

## ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

### Μελέτη ως προς τη συνέχεια

1. Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια στο σημείο  $x_0$  τις συναρτήσεις.

$$\text{i. } f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & \text{αν } x \leq 1 \\ 2x + 1, & \text{αν } x > 1 \end{cases}, x_0 = 1$$

$$\text{ii. } f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1, & \text{αν } x < 0 \\ \sqrt{x^2 + x + 4} - 1, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}, x_0 = 0$$

$$\text{iii. } f(x) = \begin{cases} |x + 3| + 1, & \text{αν } x \leq 2 \\ x^2 + 2x - 3, & \text{αν } x > 2 \end{cases}, x_0 = 2$$

$$\text{iv. } f(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu x}{x} + x + 2, & \text{αν } x \leq 0 \\ x^3 + x^2 + 3, & \text{αν } x > 0 \end{cases}, x_0 = 0$$

2. Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια στο σημείο  $x_0$  τις συναρτήσεις.

$$\text{i. } f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2 - 5x + 3}{x - 1}, & \text{αν } x \neq 1 \\ -1, & \text{αν } x = 1 \end{cases}, x_0 = 1$$

$$\text{ii. } f(x) = \begin{cases} \frac{2x + \eta\mu x}{x}, & \text{αν } x \neq 0 \\ 3, & \text{αν } x = 0 \end{cases}, x_0 = 0$$

$$\text{iii. } f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2 + 3} - 2}{x - 1}, & \text{αν } x \neq 1 \\ 3, & \text{αν } x = 1 \end{cases}, x_0 = 1$$

$$\text{iv. } f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}}, & \text{αν } x \neq 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}, x_0 = 0$$

3. Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια τις συναρτήσεις.

$$\text{i. } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1}, & \text{αν } x < 1 \\ x^2 + 3x - 2, & \text{αν } x \geq 1 \end{cases}$$

$$\text{ii. } f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 1, & \text{αν } x \geq 2 \\ x^2 - 3x + 2, & \text{αν } x < 2 \end{cases}$$

$$\text{iii. } f(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu 3x}{x}, & \text{αν } x \neq 0 \\ 3, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$$

## ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

$$\text{iv. } f(x) = \begin{cases} \frac{|x^2 - 3| - 2}{x + 1}, & \text{αν } x < -1 \\ 2, & \text{αν } x = -1 \\ \frac{1 - x^2}{x + 1}, & \text{αν } x > -1 \end{cases}$$

4. Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια τις συναρτήσεις.

$$\text{i. } f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{αν } |x| \geq 1 \\ \frac{1}{x}, & \text{αν } |x| < 1 \end{cases}$$

$$\text{ii. } f(x) = \begin{cases} \eta\mu x + \ln(x^2 + 1), & \text{αν } x < 0 \\ e^{2x} + x - 1, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{iii. } f(x) = \begin{cases} x\eta\mu\frac{1}{x}, & \text{αν } x > 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \\ xe^{\frac{1}{x}}, & \text{αν } x < 0 \end{cases}$$

$$\text{iv. } f(x) = \begin{cases} 2e^{\frac{x}{2}} - 1, & \text{αν } x < 0 \\ \ln(x+1) + 1, & \text{αν } 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{\sin(x-1) - 1}{x-1}, & \text{αν } x > 1 \end{cases}$$

## Εύρεση παραμέτρων

5. Να βρείτε τις τιμές της παραμέτρου  $a$ , ώστε η συνάρτηση  $f$  να είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$ .

$$\text{i. } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1}, & \text{αν } x < 1 \\ x - a, & \text{αν } x \geq 1 \end{cases}$$

$$\text{ii. } f(x) = \begin{cases} 2 + \frac{1 - \sin 2x}{x^2}, & \text{αν } x < 0 \\ x^2 - x - a, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{iii. } f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}, & \text{αν } x > 1 \\ 2a-1, & \text{αν } x \leq 1 \end{cases}$$

## ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

$$\text{iv. } f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^4 + x^2} + \eta\mu 2x}{x^2 + x}, & \text{αν } x > 0 \\ e^x + a, & \text{αν } x \leq 0 \end{cases}$$

6. Να βρείτε τις τιμές της παραμέτρου  $a, \beta \in \mathbb{R}$  ώστε η συνάρτηση  $f$  να είναι συνεχής στις παρακάτω περιπτώσεις.

