

Πεδίο ορισμού**1.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

i. $f(x) = x^2 + 5x + 6$

ii. $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 5x + 6}$

iii. $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} - \frac{1}{2x^2 - 8}$

iv. $f(x) = \frac{x - 3}{2x^2 - x - 1} + \frac{x}{x^2 - 5x + 6}$

v. $f(x) = \frac{x + 2}{x^2 - 9} + \frac{x - 3}{x^2 - 1}$

vi. $f(x) = \frac{x + 2}{x^3 + x^2 - x - 1} + \frac{x - 3}{x^3 + x^2 - 4x - 4}$

2. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

i. $f(x) = \sqrt{x - 4}$

ii. $f(x) = \sqrt{3 - x}$

iii. $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$

iv. $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$

v. $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$

vi. $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 4}$

3. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

i. $f(x) = \sqrt{|x - 3| - 5} + \sqrt{7 - |x - 4|}$

ii. $f(x) = \frac{x}{|x - 3| - 2} + \frac{5}{|7 - 2x| - 1}$

4. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

i. $f(x) = \ln(x - 3)$

ii. $f(x) = \ln x^2$

iii. $f(x) = \ln(4 - x^2)$

iv. $f(x) = \ln \frac{3-x}{x+4}$

v. $f(x) = \sqrt{\ln^2 x - 3 \ln x + 2}$

vi. $f(x) = \sqrt{\frac{e^x - 2}{e^x - 1}}$.

5. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

i. $f(x) = \frac{1}{x - |x|}$

ii. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|} - x}$

iii. $f(x) = \frac{e^x}{x-1} + \frac{x^2+3}{x^2-x-12}$

iv. $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{9-x}}$

6. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

i. $f(x) = \ln \frac{-3x^2 + x + 2}{|x| - 2}$

ii. $f(x) = \frac{\sqrt{x} - 1}{x^2 - 3x + 2}$

iii. $f(x) = (x+1)^{\frac{3}{2}}$

iv. $f(x) = \frac{\sqrt[3]{5-|x|}}{\ln x}$

7. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

i. $f(x) = \begin{cases} x^2 + x, & x \neq 1 \\ 3, & x = 1 \end{cases}$

ii. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + x}, & x \geq 1 \\ \sqrt{x^2 + 1}, & x \leq -3 \end{cases}$

iii. $f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \leq -2 \\ f_2(x), & -1 < x \leq 2 \\ f_2(x), & x \geq 3 \end{cases}$

8. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

i. $f(x) = \ln(\sqrt{x^2 + 1} - x)$

ii. $g(x) = \ln(\sqrt{x^2 + 1} + x)$

Γραφική παράσταση-Σχετική θέση συναρτήσεων

9. Να βρείτε τα κοινά σημεία του άξονα $x'x$ και της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f , όταν:

i. $f(x) = x^2 - 6x + 8$

ii. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$

iii. $f(x) = \ln^2 x - 5\ln x + 6$

iv. $f(x) = e^{2x} + e^x - 2$

v. $f(x) = \eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x - 1$.

10. Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των C_f και C_g στις παρακάτω περιπτώσεις:

i. $f(x) = x^3$ και $g(x) = x^2 - x + 1$

ii. $f(x) = x^4 - 2x^2 + x + 3$ και $g(x) = 3x^2 + x - 1$.

11. Να βρείτε τη σχετική θέση των συναρτήσεων f και g στις παρακάτω περιπτώσεις:

i. $f(x) = x^2$ και $g(x) = 3x + 4$

ii. $f(x) = -3\sqrt{x} + 1$ και $g(x) = -x - 1$.

12. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(4 - 3e^x)$.

i. Να βρείτε τα κοινά σημεία της C_f με τον άξονα $x'x$.

ii. Να βρείτε τη σχετική θέση της C_f με τον άξονα $x'x$.

13. Να βρείτε τις τιμές του $\kappa \in \mathbb{R}$, ώστε η C_f να διέρχεται από το σημείο A , όταν:

i. $f(x) = x^2 + \kappa^2 x + 6$ και $A(2, 28)$

ii. $f(x) = x^3 + \kappa^2 x^2 + \kappa x + 4$ και $A(-1, -3)$.

14. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 3x + 6$ και η ευθεία $\varepsilon: 3x - 2y - 2 = 0$.

