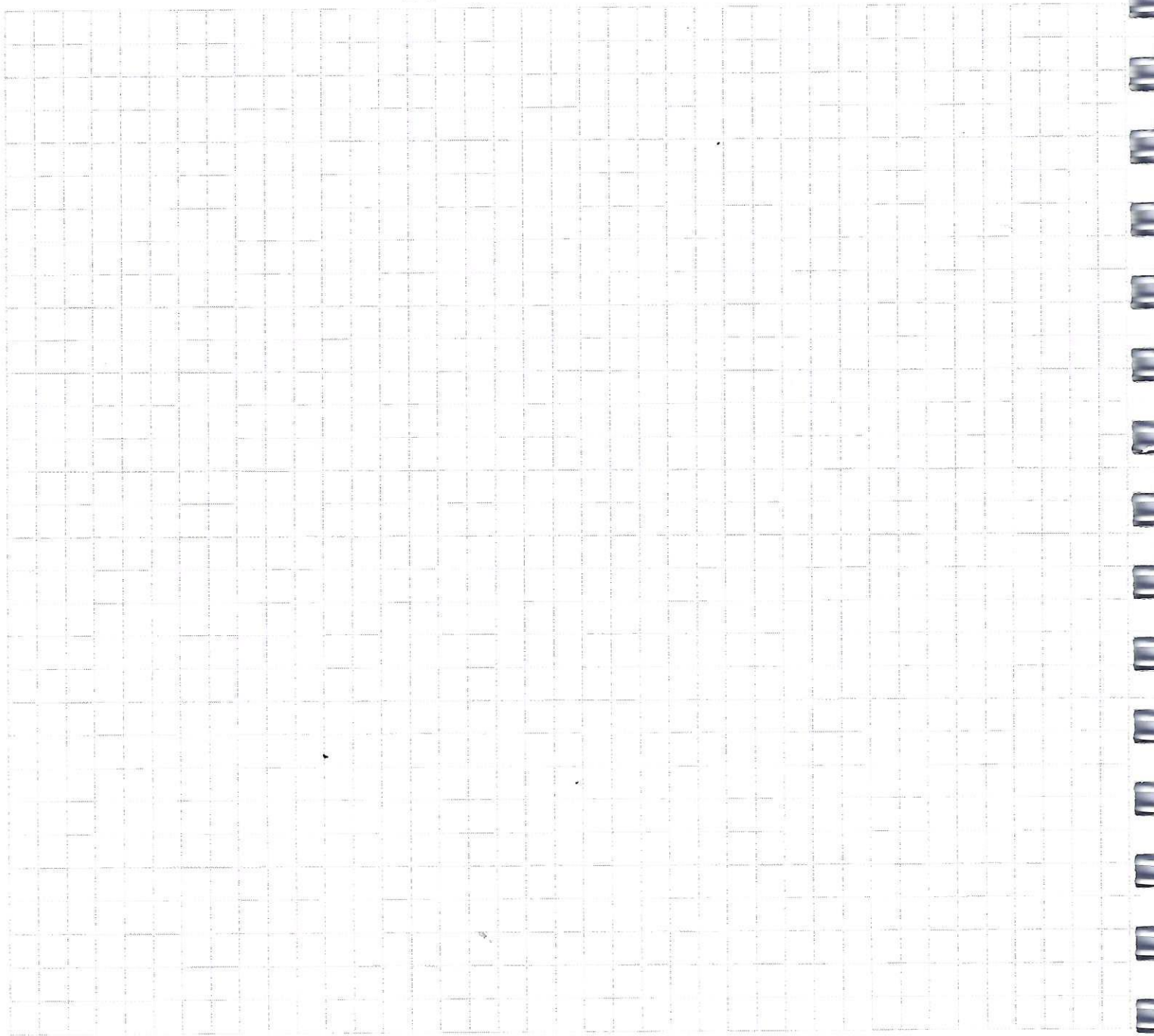
Υποδειγματική Άσκηση 17.5

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$

- i. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται
- ii. Να προσδιορίσετε την αντίστροφή της