$$\text{i. } f(x) = \begin{cases} ax - \beta, & \text{αν } x < 0 \\ 3x, & \text{αν } 0 \leq x < 1 \\ \beta x^2 - a, & \text{αν } x \geq 1 \end{cases}$$

$$\text{ii. } f(x) = \begin{cases} ax - 1, & \text{αν } x < 0 \\ x^2 - \beta x - a, & \text{αν } 0 \leq x < 1 \\ 2e^{x-1} - ax + \beta + 1, & \text{αν } x \geq 1 \end{cases}$$

$$\text{iii. } f(x) = \begin{cases} e^{x+1} + ax - 2, & \text{αν } x \leq -1 \\ 2x^2 - \beta, & \text{αν } -1 < x < 0 \\ \beta \eta\mu x - 7 \sigma\upsilon\nu x + 2 \ln(x+1), & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$$

7. Να βρείτε τις τιμές της παραμέτρου  $a, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$  ώστε η συνάρτηση  $f$  να είναι συνεχής στις παρακάτω περιπτώσεις.

$$\text{i. } f(x) = \begin{cases} \frac{x\sqrt{x^2 + 3} - a}{x - 1}, & \text{αν } x \neq 1 \\ \beta, & \text{αν } x = 1 \end{cases}$$

$$\text{ii. } f(x) = \begin{cases} \frac{ax^3 + \beta x^2 - \gamma x + 1}{x^2 - 2x + 1}, & \text{αν } x \neq 1 \\ -1, & \text{αν } x = 1 \end{cases}$$

$$\text{iii. } f(x) = \begin{cases} \frac{ax^2 + 3\beta x - 5}{x - 1}, & \text{αν } x \neq 1 \\ 7, & \text{αν } x = 1 \end{cases}$$

8. Να βρείτε τις τιμές της παραμέτρου  $a, \beta \in \mathbb{R}$  ώστε η συνάρτηση  $f$  να είναι συνεχής στις παρακάτω περιπτώσεις.

$$\text{i. } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - ax + \beta - 1}{x - 3}, & \text{αν } x < 3 \\ x^2 - (a - 1)x + \beta, & \text{αν } x \geq 3 \end{cases}$$

$$\text{ii. } f(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu(\eta\mu 3x)}{x}, & \text{αν } x \neq 0 \\ a, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$$

## ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

$$\text{iii. } f(x) = \begin{cases} \frac{(a+1)x^2 - (2\beta+1)x + 6}{x-3}, & \text{αν } x \neq 3 \\ 7, & \text{αν } x=3 \end{cases}$$

### Εύρεση της τιμής ή του τύπου της f

**9.** Αν η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0 = 0$ , ώστε για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  να ισχύει:

$$xf(x) \geq 4x + 2\eta\mu 3x + \eta\mu 9x, \text{ να βρεθεί το } f(0)$$

**10.** Δίνεται συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει  $xf(x) - 2 = f(x) - \sqrt{3x^2 + 1}$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Αν η  $f$  είναι συνεχής, να βρείτε τον τύπο της.

**11.** Αν η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0$ , να βρείτε την τιμή  $f(x_0)$  στις παρακάτω περιπτώσεις.

i.  $(x-1)f(x) = x^2 + 3x - 4$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  και  $x_0 = 1$ .

ii.  $xf(x) = 2x + 3\eta\mu x$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  και  $x_0 = 0$ .

**12.** Αν η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0$ , να βρείτε την τιμή  $f(x_0)$  στις παρακάτω περιπτώσεις.

i.  $x^2f(x) + x = x\sigma\upsilon\nu x - f(x)\eta\mu^2 x$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  και  $x_0 = 0$ .

ii.  $xf(x) + 2 = f(x) + \sqrt{x^2 + 3}$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  και  $x_0 = 1$ .

**13.** Η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  είναι συνεχής στο  $x_0$ , να βρείτε την τιμή  $f(x_0)$  στις παρακάτω περιπτώσεις.

i.  $x^2f(x) \leq (\sqrt{x^2 + 4} - 2)\eta\mu 4x$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  και  $x_0 = 0$ .

ii.  $(x-1)f(x) \leq x^2 - 1 + \eta\mu\pi x$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  και  $x_0 = 1$ .

