

Μονοτονία συνάρτησης

1. Να μελετήσετε τις παρακάτω συναρτήσεις ως προς τη μονοτονία τους.

i. $f(x) = 3x + 2$

ii. $f(x) = -4x - 3$

iii. $f(x) = -2\ln x + 3$

iv. $f(x) = 3e^{x-1} + 1$

v. $f(x) = \sqrt{3x-6} - 2$

2. Να μελετήσετε τις παρακάτω συναρτήσεις ως προς τη μονοτονία τους.

i. $f(x) = e^{x-2} + 3x - 1$

ii. $f(x) = 3x^3 + 2x - 5$

iii. $f(x) = \frac{-3}{x-1}$

iv. $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0 \\ x+4, & x > 0 \end{cases}$

3. Έστω $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, δύο γνησίως μονότονες συναρτήσεις. Να αποδειχθεί ότι:

i. Αν οι f, g έχουν το ίδιο είδος μονοτονίας, τότε η $g \circ f$ είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση.

ii. Αν οι f, g έχουν διαφορετικό είδος μονοτονίας, τότε η $g \circ f$ είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση.

4. Δίνεται συνάρτηση $f(x) = x^2 + 4x + 3$.

i. Να μελετήσετε την παραπάνω συνάρτηση ως προς τη μονοτονία.

ii. Να κάνετε τη γραφική παράσταση της f .

5. Δίνεται συνάρτηση $f(x) = 3 - |x - 1|$.

i. Να μελετήσετε την παραπάνω συνάρτηση ως προς τη μονοτονία.

ii. Να κάνετε τη γραφική παράσταση της f .

6. Δίνεται η περιττή συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $e^x - e^{-x} \leq 2f(x)$, $x \in \mathbb{R}$

i. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης.

ii. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα.

7. Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f^3(x) + 2f(x) = 2x - 3, x \in \mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

8. Αν για τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει $2f^3(x) + 2e^{f(x)} = 3x - 2, x \in \mathbb{R}$, τότε να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

Επίλυση ανισώσεων

9. Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που είναι γνησίως μονότονη με $f(2020) < f(2018)$.

i. Να βρεθεί το είδος μονοτονίας της f .

ii. Να λυθεί η ανίσωση $f(-3x + 2) \leq f(-x^2)$.

10. Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που είναι γνησίως μονότονη της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(1,5)$ και $B(-2,7)$.

i. Να βρεθεί το είδος μονοτονίας της f .

ii. Να λυθεί η ανίσωση $f(f(|x| - 4) - 6) - 5 \leq 0$.

11. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^{2019} + x^{2017} + 1$.

i. Να αποδειχθεί ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

ii. Να λυθεί η ανίσωση $x^{2019} + x^{2017} - 2 > 0$.

iii. Να λυθεί η ανίσωση $f(f(x)) < 3$.

12. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = a^x - \ln x, a \in (0,1)$.

i. Να μελετήσετε τη μονοτονία της f .

ii. Να λυθεί η ανίσωση $a^{x^2+2x+7} - a^{x^2+9} < \ln(x^2 + 2x + 7) - \ln(x^2 + 9)$.

13. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x} - \sqrt{x}$.

i. Να μελετήσετε τη μονοτονία της f .

ii. Να λυθεί η ανίσωση $\frac{1}{2x^2 + 3} - \frac{1}{x^2 + 2x + 6} > \sqrt{2x^2 + 3} - \sqrt{x^2 + 2x + 6}$.

14. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 8e^{2-x} - 2x$.

i. Να μελετήσετε τη μονοτονία της f .

ii. Να λυθεί η ανίσωση $f(x) < 4$.

iii. Να λυθεί η ανίσωση $8(e^{2-x^2} - e^{2-x}) > -2x(1-x)$.

15. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x - 1, x \in \mathbb{R}$.

i. Να μελετήσετε τη μονοτονία της f .

ii. Να λυθεί η ανίσωση $3^x + 4^x > 5^x$.

16. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $2f^5(x) + f(x) = 3x, x \in \mathbb{R}$

i. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

ii. Να λυθεί η ανίσωση $f(x^2 + x - 1) < 1$.

17. Να λυθούν οι ανισώσεις.

i. $\ln x > 1 - x$

ii. $e^{1-x} < 1 + \ln x$

iii. $5x^3 + \ln x < \frac{2}{x} + 3$

iv. $e^x > \frac{1-x}{1+x}$.