Απ: ii. $D_{f^{-1}} = (-\infty, 0)$ $f^{-1}(x) = \ln \frac{e^x + 1}{1 - e^x}$



Υποδειγματική Άσκηση 17.6

Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ τέτοια,

ώστε να ισχύει:

$$f^3(x) + 2f(x) - x = 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

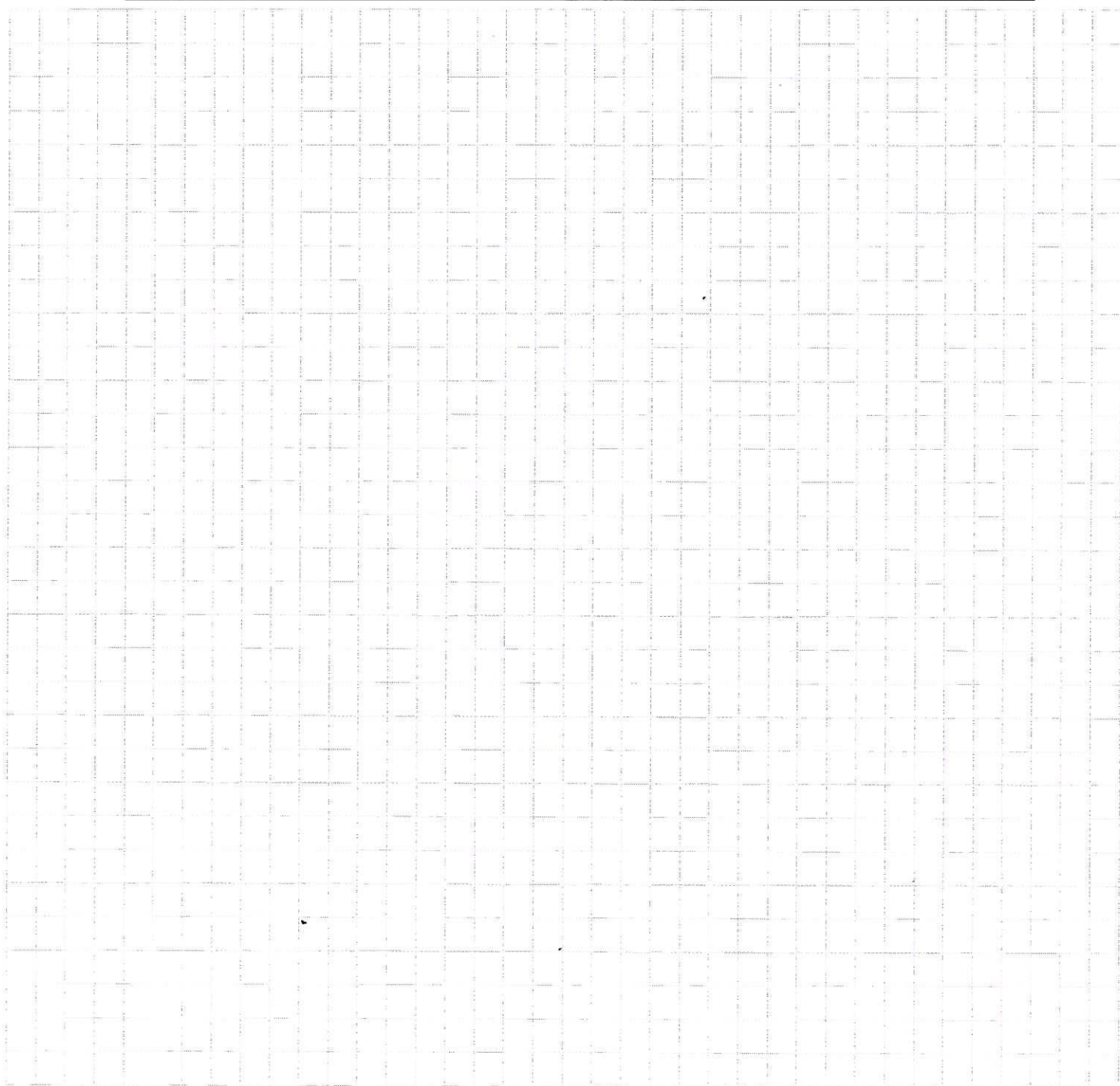
Αποδείξτε ότι η f αντιστρέφεται και βρείτε την f^{-1} .



