

**Εισαγωγή στο όριο**

1. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 1 \\ 3, & x = 1 \\ 2 - x, & x > 1 \end{cases}$ ,

i. Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της  $f$ .

ii. Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ .

2. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \in (-1, 1) \\ \frac{1}{x}, & x \leq -1 \text{ ή } x \geq 1 \end{cases}$ ,

i. Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της  $f$ .

ii. Να βρείτε τα  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ .

**Ιδιότητες ορίου**

3. Αν  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$ , να βρείτε τα όρια:

i.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^2(x) - f(x) - 2}{f(x) - 2}$

ii.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3f(x) - 2\sqrt{f^2(x) + 5}}{f^2(x) - 2f(x)}$

iii.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|f^3(x) - f(x) - 1| - |f(x) - 3| - 4}{f(x) - 2}$ .

4. Αν  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1$  και  $f(x) \neq 1$  κοντά στο  $x_0 = 2$ , να βρείτε τα όρια:

i.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f^2(x) + 5f(x) - 6}{f^2(x) + 2f(x) - 3}$

ii.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{f^2(x) + 3} - 2}{f(x) - 1}$

iii.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|f^2(x) - 4| + |3 - f(x) - 4| - 5}{f^2(x) - 1}$

iv.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{f^2(x) + 8} + \sqrt{f(x)} - 4f(x)}{f(x) - 1}.$

5. Αν  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -2$ , να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|f^3(x) - 3f(x) - 1| - |f(x) + 5|}{f(x) + 2}.$

**Όρια της μορφής  $\left(\frac{0}{0}\right)$  σε ρητές συναρτήσεις**

6. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

i.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

ii.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2}$

iii.  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{x^2 - \frac{1}{9}}{x - \frac{1}{3}}$

iv.  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{9 - x^2}{x + 3}.$

7. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

i.  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 5x + 4}{x - 4}$

ii.  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 2}{x + 1}$

iii.  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + x - 1}{x + 1}$

iv.  $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{x^2 - 7x + 6}{x^2 - 4x - 12}$

v.  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + 6x + 8}.$

8. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

i.  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{2}{x^2 - 1} - \frac{1}{x - 1} \right)$

ii.  $\lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{4}{x^2 - 4} - \frac{x-1}{x^2 - 3x + 2} \right)$

iii.  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right)$

iv.  $\lim_{x \rightarrow 1} \left[ \frac{x+2}{x^2 - 5x + 4} + \frac{x-4}{3(x^2 - 3x + 2)} \right]$

v.  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{2x-11}{2x^2 + 2x - 4} + \frac{x+2}{x^2 - 1} \right).$

**Όρια της μορφής  $\left( \frac{0}{0} \right)$  σε άρρητες συναρτήσεις**

**9.** Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

i.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x^2 - 1}$

ii.  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x^2 + 3} + 2x}{x + 1}$

iii.  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x^2 + x + 4} + x - 1}{x^2 + 3x + 2}$

iv.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 + 5} - x - 1}{\sqrt{x+2} - x}.$

**10.** Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

i.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x-1} - \sqrt{x^2 + x - 2}}{\sqrt{x^2 - 1}}$

ii.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x-1} - \sqrt{2x^2 - x - 1}}{\sqrt{x^3 - 1}}$

iii.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x-2} - 2x + 1}{x^4 - 1}$

iv.  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x^2 + 3} - 2}{\sqrt{x+2} - \sqrt{2x+3}}.$

**11.** Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

i.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 7x + 6}{x\sqrt{x} - 7\sqrt{x} + 6}$

ii.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x\sqrt{x} + \sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} - 1}$

iii.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sqrt{x}}{x^2 + \sqrt{x}}$ .

**12.** Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

i.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt[3]{x}}{x - 1}$

ii.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} - 2}{x - 1}$

iii.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x-1} - x + 1}{1 - \sqrt[3]{x-1}}$ .

**13.** Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

i.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + 3x + 5} + x - 4}{\sqrt[3]{x} - x}$

ii.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{x^2 + x + 2} + \sqrt{x^2 + 3x + 6} - x^2 + x - 4}{x^2 - 3x + 2}$

iii.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x+3} - 3}{\sqrt{x^2 + 3} + \sqrt{x} - 3}$

iv.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x} - 2}{\sqrt{x+3} + \sqrt[3]{x} - 3}$ .

