

ΘΕΩΡΗΜΑ BOLZANO-ΒΑΣΙΚΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

Θεώρημα Bolzano και ύπαρξη ρίζας

1. Δείξτε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν μια τουλάχιστον ρίζα x_0 στα αντίστοιχα διαστήματα.

i. $\sin x = x, x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$

ii. $\eta \mu x = x - 1, x_0 \in (0, \pi).$

iii. $(x - \pi)\eta \mu x = (2x - \pi)\sin x, x_0 \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right).$

iv. $(3x - \pi)\epsilon \phi x + (4x - \pi)\sigma \phi x = 0, x_0 \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right)$

2. Δείξτε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν μια τουλάχιστον ρίζα x_0 στα αντίστοιχα διαστήματα.

i. $2x^3 + 3x - 1 = 0, x_0 \in (0, 1).$

ii. $(x - 1)2^{x-1} + \ln(x + 1) = 0, x_0 \in (0, 1).$

iii. $e^{x-1} + x - 1 = 0, x_0 \in (0, 1).$

iv. $2\ln(x + 2) + \eta \mu(\pi x) - 1 = 0, x_0 \in (-1, 0).$

3. Δείξτε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν μια τουλάχιστον ρίζα x_0 στα αντίστοιχα διαστήματα.

i. $\frac{\eta \mu x}{2x - \pi} - \frac{\sigma \nu x}{2x + \pi} = 0, x_0 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$

ii. $\frac{x^{2016} + 2016}{x - 1} + \frac{x^{2017} + 2017}{x - 2} = 0, x_0 \in (1, 2).$

iii. $\eta \mu x = \frac{x}{x^2 - 1}, x_0 \in (-1, 1).$

4. Να δείξετε ότι η εξίσωση $3x^3 + a^2x + a + 2 = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(-1, 1)$ για κάθε $a \in \mathbb{R}$.

5. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = \frac{2e^x - 3}{x^2 - x}$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0, 1)$.

6. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^3 - 6x^2 + 3 = 0$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο διάστημα $(-1, 1)$.

ΘΕΩΡΗΜΑ BOLZANO-ΒΑΣΙΚΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

- 7.** Αν $a < \beta < \gamma$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{1}{x-a} + \frac{3}{x-\beta} + \frac{5}{x-\gamma} = 0$ έχει δύο ακριβώς ρίζες στο $\mathbb{R}$.
- 8.** Έστω οι συναρτήσεις f, g με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Αν γνωρίζετε ότι η συνάρτηση $f \circ g$ είναι " $1-1$ " τότε να δείξετε ότι:
- i.** Η g είναι " $1-1$ ".
 - ii.** Η εξίσωση $g\left(\frac{\kappa^2}{x} + \frac{\lambda^2}{x+1}\right) = g\left(\frac{\mu^2}{1-x}\right)$, $\kappa, \lambda, \mu \neq 0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες, μία θετική και μία αρνητική.
 - iii.** Αν οι ρίζες είναι οι ρ_1, ρ_2 , να αποδείξετε ότι $\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = \frac{\mu^2 - \lambda^2}{\kappa^2}$.
- 9.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\sin x = x(x - \pi x)$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο διάστημα $(-\pi, \pi)$.
- 10.** Δείξτε ότι η εξίσωση $x^2 = x \sin x + \sin x$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.
- 11.** Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^2 - \sin x = 0$ έχει δύο ακριβώς ρίζες.
- 12.** Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 2x - 1$. Να δείξετε ότι:
- i.** Η f είναι γνησίως αύξουσα.
 - ii.** Η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία ακριβώς ρίζα στο $(0, 1)$.
- 13.** Έστω η συνάρτηση $f(x) = 2 \sin x - \sin x - 1$. Να δείξετε ότι:
- i.** Η f είναι γνησίως αύξουσα.
 - ii.** Η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία ακριβώς ρίζα στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.
- 14.** Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} a^{3x}, & x \in (-\infty, 1] \\ \frac{a \ln(x-1)}{x^2 + 7x - 8}, & x \in (1, \pi] \end{cases}$, όπου a θετικός πραγματικός αριθμός.
- i.** Να υπολογίσετε την τιμή του a ώστε η f να είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.
 - ii.** Να αποδείξετε η εξίσωση $f(x) - 4e^x + 2 = 0$ έχει μία τουλάχιστον αρνητική ρίζα.