Απ: $D_{f^{-1}} = \mathbb{R} \quad f^{-1}(x) = x^3 + 2x$

Υποδειγματική Άσκηση 17.8

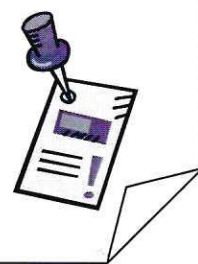
Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ γνησίως μονότονη. Να αποδείξετε ότι και η f^{-1} έχει το ίδιο είδος μονοτονίας.



Υποδειγματική Άσκηση 17.9

Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ και ικανοποιεί τη σχέση: $f(x + y) = f(x) + f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

- i. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
- ii. Να αποδείξετε ότι η f είναι περιττή
- iii. Αν η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα τη $x = 0$, τότε να αποδείξετε ότι:
 - α) η f είναι αντιστρέψιμη
 - β) ισχύει $f^{-1}(x + y) = f^{-1}(x) + f^{-1}(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.



Υποδειγματική Άσκηση 18.1

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=x^3+x+2$

- i. Να αποδειχθεί ότι η f είναι γνησίως αύξουσα
- ii. Να λυθεί η εξίσωση $f^{-1}(x) = 1$.
- iii. Να λυθεί η εξίσωση $f^{-1}(x) = x - 1$.
- iv. Να λυθεί η ανίσωση $f^{-1}(x) \geq x - 1$.



Απ: ii. $x = 4$, iii. $x = 0$, iv. $x \leq 0$

Υποδειγματική Άσκηση 18.3

Δίνεται μια συνάρτηση $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα

$$f(x) - f(y) = f\left(\frac{x}{y}\right) \text{ για κάθε } x, y \neq 0$$

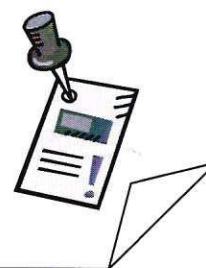
Αν η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα, τότε:

i) να αποδειχθεί ότι ορίζεται η f^{-1}

ii) να λυθεί η εξίσωση

$$f(x) + f(x^2 + 3) = f(x^2 + 1) + f(x + 1)$$

iii) αν επιπλέον είναι $f(x) > 0$ για κάθε $x > 1$, να αποδειχθεί ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$