**14.** Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

i.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 + 5} + \sqrt{x^2 + 6x} - 5x + 3}{x - 2}$

ii.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 + x + 3} - \sqrt[3]{x^2 + x + 2} - 1}{x^2 - 4}$

iii.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + 3x + 5} - \sqrt[3]{x} - x - 1}{x^2 - 5x + 4}$

iv.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 + x^2 + x - \sqrt{x^2 + 2x + 6}}{x^2 - 1}$ .

**Συναρτήσεις πολλαπλού τύπου**

**15.** Να βρείτε, αν υπάρχει, το όριο  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  στις παρακάτω περιπτώσεις:

$$\text{i. } f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + 1, & x \leq 1 \\ 2x - 5, & x > 1 \end{cases} \quad x_0 = 1$$

$$\text{ii. } f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} + 2, & x < 1 \\ x^2 + x + 1, & x \geq 1 \end{cases} \quad x_0 = 1$$

$$\text{iii. } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1}, & x < 1 \\ \frac{x^3 - 1}{x - 1} - 1, & x > 1 \end{cases} \quad x_0 = 1$$

$$\text{iv. } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3}{x^2 - 1} + \frac{1}{x - 1}, & x < 1 \\ \frac{3\sqrt{x^2 + 3} - 6}{x - 1}, & x > 1 \end{cases} \quad x_0 = 1$$

**16.** Να βρείτε τις τιμές των παραμέτρων  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  για τις οποίες υπάρχει το όριο  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$

στις παρακάτω περιπτώσεις:

$$\text{i. } f(x) = \begin{cases} \alpha^2 x^4 + 1, & x \leq -1 \\ 2\alpha x^3 + \beta^2 x, & x > -1 \end{cases} \quad x_0 = -1$$

$$\text{ii. } f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 1}{x - 1}, & x < 1 \\ x^2 + \alpha^2 x - 2, & x \geq 1 \end{cases} \quad x_0 = 1.$$

**17.** Να βρείτε τις τιμές των παραμέτρων  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  στις παρακάτω περιπτώσεις:

$$\text{i. } f(x) = \begin{cases} x^3 + (\alpha + 1)x + \beta, & x \leq -1 \\ x^2 + 3\beta x - 4\alpha + 4\beta, & x > -1 \end{cases} \quad \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -4$$

$$\text{ii. } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} + 2\alpha x + \beta, & x < 1 \\ \alpha\sqrt{x} + \beta x^2 + \beta x + 2, & x \geq 1 \end{cases} \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 7.$$

$$\text{18. Δίνεται η συνάρτηση } f(x) = \begin{cases} 3x - \alpha, & x \leq -1 \\ x^2 - \alpha x + \beta, & -1 < x < 1 \\ x^3 - \alpha x^2 + \gamma, & x \geq 1 \end{cases}$$

Να βρείτε τις τιμές των παραμέτρων  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$  για τις οποίες υπάρχει το όριο  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$  και ισχύει  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$ .

**19.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + \alpha x + \beta, & x \leq -1 \\ 3x + 1, & -1 < x < 2 \\ x^2 - \beta x + \alpha - 2, & x \geq 2 \end{cases}$

Να βρείτε τις τιμές των παραμέτρων  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  για τις οποίες υπάρχουν τα όρια  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$  και ισχύει  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ .

**20.** Για μια συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ισχύει:  $xf(x) - 2f(x) \leq x^2 + 3x - 10, x \in \mathbb{R}$ . Αν το  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ .

**Συναρτήσεις με απόλυτα της μορφής  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$**

**21.** Να βρείτε τα παρακάτω όρια:

i.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x-1| - |x-3|}{x^2 - 4}$

ii.  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{|x^3 - 3x - 1| + x}{|x^3 + 5x + 4| - 2}$

iii.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x+2| + |x^2 - 3| - 5}{|x| - 1}$

iv.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x-3| + |x-2| - 1 - 2x^2}{x^2 - 3x + 2}$ .