- i. Να βρείτε τα κοινά σημεία της C_f και της ε .
- ii. Να βρείτε τη σχετική θέση των C_f και της ε .
- 15.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \kappa \ln(x+1) + \lambda$ που τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $e^2 - 1$ και τον άξονα $y'y$ στο 2.
- i. Να βρείτε τις τιμές των κ και λ .
- ii. Να βρείτε το σημείο της C_f που έχει τεταγμένη 3.
- 16.** Αν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:
 $f(x) = x^4 - (a+1)x^2 + \beta x + 3$ και $g(x) = (a+2)x^2 + (2-\beta)x - 1$ τέμνονται πάνω στις ευθείες $x = 1$ και $x = -1$, να βρείτε:
- i. Τις τιμές των a και β
- ii. Τα άλλα κοινά σημεία των C_f και C_g .
- 17.** Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 4^x - 2^{x+1}$ και $g(x) = 2^{x+2} - 8$.
- i. Να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f και C_g
- ii. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η C_f είναι πάνω από τη C_g .
- 18.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (\lambda - 1)x^2 + (2\lambda + 1)x + \lambda + 5$ με $\lambda \in \mathbb{R} - \{1\}$.
- i. Να βρείτε τις τιμές του λ , ώστε η γραφική παράσταση της C_f :
- Να τέμνει τον άξονα $x'x$ σε δύο ακριβώς σημεία
 - Να εφάπτεται στον άξονα $x'x$.
- ii. Να αποδείξετε ότι όταν το λ διατρέχει το $\mathbb{R} - \{1\}$, τότε η C_f διέρχεται από ένα σταθερό σημείο.
- 19.** Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης:
 $f(x) = \lambda x^3 + (\lambda^2 + 3\lambda + 1)x^2 + (2\lambda^2 - \lambda + 2)x - 3\lambda^2 - 3\lambda - 2$ διέρχεται, καθώς το λ διατρέχει το $\mathbb{R}$, από δύο σταθερά σημεία.

Σύνολο τιμών συνάρτησης

- 20.** Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^3 + 2x^2 - x + 2$.
- i. Να βρείτε τις τιμές $f(0)$ και $f(2)$.

ii. Να αποδειχθεί ότι το $y = 4$ ανήκει στο σύνολο τιμών της f .

21. Να βρεθεί το σύνολο τιμών των συναρτήσεων.

i. $f(x) = \frac{x-2}{x-3}$

ii. $f(x) = \ln(x-2)$

iii. $f(x) = x^2 - 4x + 3$

Ισότητα και πράξεις συναρτήσεων

22. Να εξετάσετε σε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις ισχύει $f=g$.

i. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+3} + \sqrt{3}}, g(x) = \sqrt{x+3} - \sqrt{3}$

ii. $f(x) = \frac{x^2 + 3|x|}{x^2 - 9}, g(x) = \frac{|x|}{|x| - 3}$

23. Να εξετάσετε σε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις ισχύει $f=g$. Αν $f \neq g$, να προσδιορίσετε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο ισχύει $f(x) = g(x)$.

i. $f(x) = \ln x^6, g(x) = 6 \ln x$

ii. $f(x) = \frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x}}, g(x) = \sqrt{\frac{x-3}{x}}$

iii. $f(x) = x + 2, g(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 4}$

24. Να προσδιορίσετε τους $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{x+1}{x^2-3x}, g(x) = \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x-3}$ να είναι ίσες.

25. Έστω $f(x) = \frac{\lambda x^2 - 3x + 2}{x - \lambda}, g(x) = \frac{x^2 - \mu x + 2}{x - \lambda^2}$.

Να βρεθούν οι τιμές των $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, ώστε οι συναρτήσεις f, g να είναι ίσες.

26. Έστω $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$ και $g(x) = \ln x$, να βρεθούν οι συναρτήσεις $f+g, f-g, f \cdot g, \frac{f}{g}$ αν ορίζονται

27. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$ και $g(x) = \frac{x^2-4}{x-3}$

i. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των f και g .

ii. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f+g$;

iii. Να ορίσετε τις συναρτήσεις $\frac{f}{g}$ και $\frac{g}{f}$

iv. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ παίρνει θετικές τιμές

28. Έστω $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x, & x > 3 \\ x - 2, & x \leq -2 \end{cases}$ και $g(x) = \begin{cases} -x^2 + 9x - 2, & x > 1 \\ -6x + 5, & x < -3 \end{cases}$

i. Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων.

ii. Να βρεθούν οι συναρτήσεις $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$.

iii. Να λυθούν η εξίσωση $(f + g)(x) = 0$.

29. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα $(f^2 + g^2)(x) \leq 2(f + g)(x) - 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι $f = g$.