Απ: ii. $x = 1$

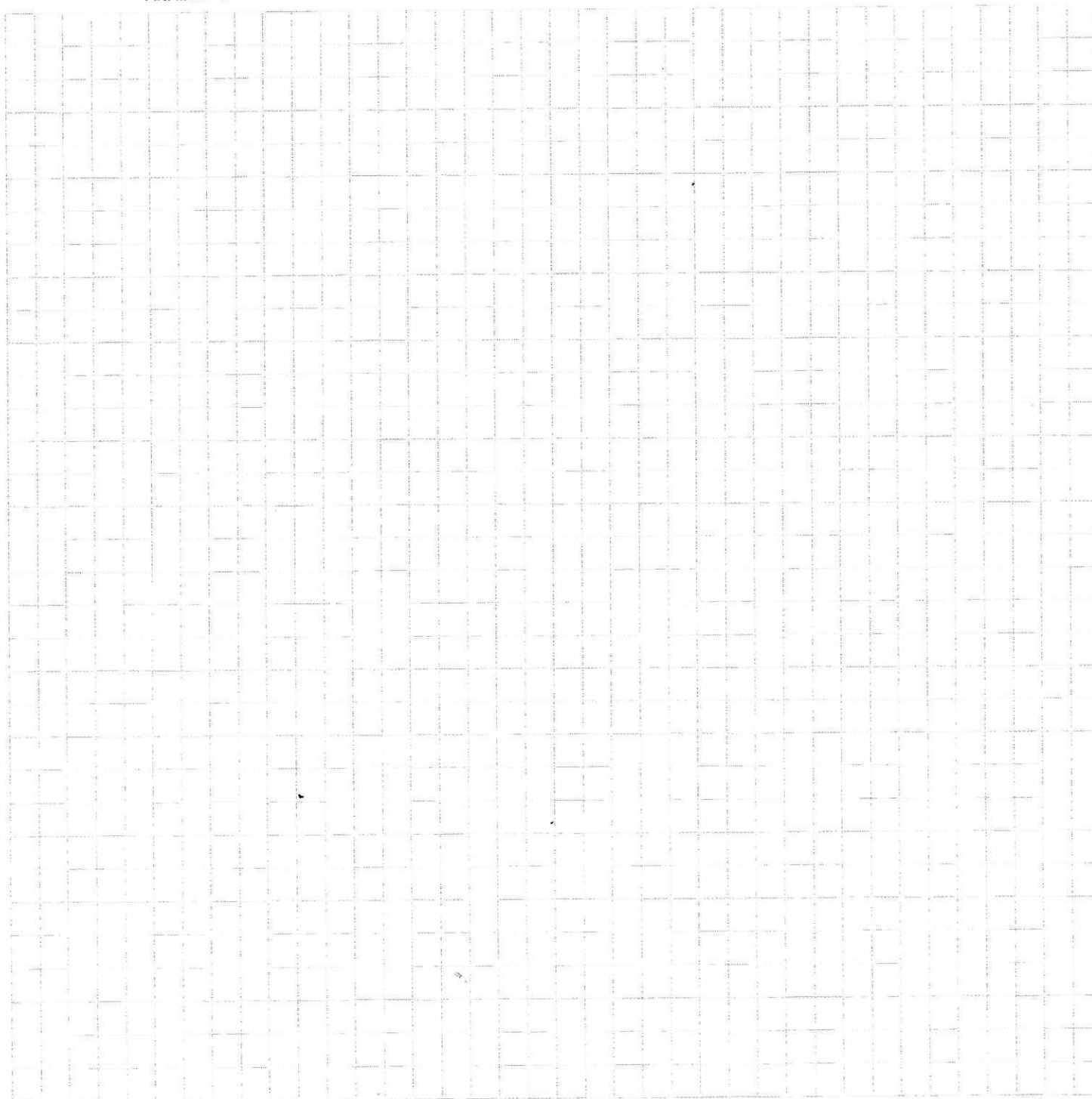
Υποδειγματική Άσκηση 19.1

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \ln x - \frac{e}{x} + x$

- i. Να αποδειχθεί ότι η f^{-1} ορίζεται
- ii. Να λυθεί η εξίσωση $f^{-1}(x) = x$.