**22.** Να βρείτε τα παρακάτω όρια:

i.  $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{|x+1| + x^2 - x - 2}{x^3 + 1}$

ii.  $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x^2 - 4| + x^2 - 4x + 4}{x^3 - 8}$

iii.  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{|x^2 - 9| + |x - 3|}{|x + 2| - 5}$

iv.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x-1| + x^2 - 2x + 1}{x^5 - 1}.$

**23.** Να βρείτε τα παρακάτω όρια:

i.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 3|x|}{|x|}$

ii.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3|x| + 2}{x^4 - 16}$

iii.  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{|x^2 - x - 12| + |x^2 - 9|}{|x^2 + 8x + 15| + |x + 3|}.$

**24.** α βρείτε τα παρακάτω όρια:

i.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x-2| + |x^2 - 4| + x - 2}{x^2 + x - 6}$

ii.  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{|x^2 - 9| + |x - 3|}{|x + 2| - 5}$

iii.  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{|x^2 - 1| - x^2 + x + 2}{\sqrt{x+2} - 1}$

iv.  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{|x^2 - 2x - 3| + |x - 3|}{|x^2 - 4x + 3| + x^2 - 6x + 9}.$

**Κριτήριο παρεμβολής**

**25.** Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  στις παρακάτω περιπτώσεις:

i.  $x^2 - 3x + 1 \leq f(x) \leq x^3 - x^2 - x, \quad x_0 = 1$

ii.  $3x - x^2 - 1 \leq f(x) + 1 \leq x^2 + 3x - 1, \quad x_0 = 0$

iii.  $2 - |x - 1| \leq f(x) - 2x \leq x^2 - 2x + 3, \quad x_0 = 1.$

iv.  $|f(x) - 5x^2| \leq |x - 2|, \quad x_0 = 2.$

**26.** Για μια συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ισχύει:  $3x - 2 - x^2 \leq f(x) \leq x^2 - x$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

Να βρεθεί:

i.  $f(1)$

ii.  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

iii.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$

**27.** Για μια συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ισχύει:  $3x - x^2 \leq f(x) \leq x^2 + 3x$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

Να αποδείξετε ότι  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x^2 + x} = 3$ .

**28.** Για μια συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ισχύει:  $x^2 + 2x \leq f(x) \leq 2x^2 + 1$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 3}{x - 1}$ .

**29.** Για μια συνάρτηση ισχύει:  $6\sqrt{x} - 6 \leq f(x) \leq x + 3$ , για κάθε  $x \geq 0$ .

Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{f(x) - f(9)}{x - 9}$ .

**30.** Για μια συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ισχύει:  $|f(x) - x + 2| \leq x^2 - 2x + 1$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ .

**31.** Αν για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει:  $|f(x) - g(x)| \leq |x^2 g(x)|$  και  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 3$  να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ .

**32.** Δίνεται η συνάρτηση  $f$  για την οποία ισχύει  $\sqrt{3x+3} \leq (x-2)f(x) + 3 \leq 3\sqrt{x+7} - 6$  για κάθε  $x \in (1,3)$ . Να υπολογίσετε το  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ .

**33.** Αν για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει  $\eta\mu x - x^2 \leq f(x) \leq x + x^2$ , να βρείτε τα όρια:

i.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$

ii.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + 2x}{x + \eta\mu x}$ .

**34.** Για μια συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ισχύει:  $\frac{f^2(x) - 6f(x)}{x + 3} \leq x - 3$ , για κάθε  $x > -3$ .

Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

**35.** Για μια συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ισχύει:  $f^2(x) \leq 2\eta\mu x \cdot f(x), x \in \mathbb{R}$ . Να υπολογίσετε το  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ .

**36.** Για μια συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ισχύει:  $f^2(x) + 2 \leq \frac{1}{\sin^2 x} + 2f(x), x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ .

Να υπολογίσετε το  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ .

**37.** Έστω συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει  $xf(x) + \sin x \leq 1$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Αν  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \kappa \in \mathbb{R}$ , να βρείτε το  $\kappa$ .

**38.** Έστω συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει  $f^2(x) \leq 2xf(x)$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , να δείξετε ότι  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ .

**39.** Έστω συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει  $f^2(x) + \sin^2 x \leq 2xf(x)$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ .

**40.** Έστω οι συναρτήσεις  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για τις οποίες ισχύει  $f^2(x) + g^2(x) \leq \eta\mu^2 x$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Να δείξετε ότι  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$ .