**14.** Η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  είναι συνεχής στο  $x_0$ , να βρείτε την τιμή  $f(x_0)$  στις παρακάτω περιπτώσεις.

i.  $x + \eta\mu x \leq xf(x) \leq 2x^2 + x + \eta\mu x$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  και  $x_0 = 0$ .

ii.  $|xf(x) - \eta\mu x| \leq x^4\eta\mu^2 \frac{1}{x}$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}^*$  και  $x_0 = 0$ .

**15.** Η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  είναι συνεχής στο  $x_0$ , να βρείτε την τιμή  $f(x_0)$  στις παρακάτω περιπτώσεις.

## **ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ**

- i.  $x - \eta\mu^2 x \leq xf(x) \leq x + \eta\mu^2 x$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  και  $x_0 = 0$ .
- ii.  $x - 2 \leq (x - 2)f(x) \leq x^2 - 3x + 2$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  και  $x_0 = 2$ .

## **Θεωρητικές με ανισώσεις**

**16.** Δίνεται η συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει  $f^2(x) - 2xf(x) \leq |x - 1| - x^2$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Να δείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0 = 1$ .

**17.** Δίνεται η συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει  $f^2(x) \leq 2xf(x)$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

Να δείξετε ότι:

i. Η  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0 = 0$ .

ii.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x^2} = 0$ .

**18.** Δίνεται η συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει  $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$  για κάθε  $x, y \in \mathbb{R}$ . Να δείξετε ότι συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής.

**19.** Δίνεται η συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει  $xf(x) \leq \sin 5x - 1$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

Αν η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0 = 0$ , να βρείτε το  $f(0)$ .

**20.** Δίνεται η συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει  $xf(x) \leq f(x) + 2\eta\mu(x - 1)$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Αν η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0 = 1$ , να βρείτε το  $f(1)$ .

**21.** Δίνονται οι συναρτήσεις  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Να αποδείξετε ότι οι  $f, g$  είναι συνεχείς στο  $x_0 = 0$ .

στις παρακάτω περιπτώσεις:

i.  $f^2(x) + g^2(x) + \sin^2 x \leq 2xf(x) + 2g(x)\sin x$

ii.  $f^2(x) + g^2(x) \leq 2[xf(x) + g(x)\eta\mu x + x\eta\mu x]$ .

**22.** Δίνονται οι συναρτήσεις  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για τις οποίες ισχύει  $f^2(x) + g^2(x) = x^2$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Να αποδείξετε ότι οι  $f, g$  είναι συνεχείς στο  $x_0 = 0$ .

**23.** Δίνεται η συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει  $3f(x) = 2x + \eta\mu f(x)$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

Να δείξετε ότι:

i.  $|f(x)| \leq |x|$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

ii. Η  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0 = 0$ .

## ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

- 24.** Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει  $f^5(x) + f(x) = x$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Να δείξετε ότι η  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0 = 0$ .
- 25.** Δίνεται η συνάρτηση  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει  $f^3(x) + f(x) = \ln x$ ,  $x > 0$ . Να δείξετε ότι η  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0 = 1$ .
- 26.** Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει  $f^3(x) + 2f(x) = e^x - 1$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Να δείξετε ότι η  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0 = 0$ .

## Συνθετικές

- 27.** Αν η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0 = 3$  και ισχύει  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{x-3} = 2017$ , να βρείτε το  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h}$ .
- 28.** Αν η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0 = 1$  και ισχύει  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2x}{x^2 - 1} = 2$ , να βρείτε την τιμή της στο 1.
- 29.** Αν η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0 = 0$  και ισχύει  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x) + 2x}{x^2 - x} = 3$ , να βρείτε την τιμή της στο 0.
- 30.** Αν η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0 = 2$  και ισχύει  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + f(x)}{x^2 - 4} = 3$ , να υπολογίσετε το  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 f(x) - 4f(2)}{\sqrt{x+2} - 2}$ .
- 31.** Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + 1 + \eta \mu x}{x^2 + x} = \rho \in \mathbb{R}$  και  $A(0, -1) \in C_f$ .
- i. Να δείξετε ότι η  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0 = 0$ .
- ii. Αν  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) + 1}{\eta \mu x} = 3$ , να βρείτε τιμή του  $\kappa$ .
- 32.** Δίνεται η συνεχής συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lambda \in \mathbb{R}$ .
- i. Να βρείτε το  $f(0)$ .

## ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ii. Να βρείτε την τιμή του  $\lambda$ , ώστε  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu^2 x + 2xf(x)}{x^2 + \eta\mu xf(x)} = 3$ , να βρείτε τιμή του  $\kappa$ .

**33.** Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  η οποία είναι συνεχής στο  $x_0 = 1$ , περιττή και

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) + 2}{(x-1)^2} = 4.$$

i. Να βρείτε το  $f(1)$ .

ii. Να δείξετε ότι η  $f$  είναι συνεχής στο  $x_1 = -1$ .

iii. Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - 2}{(x+1)^2}$ .

**34.** Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  η οποία είναι συνεχής στο  $x_0 = -3$ , περιττή και

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{f(x) + 1 - \eta\mu(x+3)}{x^2 - 9} = 2.$$

i. Να βρείτε το  $f(-3)$ .

ii. Να δείξετε ότι η  $f$  είναι συνεχής στο  $x_1 = 3$ .

iii. Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2f(x) + 1}{x - 3}$ .

**35.** Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει ότι  $f^3(x) + 3f(x) - e^{2x} + 1 = 0, x \in \mathbb{R}$ .

i. Να υπολογιστεί το  $f(0)$ .

ii. Να αποδείξετε ότι  $|f(x)| \leq |e^{2x} - 1|$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

iii. Να εξετάσετε αν η  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0 = 0$ .

**36.** Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύουν  $f^3(x) + 2f(x) = x, x \in \mathbb{R}$ . Να

αποδείξετε ότι:

i. Η  $f$  αντιστρέφεται.

ii. Η  $f$  έχει σύνολο τιμών το  $\mathbb{R}$ .

iii.  $f^{-1}(x) = x^3 + 2x$ .

iv. Η  $f$  είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$ .

**37.** Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύουν  $f(2-x) = f(x), x \in \mathbb{R}$  και η  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0 = 3$ . Να δείξετε ότι η  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0 = -1$ .

## ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

### Συνέχεια και συναρτησιακές σχέσεις

- 38.** Έστω συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει  $f^3(x) + f(x) = x - 1$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .  
Να δείξετε ότι η  $f$  είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$ .
- 39.** Έστω συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει  $f(x) + f(x+1) = x^2 + x - 1$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Αν η  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0 = 0$ , να δείξετε ότι η  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0 = 1$ .
- 40.** Αν για τη συνάρτηση  $f$  ισχύει  $f(x+y) = f(x) + f(y)$  για κάθε  $x, y \in \mathbb{R}$ , να δείξετε ότι:
- i.  $f(0) = 0$ .
  - ii. Η  $f$  είναι περιττή.
  - iii. Αν η  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0 = 0$ , να δείξετε ότι η  $f$  είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$ .
  - iv. Αν η  $f$  είναι συνεχής στο  $a \neq 0$ , να δείξετε ότι η  $f$  είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$ .
- 41.** Αν για τη συνάρτηση  $f$  ισχύει  $f(x+y) = f(x)f(y)$  για κάθε  $x, y \in \mathbb{R}$ , να δείξετε ότι:
- i. Αν η  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0 = 0$ , να δείξετε ότι η  $f$  είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$ .
  - ii. Αν η  $f$  είναι συνεχής στο  $a \neq 0$ , να δείξετε ότι η  $f$  είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$ .
- 42.** Δίνεται η συνάρτηση  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  με την ιδιότητα  $f(xy) = f(x) + f(y)$  για κάθε  $x, y > 0$ . Να δείξετε ότι:
- i.  $f(1) = 0$ .
  - ii. Αν η  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0 = 1$ , τότε η  $f$  είναι συνεχής στο  $(0, +\infty)$ .
  - iii. Αν η  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0 = a > 0$ , να δείξετε ότι η  $f$  είναι συνεχής στο  $(0, +\infty)$ .
- 43.** Αν για την συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , που είναι συνεχής στο  $x_0 = a$ , με την ιδιότητα  $f(x-2y) - f(x) + 2f(y) = 0$  για κάθε  $x, y \in \mathbb{R}$ . Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$ .
- 44.** Δίνεται η συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με την ιδιότητα  $f(x+y) = f(x) - 2f(y)$  για κάθε  $x, y \in \mathbb{R}$ . Αν η  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0 = 0$  και  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} = 1$ , να αποδείξετε ότι:
- i. Η  $f$  είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$ .
  - ii.  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \sin 2a$ , για κάθε  $a \in \mathbb{R}$ .