18. Να λυθούν οι ανισώσεις.

i. $\sqrt{x^2 + 2} - \sqrt{3x} > \ln \frac{3x}{x^2 + 2}$

ii. $(x-2)(x+1) < e^x - e^{x^2-2}$

iii. $3(x^2 - x) > (x+1)^3 - (x^2 + 1)^3$

19. Δίνεται συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$.

i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = f(x+1) - f(x)$, είναι γνησίως φθίνουσα.

ii. Να λύσετε την ανίσωση $f(x^2 + 2) + f(x + 3) > f(x^2 + 1) + f(x + 4)$.

20. Δίνεται η γνησίως φθίνουσα συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i. $f(x^2) + f(-x) > f(-x^2) + f(x)$

ii. $f(2x^2 + 1) - f(x^2 + 2) < \ln \frac{2x^2 + 1}{x^2 + 2}$

21. Δίνεται συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ γνησίως αύξουσα. Να λυθεί η ανίσωση:

$$f(x^4 + 1) - f(2) \leq f\left(\frac{1}{x^4 + 1}\right) - f\left(\frac{1}{2}\right).$$

Επίλυση εξισώσεων

22. Να λυθούν οι εξισώσεις:

- i. $e^x + 3x = 1$
- ii. $x + 5\ln x = 1$
- iii. $e^{3-x} - 1 = 4\ln(x - 2)$
- iv. $3^x + 4^x = 5^x$

23. Να λυθούν οι εξισώσεις:

- i. $(x^3 + x^2)^3 - (x + 1)^3 = 2(x + 1 - x^3 - x^2)$
- ii. $(x - 1)^2 = \ln \frac{1 + e^{2x}}{1 + e^{x^2}}.$

24. Δίνεται συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ γνησίως αύξουσα. Να λυθεί η εξίσωση:

$$f(\sqrt{x}) + f(x^2) = f(x^3) + f(x)$$

25. Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ γνησίως φθίνουσα με την ιδιότητα $f(2 - x) + f(x + 4) = 0$.

- i. Να λυθεί η ανίσωση $f(x^2 - 6x + 8) < 0$.
- ii. Να λυθεί η εξίσωση $f(x) = 0$.

Απόδειξη ανισώσεων

26. Να αποδείξετε τις παρακάτω ανισώσεις.

- i. $e^x \geq 1 - x$, για $x \geq 0$
- ii. $\ln x > -x + e + 1$, για $x > e$.

27. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x} - \ln x$

- i. Να βρείτε τη μονοτονία της f .
- ii. Για κάθε $x > 0$ και $x \neq 1$, να αποδείξετε ότι: $\frac{1}{x^2 + 1} - \frac{1}{2x} < \ln(x^2 + 1) - \ln(2x)$.

28. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$.

i. Να βρείτε τη μονοτονία της f .

ii. Για κάθε $x \geq 0$, να αποδείξετε ότι: $2\sqrt{x+1} > \sqrt{x} + \sqrt{x+2}$.

29. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 8x$.

i. Να βρείτε τη μονοτονία της f .

ii. Για κάθε $x > 1$, να αποδείξετε ότι: $f(x^3) + f(2^x) > f(x^2) + f(2)$.

iii. Για κάθε $x < 0$, να αποδείξετε ότι: $f(5^x) + f(3^x) < f(4^x) + f(2^x)$.

30. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{3}{x} - 2\ln x$.

i. Να βρείτε τη μονοτονία της f .

ii. Να αποδείξετε ότι: $f(e) + f(\pi) > f(e+2) + f(\pi+1)$.

31. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x - 1 + \ln x$.

i. Να βρείτε τη μονοτονία της f .

ii. Να βρείτε το πρόσημο της f για τις διάφορες τιμές του x , όταν $x > 0$.

iii. Αν $0 < x_1 < x_2$, να αποδείξετε ότι: $f\left(\frac{x_1}{x_2}\right) \cdot f\left(\frac{x_2}{x_1}\right) < 0$.

Ακρότατα

32. Να βρεθούν τα ακρότατα των συναρτήσεων:

i. $f(x) = 2(x-3)^2 + 1$

ii. $f(x) = 4 - 3|x-2|$

iii. $f(x) = 1 - 4\sqrt{x+1}$

iv. $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$

v. $f(x) = x^2 + 6|x| + 1$

vi. $f(x) = \ln(x^2 - 4x + 5)$.

vii. $f(x) = 3 - \frac{1}{2 + \sqrt{x-2}}$

33. Να βρεθούν τα ακρότατα των συναρτήσεων:

i. $f(x) = 1 - 2\ln(x - 1), x \in [3, 5)$

ii. $f(x) = 3x - 4, x \in (-2, 5]$

34. Δίνεται η περιττή συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $M(3, -1)$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \frac{2f(x)}{1 + f^2(x)}$, έχει ελάχιστο το -1 και μέγιστο το 1.

35. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που διέρχεται από τα σημεία $M(1, -2)$ και $N(4, 3)$ και για την οποία ισχύει $f^2(x) - f(x) - 6 \leq 0, x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

i. Η f παρουσιάζει ελάχιστο και μέγιστο στο $\mathbb{R}$

ii. Ισχύει $|f(x_1) - f(x_2)| \leq 5$, για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

36. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 4}$.

i. Να δείξετε ότι: $-1 \leq f(x) \leq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

ii. Να εξετάσετε αν οι αριθμοί -1 και 1 είναι η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή αντίστοιχα.

iii. Να δείξετε ότι για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $|f(x_1) - f(x_2)| < 2$.

37. Να λυθεί η εξίσωση: $\ln[(x-1)^2 + 1] + 1 = \frac{1}{|x-1|^2 + 1}$.

Συνάρτηση 1-1

38. Να αποδειχθεί ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι αντιστρέψιμες.

i. $f(x) = 3x + 2$

ii. $f(x) = -4x^3 - 3$

iii. $f(x) = -2\ln x + 3$

iv. $f(x) = 3e^{x-1} + 1$

v. $f(x) = \sqrt{3x-6} - 2$

vi. $f(x) = \frac{3-x}{x+2}$

vii. $f(x) = 3\ln x + 4x + e^{x-2} - 2$

39. Έστω $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, δύο συναρτήσεις με την $g \circ f$ να είναι συνάρτηση 1-1. Δείξτε ότι και η f είναι 1-1.

40. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τη οποία ισχύει $f(f(x)) = -x$, $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι:

i. Η f είναι περιττή.

ii. Η f είναι 1-1.

41. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τη οποία ισχύει $f(f(x)) - f(x) = x - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

Να δείξετε ότι:

i. Η f είναι 1-1.

ii. Να βρείτε το $f(1)$.

42. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $2f(f(x)) = 2f(x) + 3x^3$, $x \in \mathbb{R}$, να αποδειχθεί ότι:

i. Η f αντιστρέφεται

ii. Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

43. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση για την οποία ισχύει $f(x) + 3x^3 + e^{f(x)} = 0$, $x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι:

i. η f είναι 1-1

ii. η f δεν μπορεί να είναι γνησίως αύξουσα.

44. Έστω $f: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση για την οποία ισχύει $f(f(x)) = 2x^2 - 4x + 2$. Δείξτε ότι:

η f είναι 1-1.

45. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση για την οποία ισχύει $6f(x^2) - f^2(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι η f

δεν είναι 1-1.

46. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση για την οποία ισχύει $f^2(x) \leq f(x) \cdot f(5-x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Δείξτε ότι η f δεν είναι 1-1.

47. Έστω οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(f(x)) = x^2 - 5x + 9$ και

$g(x) = x^2 - xf(x) + 3$, $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι $f(3) = 3$ και ότι η g δεν είναι 1-1.

48. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση για την οποία ισχύει $f(f(x)) = x$, $x \in \mathbb{R}$ και η συνάρτηση

$g(x) = e^x + e^{f(x)}$, $x \in \mathbb{R}$ που είναι 1-1.

i. Να δείξετε ότι η f είναι 1-1

ii. Να δείξετε ότι $g(f(x)) = g(x)$

iii. Να βρείτε τη συνάρτηση f .

Επίλυση εξίσωσης

49. Να λυθούν οι εξισώσεις.

i. $\ln(x-1) = 2-x$

ii. $e^x = 1-x^7$

iii. $3^x = 5-2x$

iv. $e^x + 2 = \sqrt{8 + \sqrt{1-x}}$.

50. Δίνεται συνάρτηση $f(x) = x^2 + \ln x$.

i. Να δείξετε ότι η f είναι 1-1.

ii. Να λύσετε την εξίσωση $(2x-3)^2 - (x+6)^2 + 2(|2x-3| - |x+6|) = \ln \frac{|x+6|+1}{|2x-3|+1}$.

51. Δίνεται συνάρτηση $f(x) = x^5 + 2e^x$.

i. Να δείξετε ότι η f είναι 1-1.

ii. Να λύσετε την εξίσωση $2(e^{x^3-1} - e^{4x-1}) = (4x-1)^5 - (x^3-1)^5$.