**41.** Για μια συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ισχύει:  $f^5(x) + f(x) = x, x \in \mathbb{R}$ . Να υπολογίσετε το  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ .

**42.** Δίνονται οι συναρτήσεις  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για τις οποίες ισχύει  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - g(x)) = 0$  και  $f(x) < 0 < g(x)$  κοντά στο  $x_0$ . Να υπολογιστούν τα όρια  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  και  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ .

**43.** Δίνονται οι συναρτήσεις  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για τις οποίες ισχύει  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$  όταν  $x_0 > 0, f(x) > 0, g(x) > 0$ . Να αποδειχθεί ότι:

i.  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^2(x) + g^2(x)}{f(x) + g(x)} = 0$

ii.  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^3(x) + g^3(x)}{f(x) + g(x)} = 0$

**44.** Δίνεται συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει ότι:  $\lim_{x \rightarrow x_0} f^2(x) = 0$ .

Να αποδείξετε ότι:

i.  $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0$

ii.  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$

**45.** Έστω οι συναρτήσεις  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για τις οποίες ισχύει  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f^2(x) + g^2(x)) = 0$ .

Να δείξετε ότι:  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ .

**46.** Αν για τις συναρτήσεις  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ισχύει:  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f^2(x) + g^2(x) - 2f(x) + 4g(x)) = -5$ , να

βρείτε τα όρια  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  και  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$

**47.** Έστω οι συναρτήσεις  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για τις οποίες ισχύει  $\lim_{x \rightarrow 0} (f^2(x) + g^2(x)) = 0$ .

Να βρείτε τα όρια:

i.  $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) \cdot g(x))$

ii.  $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) - g(x))$

iii.  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

iv.  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$

**48.** Έστω συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει  $f^2(x) + f(x) + 2 = x$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ .

### **Αλλαγή μεταβλητής**

**49.** Έστω ότι  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \kappa$ , να δείξετε ότι:

i. Αν η  $f$  είναι άρτια, τότε  $\lim_{x \rightarrow -x_0} f(x) = \kappa$

ii. Αν η  $f$  είναι περιττή, τότε  $\lim_{x \rightarrow -x_0} f(x) = -\kappa$

**50.** Να υπολογίσετε τα όρια σε κάθε περίπτωση:

i. Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \kappa \in \mathbb{R}$ , να βρεθεί το  $\lim_{h \rightarrow 0} [f(x_0 + h) - f(x_0 - h)]$

ii. Αν  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \kappa \in \mathbb{R}$ , να βρεθεί το  $\lim_{x \rightarrow 0} [f(4x) - f(2x)]$ .

**51.** Δίνεται συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει:  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - 1}{h} = 3$ , να υπολογίσετε

το παρακάτω όριο  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h) - f(1-2h)}{h}$ .

**52.** Να υπολογίσετε τα όρια σε κάθε περίπτωση:

i. Αν  $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 1$ , να βρεθεί το  $\lim_{x \rightarrow 2} f(3x - 2)$

ii. Αν  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 3$ , να βρεθεί το  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(3x)}{x}$ .

**53.** Δίνεται συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

i. Αν  $\lim_{x \rightarrow 2} f(3x - 1) = 7$ , να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$

ii. Αν  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 2$ , να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(3x)}{x}$

**54. i.** Αν για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει  $f(x) = f(x + 3)$  και  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$ , να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 2$ .

ii. Αν  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = l$  και  $\lim_{x \rightarrow 1} (f(x) + 3f(2 - x)) = 0$ , να βρείτε το  $l$ .

**55.** Δίνεται η συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύουν:  $f(x + y) = f(x) + f(y)$  και

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$  για κάθε  $x, y \in \mathbb{R}$ . Να αποδείξετε ότι  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ .

**56.** Δίνεται η συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύουν:  $f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$  και

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$  για κάθε  $x, y \in \mathbb{R}$ . Να αποδείξετε ότι:

i.  $f(1) = 0$

ii.  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$  με  $x_0 \neq 0$ .

**57.** Δίνεται η συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει  $f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$ , για κάθε

$x, y \in \mathbb{R}$ . Αν  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 2021$ , να βρείτε το όριο  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$ .