ΘΕΩΡΗΜΑ BOLZANO-ΒΑΣΙΚΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

- 15.** Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[1,5]$, $f(1) = 3$ και $f(5) = 2$, να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει ένα τουλάχιστον κοινό σημείο με την ευθεία $\varepsilon : y = x$.
- 16.** Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x\eta\mu x + x$ και $g(x) = 1 + 2\sigma\upsilon\nu x$ έχουν, ένα τουλάχιστον κοινό σημείο με τετμημένη θετική και μικρότερη του π .
- 17.** Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[0,1]$ με $f(0) = \alpha$ και $f(1) = \beta$, όπου $\alpha, \beta \in (0,1)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\gamma \in (0,1)$ τέτοιος, ώστε $f(\gamma) = \gamma$.
- 18.** Αν οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο $[a, \beta]$ με $\alpha\beta > 0$, $f(\alpha) = 2\alpha$, $g(\beta) = 2\beta$ και $f(x) < 1 < g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\gamma \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος, ώστε $f(\gamma)g(\gamma) = 2\gamma$.
- 19.** Δίνονται οι συναρτήσεις f, g είναι που είναι συνεχείς στο $[a, \beta]$. Αν ορίζονται οι $f \circ g$ και $g \circ f$ στο διάστημα $[a, \beta]$ και $f(\alpha) = g(\beta) = \alpha$, $f(\beta) = g(\alpha) = \beta$, να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\gamma \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος, ώστε $f(g(\gamma)) + g(f(\gamma)) = 2\gamma$.
- 20.** Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $xf(x) = (x^2 - 4)e^x$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο $(-2, 2)$.
- 21.** Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [1, 2]$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{f(x)}{x-1} = \frac{f(x)}{x-2}$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο $(1, 2)$.
- 22.** Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) \neq x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ενώ η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A(3, 2)$. Να αποδείξετε ότι:
- $f(x) < x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
 - Υπάρχει $\xi \in (-1, 1)$ τέτοιο, ώστε $\xi f(\xi) = 1$.
- 23.** Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[a, \beta]$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\gamma \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος, ώστε $f(\gamma) = \frac{1}{\alpha - \gamma} + \frac{1}{\beta - \gamma}$.

ΘΕΩΡΗΜΑ BOLZANO-ΒΑΣΙΚΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

- 24.** Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 + \beta x + \gamma$ και $g(x) = -x^2 + \beta x + \gamma$, $\gamma \neq 0$. Αν ρ_1 είναι ρίζα της f και ρ_2 ρίζα της g με $\rho_1 < \rho_2$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) + 2g(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (ρ_1, ρ_2) .
- 25.** Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $4 < f(x) < 5$, για κάθε $x \in [0, 1]$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f^2(x) - 5f(x) + 4x = 0$ έχει μία, τουλάχιστον ρίζα στο $(0, 1)$.
- 26.** Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ με $0 < f(x) < 1$, για κάθε $x \in [1, 2]$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f^2(x) - xf(x) + x - 1 = 0$ έχει μία, τουλάχιστον ρίζα στο $(1, 2)$.
- 27.** Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^3(x) + f^2(x) + f(x) = xe^x - \sin x$, $x \in \mathbb{R}$.
Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία, τουλάχιστον, λύση στο $(0, \pi)$.
- 28.** Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(1) > 2$ και $f(e) < 2$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(e^x) = e^x$ έχει μία, τουλάχιστον, λύση στο $(0, 1)$.
- 29.** Έστω η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[1, 4]$ με $f(1) + f(2) = f(3) + f(4)$, και $f(1) \neq f(2)$ και $f(3) \neq f(4)$. Να αποδείξετε ότι:
- Υπάρχει $\xi \in (1, 2)$ τέτοιο, ώστε $f(\xi) = \frac{f(1) + f(2)}{2}$,
 - η συνάρτηση f δεν αντιστρέφεται.
- 30.** Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = e^{x-1}$ και $g(x) = \ln(x+1) + 1$.
- Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = x$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(1, 3)$.
 - Αν ξ είναι μία ρίζα της εξίσωσης $f(x) = x$, να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \xi$.
- 31.** Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) + \ln x = 1$ έχει μία τουλάχιστον θετική ρίζα.
- 32.** Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:
- $$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 4 \text{ και } 4\eta\mu(x-2) \leq (x-2)f(x) \leq x^2 - 4 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$
- Αν $g(x) = x^2 - x + 1$, να αποδείξετε ότι η C_f τέμνει τη C_g σε ένα τουλάχιστον σημείο $M(x_0, y_0)$ με $x_0 \in (1, 2)$.
- 33.** Έστω οι συνεχείς συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που ικανοποιούν τη σχέση $f^2(x) + 2g(x) + x = 0$, $x \in \mathbb{R}$. Αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε

ΘΕΩΡΗΜΑ BOLZANO-ΒΑΣΙΚΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

δύο σημεία A και B εκατέρωθεν της αρχής των αξόνων, να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της g τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα, τουλάχιστον, σημείο μεταξύ των A και B.

34. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $xf(x) + \eta\mu x = x^2$, $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο $(0,1)$.

35. Έστω οι συνεχείς συναρτήσεις f, g στο διάστημα Δ και για κάθε $x \in \Delta$ ισχύει $f(x) - g(x) = cx$, $c \neq 0$. Αν η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο ρίζες ετερόσημες $\rho_1, \rho_2 \in \Delta$, με $\rho_1 < \rho_2$, να δείξετε ότι η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο (ρ_1, ρ_2) .

36. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$xf(x) + 2 = f(x) + \sqrt{3x^2 + 1}, \quad x \in \mathbb{R}. \text{ Να δείξετε ότι υπάρχει } \xi \in (0,1), \text{ ώστε } 4f(\xi) = 7\xi.$$

37. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$. Αν $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2}{x - 1} = 5$ και η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο $A(0,2)$, να δείξετε ότι η ευθεία $\varepsilon : y = 2x + 1$ και η C_f έχουν ένα, τουλάχιστον, κοινό σημείο.

38. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$. Αν $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2}{x - 1} = 3$ και $\eta\mu 2x \leq xf(x) \leq 2x$, για κάθε $x \in [0,1]$. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει την ευθεία $\varepsilon : y = 3 - 2x$ σε ένα, τουλάχιστον, σημείο με τετμημένη που ανήκει στο διάστημα $(0,1)$.

39. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x - 2} = 1$ και $x^2 - 16 \leq (x - 4)f(x) \leq 8\eta\mu(x - 4)$, για κάθε $x \in (0,4]$. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει την παραβολή $y = -x^2 + 7x - 6$ σε ένα τουλάχιστον, σημείο με τετμημένη που ανήκει στο διάστημα $(2,4)$.

40. Ένας ποδηλάτης ξεκινάει από την πόλη A στις 7π.μ και φτάνει στην πόλη B στις 12π.μ. Την επόμενη μέρα ξεκινάει από την πόλη B στις 7π.μ και φτάνει στην πόλη A στις 12π.μ κάνοντας την ίδια διαδρομή. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, σημείο της διαδρομής στο οποίο βρίσκεται την ίδια ώρα και τις δύο μέρες.

Ύπαρξη ρίζας σε κλειστό διάστημα

ΘΕΩΡΗΜΑ BOLZANO-ΒΑΣΙΚΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

- 41.** Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : [a, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ με $a, \beta > 0$ και $a \leq f(x) \leq \beta$. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in [a, \beta]$ τέτοιος, ώστε $f(x_0) = \frac{a\beta}{x_0}$.
- 42.** Αν f συνεχής στο $[a, \beta]$ και $f^2(a) + f(a)f(\beta) = 0$, να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας τουλάχιστον $\gamma \in [a, \beta]$, ώστε $f(\gamma) = 0$.
- 43.** Δίνονται οι συναρτήσεις f, g είναι που είναι συνεχείς στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ και ισχύουν: $f(0) = 0$. $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$ και $f(x) \leq g(x)$ για κάθε $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)\eta\mu^2 x + g(x)\sigma\upsilon\nu^2 x = x$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
- 44.** Αν η συνάρτηση $f : [a, \beta] \rightarrow [a, \beta]$ είναι συνεχής και $a\beta > 0$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\gamma \in [a, \beta]$ τέτοιος, ώστε $\frac{f(\gamma)}{a} = \frac{\beta}{\gamma}$.
- 45.** Έστω συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(1) + f(2) + f(3) = 0$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα.
- 46.** Έστω συνεχής συνάρτηση f ορισμένη στο διάστημα $[0, 4]$, με $f(0) = f(4)$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = f(x) - f(x+2)$ με $x \in [0, 2]$. Να αποδείξετε ότι:
- Η h είναι συνεχής συνάρτηση.
 - Η εξίσωση $f(x) = f(x+2)$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $[0, 2]$.
- 47.** Έστω οι συνεχείς συναρτήσεις $f, g : [a, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(a) = g(\beta)$ και $f(\beta) = g(a)$. Να δείξετε ότι οι C_f και C_g τέμνονται σε ένα, τουλάχιστον, σημείο με τετμημένη $x_0 \in [a, \beta]$.
- 48.** Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ με $0 < f(x) \leq 3$, για κάθε $x \in [0, 3]$. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in [0, 3)$, τέτοιο, ώστε $f^2(\xi) - 3f(\xi) + \xi = 0$.
- 49.** Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[a, \beta]$ με $a^2 f(a) + \beta^2 f(\beta) + f(a) + f(\beta) = 0$. Να δείξετε ότι η f έχει τουλάχιστον ρίζα στο $[a, \beta]$.
- 50.** Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : [a, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ με $\kappa f(a) + \lambda f(\beta) = 0$, $\kappa \lambda > 0$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο $[a, \beta]$.