52. Δίνεται συνάρτηση $f(x) = x^3 + x$.

i. Να δείξετε ότι η f είναι 1-1.

ii. Να λύσετε την εξίσωση $(e^x + \sqrt{x})^3 + e^x = (\sqrt{x} + 1)^3 + 1$.

53. Δίνεται συνάρτηση $f(x) = 2x + \ln(x^2 + 1), x > 0$.

i. Να δείξετε ότι η f είναι 1-1.

ii. Να λύσετε την εξίσωση $2(x^2 - 3x + 2) = \ln \frac{(3x-2)^2 + 1}{(x^4 + 1)}, x \geq 2$.

54. Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει ότι:

$$\ln(\lambda^2 + 1) - \ln(2\lambda - 4) = (2\lambda - 4)^2 - (\lambda^2 + 1)^2$$

55. Αν $x + e^x = y + e^y, x, y \in \mathbb{R}$

i. Να δείξετε ότι $x = y$.

ii. Να λύσετε την εξίσωση $x^2 - 3x + 2 = e^{3x} - e^{x^2+2}$.

56. Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι: $f(f(x)) + f^3(x) = 6x + 4, x \in \mathbb{R}.$

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1.

ii. Να λύσετε την εξίσωση: $f(2x^3 + x) = f(4 - x), x \in \mathbb{R}.$

57. Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι: $f(f(x)) - f(x) = 2x - 4, x \in \mathbb{R}.$

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1.

ii. Να δείξετε ότι $f(2) = 2.$

iii. Να λύσετε την εξίσωση $f(f(f(3)) - f(x^2 + 2x)) - 2 = 0. \quad \#\#\#$

58. Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που είναι 1-1, για την οποία ισχύει ότι:

$f(x) \cdot (1 - x) = f(ax + \beta), x \in \mathbb{R}.$ Να αποδείξετε ότι $a = 0.$

59. Αν για τη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει $e^{f(x)} - e^{-f(x)} = x - \frac{1}{x},$ για κάθε $x > 0$ τότε να

βρείτε τον τύπο της $f.$

60. Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ που είναι 1-1, για την οποία ισχύει ότι:

$f(f(x)) \cdot f(x) = 2, x \neq 0$

i. Να δείξετε ότι $f(f(x)) = x, x \neq 0$

ii. Να βρείτε τον τύπο της $f.$

61. Αν για τη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 0, x > 0$ και για την

συνάρτηση $g(x) = f(h(x)),$ με $h(x) = \frac{1-x}{1+x},$ τότε:

i. Να δείξετε ότι η g είναι περιττή.

ii. Να αποδείξετε ότι η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-1, 1).$

iii. Να λύσετε την εξίσωση $h(e^x) + h(e^{2x}) = h(e^{11x}) + h(e^{111x}), x \in (-1, 1).$

Εύρεση αντίστροφης συνάρτησης

62. Δίνεται συνάρτηση $f(x) = e^{x-2} - 1$.

- i. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.
- ii. Να βρεθεί η αντίστροφή της.

63. Δίνεται συνάρτηση $f(x) = 2e^{3x-1} + 2$.

- i. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.
- ii. Να βρεθεί η αντίστροφή της.

64. Δίνεται συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$.

- i. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.
- ii. Να βρεθεί η αντίστροφή της.

65. Δίνεται συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x-3} - 2$.

- i. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.
- ii. Να βρεθεί η αντίστροφή της.

66. Δίνεται συνάρτηση $f(x) = \ln \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$.

- i. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.
- ii. Να βρεθεί η αντίστροφή της.

67. Δίνεται συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \ln x - 2, & x \in (0, 1) \\ \sqrt{x-1}, & x \geq 1 \end{cases}$.

68. Δίνεται συνάρτηση $f: (-\infty, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2 - 8x + 10$

- i. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.
- ii. Να βρεθεί η αντίστροφή της.
- iii. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της αντίστροφης με τους άξονες.

69. Δίνεται συνάρτηση $f(x) = \frac{a - e^x}{e^x + 1}$, $a \in \mathbb{R}$ η οποία διέρχεται από το σημείο $M\left(\ln 3, -\frac{1}{2}\right)$.

- i. Να βρεθεί η τιμή του a .
- ii. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.
- iii. Να βρεθεί η αντίστροφή της.
- iv. Να αποδείξετε ότι η f^{-1} είναι περιττή.

70. Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι:

$$f^3(x) + 2f(x) - x = 0, \quad x \in \mathbb{R}. \text{ Να αποδείξετε ότι η } f \text{ αντιστρέφεται και να βρείτε την } f^{-1}.$$

71. Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ γνησίως μονότονη. Να αποδείξετε ότι οι f και f^{-1} έχουν το ίδιο είδος μονοτονίας.

72. Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ και ικανοποιεί τη σχέση

$$f(f(x)) - 3f(x) = x - 4, \quad x \in \mathbb{R}.$$

i. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

ii. Να βρείτε τον τύπο της αντίστροφης σε συνάρτηση με τον τύπο της f .

73. Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ και ικανοποιεί τη σχέση:

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}.$$

i. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

ii. Να αποδείξετε ότι η f είναι περιττή.

iii. Αν η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα την $x = 0$, τότε να δείξετε ότι:

a. Η f είναι αντιστρέψιμη.

b. Ισχύει $f^{-1}(x+y) = f^{-1}(x) + f^{-1}(y)$.

Επίλυση εξίσωσης-ανίσωσης

74. Δίνεται συνάρτηση $f(x) = x^3 + x + 2$.

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

ii. Να λυθεί η εξίσωση $f^{-1}(x) = 1$

iii. Να λυθεί η εξίσωση $f^{-1}(x) = x - 1$

iv. Να λυθεί η εξίσωση $f^{-1}(x) \geq x - 1$

75. Δίνεται η γνησίως μονότονη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(3, 4)$ και $B(6, -2)$.

i. Να βρεθεί το είδος μονοτονίας της f και να αποδείξετε ότι είναι αντιστρέψιμη.

ii. Να λύσετε την εξίσωση $f(-3 + f^{-1}(|x| - 5)) = 4$.

iii. Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(f(x^2 + 2) + 6) < 3$.

76. Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ή οποία έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ και ικανοποιεί τη σχέση $f^3(x) + 2f(x) + x = 0, x \in \mathbb{R}$.

- i. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται
- ii. Να βρεθεί η αντίστροφή της.
- iii. Να λύσετε την εξίσωση $f(-9x + 15) = x - 1$

77. Έστω συνάρτηση για την οποία ισχύει $f(f(x)) = x^2 - x + 1, x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι:

- i. $f(1) = 1$
- ii. Η συνάρτηση $g(x) = x^2 - xf(x) + 1$, δεν αντιστρέφεται.

78. Δίνεται συνάρτηση $f : (-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \sqrt{x^2 + a} + \beta, a > 0$. Αν η ελάχιστη τιμή της f είναι το 4 και $f(-4) = 6$, τότε:

- i. Να δείξετε ότι $a = 9$ και $\beta = 1$.
- ii. Να μελετήσετε τη μονοτονία της f .
- iii. Αφού δείξετε ότι η f αντιστρέφεται, να ορίσετε την f^{-1} .
- iv. Να ορίσετε τη συνάρτηση $g(x) = f(-\sqrt{\ln x})$.
- v. Να λύσετε την εξίσωση $f(\eta\mu x - 1) = \sqrt{10} + 1$.

79. Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ που ικανοποιεί τη σχέση: $f(x) - f(y) = f\left(\frac{x}{y}\right)$ για κάθε

$x, y \neq 0$. Αν η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα, τότε:

- i. Να αποδείξετε ότι ορίζεται η f^{-1} .
- ii. Να λυθεί η εξίσωση $f(x) + f(x^2 + 3) = f(x^2 + 1) + f(x + 1)$.
- iii. Αν επιπλέον ισχύει ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x > 0$, να αποδειχθεί ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

Κοινά σημεία και σχετική θέση.

80. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x + x - \frac{e}{x}$.

- i. Να αποδειχθεί ότι ορίζεται η f^{-1} .

ii. Να λυθεί η εξίσωση $f^{-1}(x) = x$.

81. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^{31} + 4x + 4$.

i. Να αποδειχθεί ότι ορίζεται η f^{-1} και να βρεθεί η τιμή $f^{-1}(9)$.

ii. Να βρεθούν τα κοινά σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}$.

82. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ή οποία έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ και ικανοποιεί τη σχέση

$$2f^3(x) + f(x) - x = 16, x \in \mathbb{R}.$$

i. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

ii. Να βρεθεί η αντίστροφη της.

iii. Να βρείτε την εξίσωση $f(-9x + 15) = x - 1$.

83. Να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}$, αν $f(x) = \sqrt{1-x}, x \in [-1, 0]$.