**58.** Αν για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει  $f(x) = f(x + 3)$  και  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 1}{x - 1} = 2$ , να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - 1}{x - 4}$ .

**59.** Αν για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει  $f(x) = f(2 - x)$  και  $\lim_{x \rightarrow -1} [f(x) - 2x - 1] = 5$ , να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

**60.** Δίνεται η συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει  $\lim_{x \rightarrow 2} [f(x) + 3f(4-x)] = 4$ . Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ .

**61.** Έστω η συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις, να δείξετε ότι  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ .

i.  $f(x+y) = f(x) + f(y)$ , για κάθε  $x$  και  $y \in \mathbb{R}$  και  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

ii.  $f(xy) = f(x) + f(y)$ , για κάθε  $x$  και  $y \in \mathbb{R}$  και  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$ , ( $x_0 \neq 0$ ).

**Τριγωνομετρικά όρια**

**62.** Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

i.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 4x}{x}$

ii.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 2x}{\epsilon\phi 3x}$

iii.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma\upsilon\nu 4x - 1}{x}$

iv.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{\eta\mu 2x}$ .

**63.** Να βρείτε τα παρακάτω όρια:

i.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\eta\mu 2x - 3\eta\mu x}{x} \right)$

ii.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x \cdot \epsilon\phi x}{x^2}$

iii.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{x \sigma\upsilon\nu x} \right)$

iv.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{2}{\eta\mu^2 x} - \frac{1}{1 - \sigma\upsilon\nu x} \right)$ .

**64.** Για μια συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ισχύει:  $|x^2 f(x) - \eta\mu^2 x| \leq 2x^4$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

Να βρείτε τα όρια:

i.  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

ii.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x f(x) - \eta \mu 2x}{x + \eta \mu x}.$

**65.** Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

i.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\eta \mu(x-2)}{x^2 - 4}$

ii.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 \eta \mu(x-1)}{\sqrt{x} - 1}$

iii.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\eta \mu(x-1)}{\sqrt{x+3} - 2}.$

**66.** Να βρείτε τα παρακάτω όρια:

i.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( (x^4 + x^2) \eta \mu \frac{2}{x} \right)$

ii.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( |x| \eta \mu \frac{1}{x} \right)$

iii.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \sqrt{x^2 + x} \cdot \sigma \upsilon \nu \frac{1}{x} \right).$

**67.** Να βρείτε τα παρακάτω όρια:

i.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( x^3 + x \sigma \upsilon \nu \frac{2}{x} \right)$

ii.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x^2}{\epsilon \phi x} \cdot \sigma \upsilon \nu \frac{2}{x} \right)$

iii.  $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1) \cdot \eta \mu \frac{x}{x-1}$

**68.** Να βρείτε τα παρακάτω όρια:

i.  $\lim_{x \rightarrow 0} \eta \mu x \cdot \sigma \upsilon \nu \frac{1}{x}$

ii.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^3 + 1} - 1}{x^2} \cdot \eta \mu \frac{x^2 + 1}{x}$

iii.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - x} \cdot \eta\mu \frac{3x}{x-1}$

iv.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x^2}{\eta\mu x} \cdot \eta\mu \frac{x-1}{x} \right)$

69. Για μια συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ισχύει:  $\left| f(x) - x^2 \sin \frac{1}{x} \right| \leq x^2 \eta\mu^4 \frac{1}{x}$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}^*$ , να αποδείξετε ότι  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ .

**Εύρεση παραμέτρων**

70. Να βρείτε τους  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  στις παρακάτω περιπτώσεις:

i.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\alpha x^2 + \beta}{x-1} = 4$

ii.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\alpha x + \beta \sqrt{x} - 2}{x-1} = -2$ .

iii.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + \alpha x + \beta}{x^2 - 1} = 2$

71. Να βρείτε τους  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  στις παρακάτω περιπτώσεις:

i.  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\alpha x^2 + \beta x - 6}{x^2 - 1} = 4$

ii.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\alpha |1 - x^2| + \beta |9 - x^2| - 3x - 7}{x^2 - 4} = -\frac{7}{4}$

72. Έστω η συνάρτηση  $f(x) = \frac{\alpha + \beta \sin x}{x^2}$ , αν  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 3$ , να βρείτε τους  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

73. Έστω η συνάρτηση  $f(x) = \frac{\alpha + \sin x}{x} + \beta$ , αν  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$ , να βρείτε τους  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

**Βοηθητική συνάρτηση**

74. Για μια συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ισχύει  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{3x^2 + 6x} = 6$ , να βρεθεί το  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

**75.** Για μια συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ισχύει  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - x + 5}{x - 2} = 3$ , υπολογίσετε τα παρακάτω όρια

i.  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

ii.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{xf(x) + 6}{x - 2}$ .