ΘΕΩΡΗΜΑ BOLZANO-ΒΑΣΙΚΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

51. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = f(2)$. Να δείξετε ότι υπάρχουν $x, y \in [0, 2]$, τέτοια, ώστε $|x - y| = 1$ και $f(x) = f(y)$.

Με τη βοήθεια ορίων

52. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\ln x + e^x = 0$, έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0, 1)$.

53. Έστω συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^3 + ax^2 + \beta$, $\beta > 0$ και $a + \beta < -1$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τρεις ακριβώς ρίζες.

54. Δίνεται συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 1, & -2 \leq x < 0 \\ -6x - 3, & 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$

i. Να εξετάσετε αν η f είναι συνεχής.

ii. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (-2, 2)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$.

Πρόσημο τιμών της f

55. Να βρείτε το πρόσημο των παρακάτω συναρτήσεων:

i. $f(x) = \sqrt{-x^2 - 4x + 21} - x - 3$

ii. $f(x) = |x - 3| + |x + 2| - x - 4$.

iii. $f(x) = \sqrt{2}\eta\mu x - 1$, $x \in [0, \pi]$.

iv. $f(x) = \varepsilon\phi x - 1$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

56. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{-x^2 - 2x + 24} - x$

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

ii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

iii. Να βρείτε το πρόσημο της f .

57. Έστω οι συνεχείς συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) \cdot g(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$ με και $f(1) > 3$ και $g(2) > 2$. Να δείξετε ότι:

i. $f(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ii. Υπάρχει $x_0 \in (1, 2)$, ώστε $g(x_0) = x_0$.

ΘΕΩΡΗΜΑ BOLZANO-ΒΑΣΙΚΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

58. Αν για κάθε $x \in [-2, 2]$ η f είναι συνεχής και ισχύει $x^2 + f^2(x) - 4 = 0$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(-2, 2)$.

59. Αν για κάθε $x \in [0, \pi]$ η f είναι συνεχής και ισχύει $\sin^3 x + f^2(x) - 1 = 0$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(0, \pi]$.

60. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν: $f(2016) + f(2017) = 0$ και $f(x) \neq 0, x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η f δεν είναι συνεχής.

61. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν: $f(1) + 2f(2) + 3f(3) = 0$ και $f(x) \neq 0, x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η f δεν είναι συνεχής.

62. Έστω f συνεχής συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ με $f(x) \neq 0, x \in \mathbb{R}$. Αν $f(1) = 2017$, να βρείτε τα παρακάτω όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[(f(2) + 1)x^3 + x^2 - \frac{1}{2} \right]$

ii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[(f(4) + 2)x^3 + 3]}{x^2 + 1}$.

63. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(2) = 1$ και 1,4 διαδοχικές ρίζες της εξίσωσης

$f(x) = 0$. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[(f(3) + 1)x^3 + x^2 - \frac{1}{2} \right]$.

64. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0, 1]$ και $f(0) = f(1)$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$f(x) = f\left(x + \frac{1}{3}\right)$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $[0, 1]$.

Εύρεση τύπου της f

65. Για μία συνεχή συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει $(f(x) - \sin x)(f(x) + \sin x) = \eta \mu^2 x, x \in \mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι:

i. $f^2(x) = 1, x \in \mathbb{R}$.

ii. Η C_f δεν τέμνει τον άξονα $x'x$.

iii. Η f διατηρεί σταθερό πρόσημο.

iv. Να βρείτε τον τύπο της f .

66. Αν για κάθε $x \in [-2, 2]$ η f είναι συνεχής και ισχύει $x^2 + f^2(x) - 4 = 0$, τότε:

ΘΕΩΡΗΜΑ BOLZANO-ΒΑΣΙΚΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

- i. Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$.
- ii. Να δείξετε ότι η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα $(-2, 2)$.
- iii. Να βρεθεί ο τύπος της f όταν $f(1) = -\sqrt{3}$.