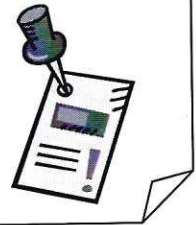
Απ: ii. $x = e$



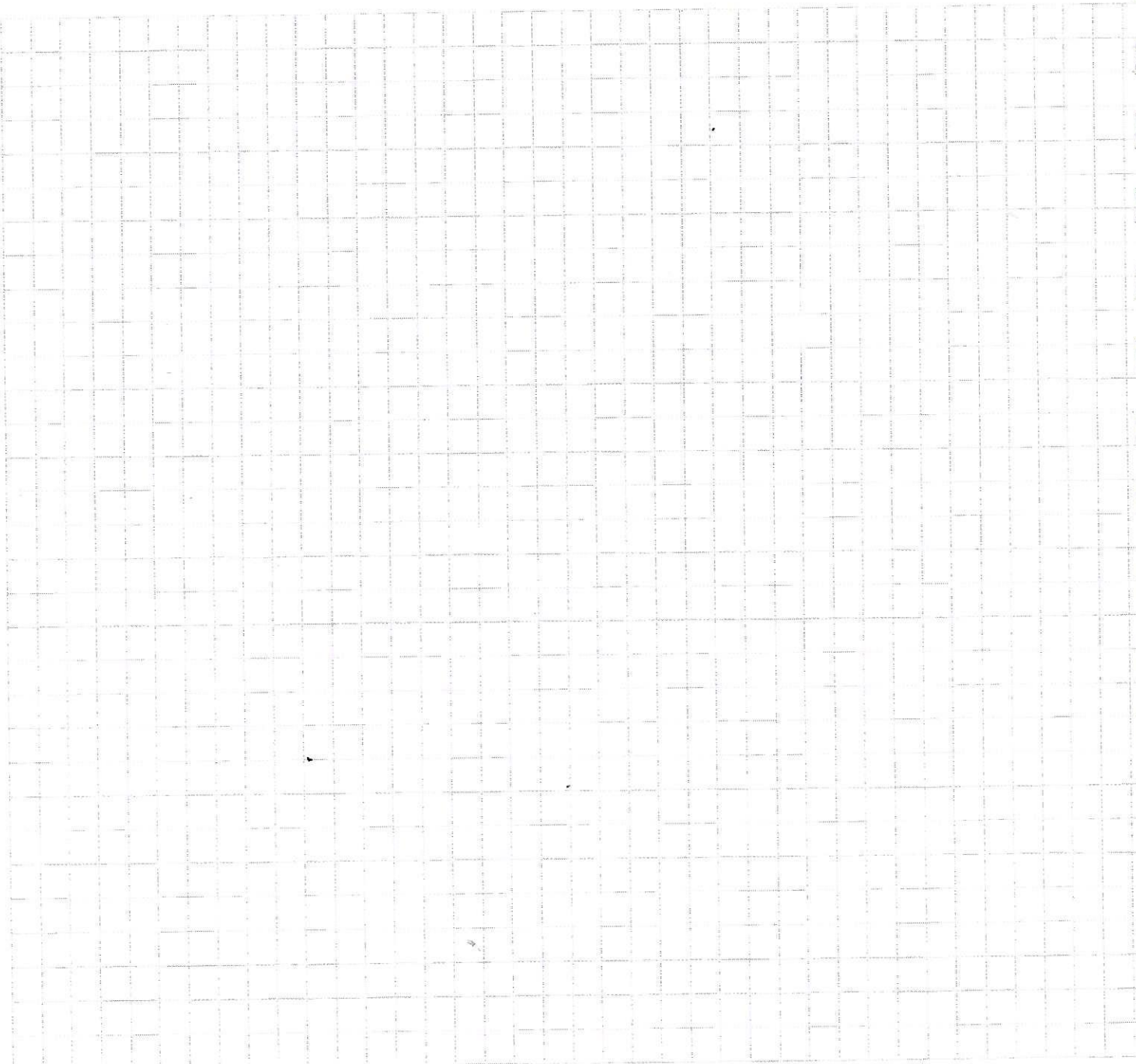
Υποδειγματική Άσκηση 19.2

Έστω $f(x) = x^{31} + 4x + 4$.

- i. Να αποδειχθεί ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρεθεί το $f^{-1}(9)$.
- ii. Να βρεθούν τα κοινά σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}$