**76.** Να βρείτε τα ζητούμενα όρια σε κάθε περίπτωση:

i. Αν  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 2$ , να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2f(x) - x}{x^2 + 3x}$ .

ii. Αν  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - x^3}{x^2 - 1} = -2$ , να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - x}{\sqrt{x} - 1}$ .

**77.** Για μια συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ισχύει  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 3$ . Να βρείτε το

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^2(x) + xf(x) + x\eta\mu x}{f^2(x) + x^2 + \eta\mu^2 x}.$$

**78.** Αν για την συνάρτηση  $f$  ισχύει ότι  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 4}{\sqrt{f(x)} + 2} = 1$ , να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ .

**79.** Να βρείτε σε κάθε περίπτωση τα όρια των συναρτήσεων  $f, g$  στο  $x_0$ , αν:

i.  $\lim_{x \rightarrow x_0} (3f(x) + g(x)) = 19$  και  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - 2g(x)) = -3$ .

ii.  $\lim_{x \rightarrow x_0} (x^2 f(x) + g(x)) = 3$  και  $\lim_{x \rightarrow x_0} (3xf(x) - xg(x)) = 1$  και  $x_0 = 1$ .

**80.** Αν  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x - 2} = 1$  και  $\lim_{x \rightarrow 2} [g(x) \cdot (2x^2 + 3x - 14)] = 11$ , να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 2} [f(x) \cdot g(x)]$ .

**81.** Να βρείτε σε κάθε περίπτωση το  $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)]$ , αν

i.  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{x + 1} = 2$ ,  $\lim_{x \rightarrow -1} [g(x) \cdot (x^2 - x - 2)] = -3$  και  $x_0 = -1$ .

ii.  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x)}{x^2 - 4} = 3$ ,  $\lim_{x \rightarrow -1} [g(x) \cdot (x + \sqrt{x + 6})] = 2$  και  $x_0 = -2$ .

**82.** Έστω συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^2(x) - 2xf(x)}{x^2} = -1$ , να βρείτε το όριο  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ .

**83.** Αν για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x - 1} = 3$  και  $|g(x) - 1| \leq |f(x)|$ , να βρείτε τα όρια:

i.  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

ii.  $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$

iii.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|g(x) - 3| - 2}{g^2(x) - g(x)}.$

**84.** Αν η συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  είναι περιττή και  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$ , να βρείτε το

$$\lim_{x \rightarrow -1} \left[ f(x) + \frac{1}{x+1} + \frac{2}{x^2-1} \right].$$

**85.** Έστω οι συναρτήσεις  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Αν η  $f$  είναι άρτια, η  $g$  περιττή,  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 3$  και

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left[ g(x) \cdot (\sqrt{2x+7} - 3) \right] = 5, \text{ να βρείτε το } \lim_{x \rightarrow -1} [f(x) \cdot g(x)].$$

### **Γενικές ασκήσεις**

**86.** Για μια συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ισχύει  $f^3(x) + 2x^2f(x) = 3\eta\mu^3x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Αν  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \kappa \in \mathbb{R}$

να δείξετε ότι  $\kappa = 1$  και στη συνέχεια να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

i.  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

ii.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\eta\mu x)}{x}$

iii.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(f(x))}{x}$

iv.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x^2 - x)}{x^2 - 3x + 2}.$

**87.** Για μια συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ισχύει  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 2$ . Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

i.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + f(2x)}{x}$

ii.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2f(x) + xf^2(x)}{f^3(x) + x^3}$

iii.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + \sin x - 1}{f(x) + \eta \mu x}.$

**88.** Έστω συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 2f(-x)}{x} = 3$ , να βρείτε τα όρια:

i.  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

ii.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$

iii.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(2x)}{x^2 + f^2(x)}.$