

Όριο πολυωνυμικής-ρητής συνάρτησης.

1. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^3 + 3x^2 - 5x + 2)$

ii. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^3 - 2x^2 - x + 1)$

iii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^4 - 5x + 2)$

iv. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^4 - x^3 - x + 3).$

2. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + x^2 - x + 2}{x^2 + 2}$

ii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 2x^2 - 3x + 2}{x^4 + x - 3}$

iii. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x^3 + 2x^2 - 3x + 2}{x^2 - x - 3}$

iv. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x^4 + x^2 - 3x + 2}{3x^4 - x^2 + x - 3}.$

3. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x^2 + 1} + \frac{2x + 1}{x^3 + 1} \right)$

ii. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3}{x - 1} - \frac{3x - 1}{x^2 - 3x + 2} \right)$

iii. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - x + \frac{x^2 + 3x + 5}{x + 1} \right).$

4. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - x + 2}$

ii. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 2x + 3}$

iii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x + 1} - \sqrt{4x + 1})$

iv. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 2x + 3} - x + 2).$

5. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 2x + 3} - x + 2)$

ii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 5x + 8} - \sqrt{x^2 + 2x + 2})$

iii. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{9x^2 + x + 3} + 3x)$

iv. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x\sqrt{x^2 + 3} + x^2 - 1).$

6. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 7} + x + 1}{x + 2}$

ii. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 3x + 7} + \sqrt{x^2 + x + 7}}{x + 4}$

iii. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x + 2} - 3x + 2}{\sqrt{x^2 + 5x + 7} - 2x + 3}$

iv. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2}}{\sqrt{x+3} + \sqrt{x+4}}.$

7. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x + 1} + 5x}{\sqrt{x^2 + x + 1} + 2x}$

ii. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 + x - \sqrt{x^2 + x + 5}}{x^2 + 2x + \sqrt{x^2 + 3x + 4}}$

iii. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + \sqrt{x^2 - 1}}{x - \sqrt{x^2 + 1}}.$

iv. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{25x^2 - 1} - 5x}{\sqrt{x^2 + 1} - x}$

8. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 5x + 1} + \sqrt{9x^2 + 1} - 4x + 1)$

ii. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{4x^2 + 1} + 3x + 7)$

iii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 + 1} + \sqrt{9x^2 + 1} - \sqrt{25x^2 + x - 1}).$

9. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x-2| + |x-3|}{x-1} \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x-2| + |x-3|}{x-1}$

$$\text{ii. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x^3 + 1| + |x^3 - 2| + x + 1}{|2x^3 + 5| + x^2 + x + 2} \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x^3 + 1| + |x^3 - 2| + x + 1}{|2x^3 + 5| + x^2 + x + 2}$$

$$\text{iii. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x^2 + 1| + |x^2 - 9| + |x^2 + 5x + 3|}{x^2 + 2x + 4} \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x^2 + 1| + |x^2 - 9| + |x^2 + 5x + 3|}{x^2 + 2x + 4}.$$

10. Η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x > 0$ σε κάθε περίπτωση ισχύει:

$$\sqrt{x^2 + 4x + 3} \leq x + f(x) \leq \sqrt{x^2 + 6x + 10} - 1, \text{ να βρείτε το } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x).$$

11. Η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x > 0$ σε κάθε περίπτωση ισχύει:

$$\sqrt{4x^2 + 4x + 3} - x \leq x + f(x) \leq \sqrt{x^2 + 6x + 10}, \text{ να βρείτε το } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x).$$

Εκθετικά-λογαριθμικά όρια

12. Να βρείτε τα όρια:

$$\text{i. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x + 3^x + 1}{3^x + 2^{x+1} - 5}$$

$$\text{ii. } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7^x + 3^{x+2} + 1}{8^x + 5^{x+1} - 2}$$

$$\text{iii. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^{x+2} + 3^{x+1} + 4}{2^{x+1} + 3^{x-1} - 1}$$

$$\text{iv. } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + e^{x-2} + 1}{e^{x-1} + e^{x+1} - 2}.$$

13. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου a :

$$\text{i. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^{x+1} + 2^{x+2} + 1}{a^{x+2} + 2^{x+1} - 5}, \quad a > 0$$

$$\text{ii. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x - 3^{x+1}}{a^{x+1} + 3^x}, \quad a > 0$$

$$\text{iii. } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{x+1} - a^x}{e^x + a^{x+1}}, \quad a > 0$$

$$\text{iv. } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{x+1} - a^x}{e^x + a^{x+1}}, \quad a > 0.$$

14. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια :

$$\text{i. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x^2 + 2x + 3)$$

$$\text{ii. } \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln \frac{x^2 + 1}{3 - x}$$

iii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(1 + 2^x) - \ln(1 + 5^x))$

iv. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln(1 + e^x))$.

v. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{6 \ln^2 x - 5 \ln x + 4}{3 \ln^2 x + 2 \ln x - 1}$

15. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια :

i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{x^2 \eta \mu \frac{3}{x}}{x+1}}$

ii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

iii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{5x^3+1}{x^2+1}}$

iv. $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{3x^3+5}{2x+1}}$.

16. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln \frac{a^{2x} + e^{2x}}{e^x} - x$, $a > 0$. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

Τριγωνομετρικά όρια

17. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια.

i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta \mu x}{x}$

ii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sigma \upsilon \nu x}{x}$

iii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \eta \mu \frac{1}{x} \right)$

iv. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{x^2} \eta \mu \frac{1}{x} \right)$.

18. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια.

i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + \eta \mu x) \sigma \upsilon \nu \frac{1}{x}$

ii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sigma \upsilon \nu x) \eta \mu \frac{1}{x}$

iii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x + \sigma \upsilon \nu x)$

$$\text{iv. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3 + 2}{x^2 + 3} \eta \mu \frac{1}{x} \right).$$

19. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια.

$$\text{i. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} \sigma \upsilon \nu \frac{3x-4}{x^2+1}$$

$$\text{ii. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 3x + 1}{2x^3 + 5} \sigma \upsilon \nu 3x$$

$$\text{iii. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 1} - x \right) \eta \mu 4x$$

$$\text{iv. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \eta \mu^2 x}{x^4 + 3}.$$

20. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια.

$$\text{i. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x \eta \mu x - 1}{x^2 + \eta \mu x - 2}$$

$$\text{ii. } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^3 - 2x^2 \eta \mu \frac{1}{x} + 1}{2x^3 + x^2 \eta \mu \frac{3}{x} + 5}$$

$$\text{iii. } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 - \sqrt{x^2 + \eta \mu^2 x}}{x^2 + \sqrt{x^2 + \sigma \upsilon \nu^2 x}}$$

$$\text{iv. } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{9 + x^2} - 3 \right) \eta \mu \frac{3}{x}.$$

Συναρτησιακά όρια-βοηθητική συνάρτηση

21. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ όταν:

$$\text{i. } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x) + x \eta \mu \frac{3}{x}}{x - \sqrt{1 + x^2}} = 2$$

$$\text{ii. } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x) - x \eta \mu \frac{2}{x}}{\sqrt{1 + x^2} - x} = 2.$$

22. Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη στο $(0, +\infty)$ και για κάθε $x > 0$ ισχύει

$$\left| (2 + x^4) f(x) - 3x^4 \right| \leq x^2 + 1, \text{ να αποδείξετε ότι:}$$

$$\text{i. } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$$

ii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(xf(x) \eta \mu \frac{1}{x} \right) = 3.$

23. Να υπολογίσετε τα όρια:

i. Αν $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$, να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x - 2f(x)}{f(x) + 5x + 1}$

ii. Αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^2} = 3$, να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) + 2x^2 - x}{2f(x) + x + 1}.$

24. Έστω συνάρτηση $f : (0, +\infty)$, για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xf(x) - x + 1}{x + 1} = 3$. Να βρείτε τα όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

ii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 f(x) + x^2 - x + 1}{2x + xf(x)}.$

25. Έστω συνάρτηση $f : (-\infty, 0)$, για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 f(x) + x^2 + 1}{x^2 + 3} = 2$.

i. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

ii. Να βρείτε το a , αν $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{xf(x) + ax + 1}{2 + x} = 1$.

26. Αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \kappa \in \mathbb{R}$, να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \kappa x)$, όταν:

i. $f(x) = \frac{2x^2 - x + 3}{x - 1}$

ii. $f(x) = \frac{x\sqrt{x^2 + 1}}{x - 1}$

iii. $f(x) = \sqrt{4x^2 - x} - 2x$.