Απ: i. $f^{-1}(9) = 1$, ii. $A(-1, -1)$



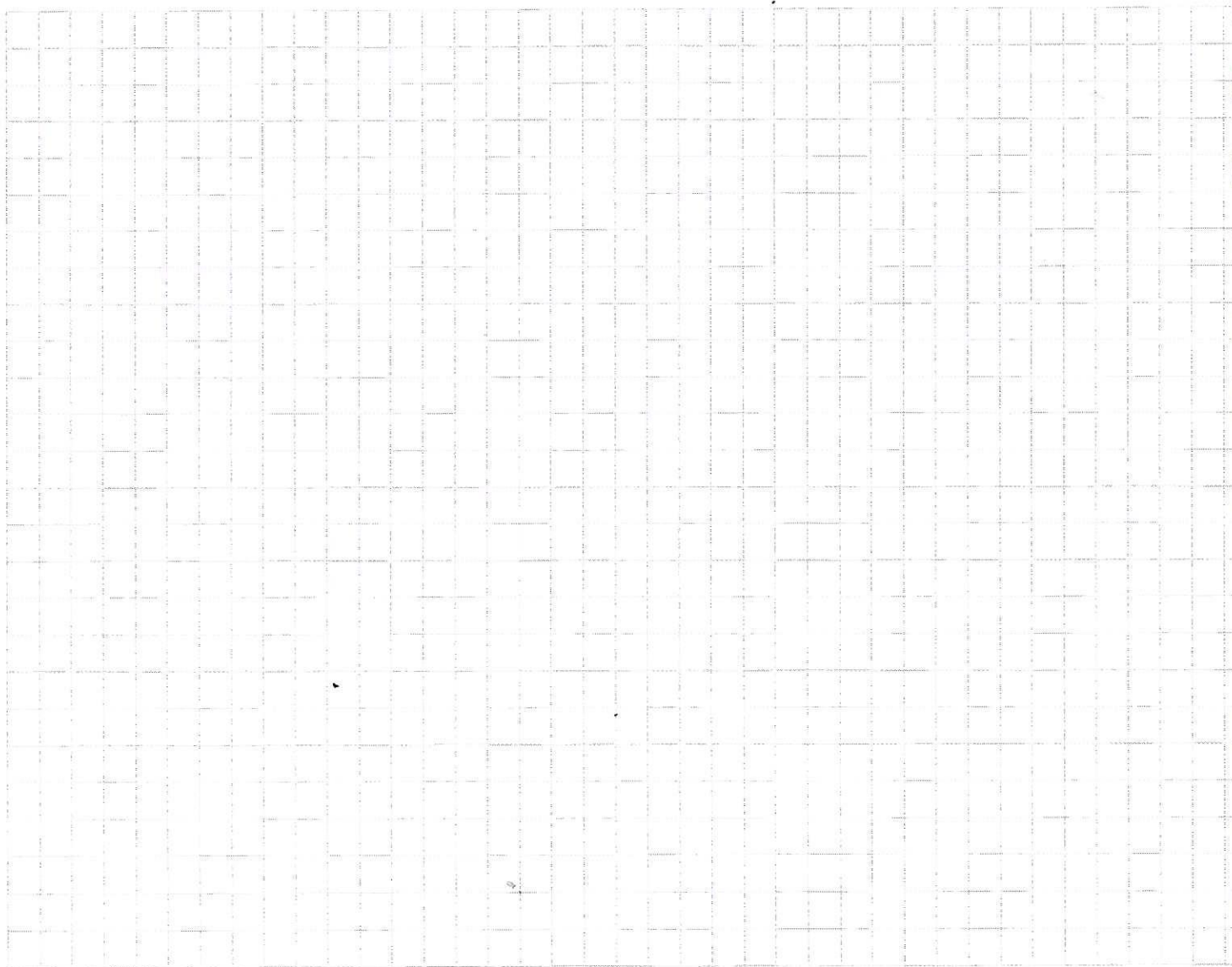
Υποδειγματική Άσκηση 19.3

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

- $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$
- $f^3(x) + f(x) = x^3$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (1)

α. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα και ότι αντιστρέφεται.

β. Να βρείτε το διάστημα όπου η $C_{f^{-1}}$ βρίσκεται κάτω από την ευθεία $y = x$.



Υποδειγματική Άσκηση 19.4

Δίνεται η συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, με $A = (0, +\infty)$ και $f(x) = \ln x + x - 1$.

- α. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται.
- β. Αν είναι γνωστό ότι $f(A) = \mathbb{R}$, τότε να βρείτε το διάστημα όπου η $C_{f^{-1}}$ βρίσκεται πάνω από την ευθεία $y = x$.