Σύνθεση συναρτήσεων

30. Έστω $f(x) = \sqrt{1-x}$ και $g(x) = \frac{1}{x+2}$. Να βρεθούν (αν ορίζονται) οι συναρτήσεις $f \circ g$, $g \circ f$.

31. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{1}{x}$ και $g(x) = \frac{x}{x-2}$.

Να βρεθούν (αν ορίζονται) οι συναρτήσεις $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$, $g \circ g$.

32. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = \begin{cases} x - 2, & x \leq 1 \\ x + 2, & x > 1 \end{cases} \quad \text{και} \quad g(x) = \begin{cases} 1 + x, & x \leq 0 \\ 1 - x, & x > 0 \end{cases}$$

Να ορίσετε τις $f \circ g$, $g \circ f$.

33. Έστω $(f \circ g)(x) = x^2 - 4x + 3$, $x \in \mathbb{R}$ και $g(x) = x + 2$, να βρεθεί ο τύπος της f .

34. Έστω $(f \circ g)(x) = |\sin x|$ και $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, να βρεθεί η g .

35. Έστω συνάρτηση $f: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $h(x) = f(\ln x + 2)$.

36. Έστω συνάρτηση $f: (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης h , όταν

- i. $h(x) = f(2x - 1)$ ii. $h(x) = f(x^2)$ iii. $h(x) = f(e^x)$

37. Έστω συνάρτηση $f : [0, 5) \rightarrow \mathbb{R}$. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης h , με

$$h(x) = f(x^2 - 4) + f(x + 1).$$

38. Να εκφράσετε την f ως σύνθεση δύο ή περισσότερων συναρτήσεων αν:

- i. $f(x) = \eta\mu(x^3 + 1)$ ii. $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu^2 4x + 3$
 iii. $f(x) = \ln(e^{4x} - 1)$ iv. $f(x) = \eta\mu^2(5x)$

39. Αν ισχύει $f(f(x)) = 2x - 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να υπολογιστεί το $f(1)$.

Εύρεση τύπου

40. Αν $f\left(\frac{1}{x}\right) = x^3 + \ln x + e^{\frac{1}{x}} + 2$, $x > 0$, να βρεθεί η συνάρτηση f .

41. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f(f(x)) = 3x + 4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- i. Να δείξετε ότι $f(3x + 4) = 3f(x) + 4$, $x \in \mathbb{R}$.
 ii. Να υπολογίσετε το $f(-2)$.

42. Να βρείτε τη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f\left(\frac{x}{e}\right) \leq \ln x \leq f(x) - 1$.

43. Αν για τη συνάρτηση f ισχύει $f(x) + 2f(1 - x) = x^2 + x$, $x \in \mathbb{R}$, να βρεθεί ο τύπος της f .

44. Αν για τη συνάρτηση f ισχύει $f(x - 3) - 2f(1 - x) = x^2 - 2x$, $x \in \mathbb{R}$, να βρεθεί ο τύπος της f .

45. Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f(x - 2) - 2f(4 - x) = -x^2 + 12x - 26$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- i. Να αποδείξετε ότι $f(x) - 2f(2 - x) = -x^2 + 8x - 6$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
 ii. Να βρείτε τον τύπο της f .

46. Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f(x) + f^3(x) = 2e^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- i. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x) > 0$.

ii. Να υπολογίσετε το $f(0)$.

iii. Να δείξετε ότι $f(x) \leq \sqrt{e^x}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

47. Δίνονται οι συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα $(f^2 + g^2)(x) \leq (f + g)(x) - 2$ για την οποία ισχύουν:

- $f(x) > x, x \in \mathbb{R}$
- $f^2(x) = 1 + 2xf(x), x \in \mathbb{R}.$

Να βρείτε τον τύπο της f .

Άρτια-περιττή συνάρτηση

48. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ να ισχύει

$f(x + y) = f(x) + f(y)$. Να δείξετε ότι:

i. $f(0) = 0$

ii. Η f είναι περιττή.

49. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ να ισχύει

$f(x + y) - f(x - y) = f(x) \cdot f(y)$. Να δείξετε ότι:

i. $f(0) = 0$

ii. Η f είναι άρτια.

50. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να ισχύει

$xf(x) + xf(-x) + 2x + 2f(-x) = 0$. Να δείξετε ότι f είναι περιττή.

51. Δίνεται η περιττή συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f(x) \leq \frac{x^3}{x^2 + 1}$, για κάθε

$x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f .

52. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \ln(\sqrt{x^2 + 1} - x)$ είναι περιττή.

53. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να ισχύει $\frac{1 - f(x)}{1 + f(x)} = e^{-x}$.

Να δείξετε ότι f είναι περιττή.