27. Έστω συνάρτηση $f : (0, +\infty)$, για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$. Να βρείτε το όριο:

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) + x + 1}{xf(x) + 3x^2 + 2}.$

28. Έστω συνάρτηση $f : (-\infty, 0)$, για την οποία ισχύουν: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$ και

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - 2x] = 3. \text{ Να βρείτε το } \kappa \in \mathbb{R}^*, \text{ ώστε } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2f(x) + \kappa x - 1}{xf(x) - 2x^2 + 1} = 1.$$

29. Αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 3x + 2] = 0$, να υπολογίστε τα παρακάτω όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 3x]$

ii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

iii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$

iv. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xf(x) + x^2 + 1}{xf(x) - 3x^2 + 2}.$

30. Οι συναρτήσεις f και g είναι ορισμένες στο $\mathbb{R}$ και ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x + \sqrt{x}} = 5 \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} [2x - g(x)] = 3. \text{ Να βρείτε το } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)g(x)].$$

31. Για μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει ότι: $\frac{x^3 + x^2 + 2x + 3}{x^2 - 4x} \leq f(x) \leq \frac{x^3 + x - 4}{x^2 + 2}, x > 0.$

Να βρείτε τα όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

ii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$

iii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f(x) \eta \mu \frac{1}{x} \right].$

32. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση τέμνει τον $y'y$ στο σημείο με τεταγμένη 3.

Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(-2)x^3 + 5x^2 - 2x - 2].$

33. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)f(x)}{\sqrt{x+3}-2} = 8. \text{ Να βρείτε:}$$

i. Το $f(1)$

ii. Το όριο $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(3)x^5 + 5x^2 - 2x - 12].$

34. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + g(x)] = 0$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)g(x)] = 0$.

Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$.

35. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$ με $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$.

Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f^8(x) + g^8(x)}{f^2(x) + g^2(x)} = 0$.

36. Δίνονται οι συναρτήσεις $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(xy) = f(x)f(y) - \sqrt{xy}(\sqrt{x} + \sqrt{y})$ για κάθε

$x, y \geq 0$. Να βρείτε:

i. Τον τύπο της f .

ii. Το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$.

37. Αν $f(x) \geq x^3, x \in \mathbb{R}$, να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

38. Αν $f(x) \leq x^3, x \in \mathbb{R}$, να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

39. Αν $f(x) + x^2 - e^x < 0, x \in \mathbb{R}$, να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

40. Αν $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ και $f(x) > \ln x, x > 0$, να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

Παραμετρικά όρια.

41. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια για τις διάφορες τιμές των πραγματικών αριθμών λ, θ .

i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\lambda x^3 + 3x^2 - 5x + 2)$

ii. $\lim_{x \rightarrow -\infty} [(\lambda^2 - 1)x^3 - x^2 - x + 1]$

iii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} [(1 - \eta\mu\theta)x^4 - x^3 + 2]$

iv. $\lim_{x \rightarrow -\infty} [|\lambda - 2|x^4 - x^3 - x + 3]$.

42. Για τις διάφορες πραγματικές τιμές του μ , να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\mu - 3)x^3 + x^2 + 2}{\mu x^2 + 2x - 1}$

ii. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(2\mu - 3)x^3 - 3x + 2}{(\mu + 1)x^2 + 1}$

iii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\mu^2 - 3\mu)x^3 + (\mu + 3)x^2 + 2x - 1}{\mu x^2 + 1}$

$$\text{iv. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\mu^2 - \mu - 2)x^3 - (\mu - 1)x^2 + 2x + 2}{(\mu - 1)x^2 + \mu x + 1}.$$

43. Αν $f(x) = \frac{x^2 + 2}{x + 1} - \alpha x + \beta$, να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0.$$

44. Για τις διάφορες πραγματικές τιμές του μ , να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

$$\text{i. } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{9x^2 + 3x + 2} - \mu x)$$

$$\text{ii. } \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 3x + 4} + \mu^2 x)$$

$$\text{iii. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 3x + 5}{x + 1} - \mu x + 4 \right)$$

$$\text{iv. } \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{4x^2 + 1} + \mu x).$$

45. Να βρείτε τους $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε:

$$\text{i. } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 2x + 4} - \alpha x + \beta) = 7$$

$$\text{ii. } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^3 + \alpha x^2 + \beta x + 3}{x^2 + 1} + \alpha x - \beta \right) = 3$$

$$\text{iii. } \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 2x + 3} + \sqrt{4x^2 + 4x + 5} + \alpha x + \beta) = 7$$

$$\text{iv. } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 2x + 3} + \sqrt{4x^2 + 4x + 5} + \alpha x + \beta) = 6.$$