67. Να βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις f για τις οποίες ισχύει:

- i. $f^2(x) - 1 = x^2, x \in \mathbb{R}$.
- ii. $f^2(x) - 3 = 2\eta\mu^2 x, x \in \mathbb{R}$.
- iii. $f^2(x) - 2f(x)\eta\mu x = 1, x \in \mathbb{R}$.

68. Να βρείτε τον τύπο της συνεχούς συνάρτησης f για την οποία ισχύει.

- i. $f^2(x) = x^2, x \in \mathbb{R}$
- ii. $f^2(x) - 4 = x^2 - 4x, x \in \mathbb{R}$.
- iii. $f^2(x) + 2e^x = e^{2x} + 1, x \in \mathbb{R}$

69. Για μία συνεχή συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει $f^2(x) = 1 + 2xf(x), x \in \mathbb{R}$.

- i. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = f(x) - x$ διατηρεί πρόσημο στο $\mathbb{R}$.
- ii. Αν $f(0) = 1$, τότε:
 - Να βρείτε τον τύπο της f .
 - Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow -\infty} (xf(x))$.

70. Έστω η συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

$f^2(x) \neq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) > 2$. Να αποδείξετε ότι:

- i. $f(x) > 1, x \in \mathbb{R}$.
- ii. Η συνάρτηση $g(x) = \frac{1}{f(x)} + \frac{1}{e^x} - 1, x \in \mathbb{R}$ είναι γνησίως φθίνουσα.
- iii. Η εξίσωση $e^x + f(x) = e^x f(x)$ έχει ακριβώς μία ρίζα x_0 με $x_0 \in (0, 1)$.

Θ.Ε.Τ-Θ.Μ.Ε.Τ

71. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ με $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$ και $f(1) \cdot f(3) = 10$. Να

δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 4$ έχει μία, τουλάχιστον, λύση στο $(1, 3)$.

ΘΕΩΡΗΜΑ BOLZANO-ΒΑΣΙΚΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

72. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(3) = 2$. Αν $f(x) \cdot f(f(x)) = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε τα $f(2)$ και $f(1)$.

73. Έστω η συνεχής και γνησίως φθίνουσα συνάρτηση $f : [-1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (-1, 3)$ τέτοιο, ώστε $6f(x_0) = 2f(-1) + f(0) + 3f(3)$.

74. Να βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις f για τις οποίες ισχύει:

i. $f^2(x) - 3f(x) + 2 = 0, x \in \mathbb{R}$.

ii. $f^2(x) - 4 = 0, x \in \mathbb{R}$.

75. Να βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις f για τις οποίες ισχύει:

i. $f^2(x) = 2f(x), x \in \mathbb{R}$.

ii. $f^3(x) - 4f^2(x) + 5f(x) + 2 = 0, x \in \mathbb{R}$.

76. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(4) = 2$ και $f(x) \cdot f(f(x)) = 12$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι $f(2) = 6$.

ii. Αν f γνησίως μονότονη, να βρείτε το είδος μονοτονίας της f .

iii. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (2, 4)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 3$.

iv. Να υπολογίσετε το $f(3)$.

77. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Q}$ με $f(2016) = 2018$. Να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή και να βρείτε τον τύπο της.

78. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + \ln x + x - 1$.

i. Να βρείτε τα όρια $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.

ii. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\kappa \in \mathbb{R}$ η εξίσωση $f(x) = \kappa$ έχει μία μόνο ρίζα.

iii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = e$.

iv. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει η ισότητα:

$$e^{\lambda^2+1} - e^{2\lambda} = \ln(2\lambda) - \ln(\lambda^2 + 1) - \lambda^2 + 2\lambda - 1.$$

79. Έστω f συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[1, 4]$ με $f(1) \cdot f(2) \cdot f(4) = 8$ και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [1, 4]$. Να αποδείξετε ότι:

i. $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [1, 4]$.

ii. Η Εξίσωση $f(x) = 2$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $[1, 4]$.

ΘΕΩΡΗΜΑ BOLZANO-ΒΑΣΙΚΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

iii. Η Εξίσωση $f(x) = x$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $[1, 4]$.

80. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει συνεχής συνάρτηση f με την ιδιότητα $(f \circ f)(x) = -x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

81. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[a, b]$ και $x_1, x_2 \in [a, b]$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in [a, b]$ τέτοιος, ώστε $2f(x_1) + 3f(x_2) = 5f(\xi)$.

82. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[a, b]$ και $x_1, x_2, x_3 \in [a, b]$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\gamma \in [a, b]$ τέτοιος, ώστε $f(x_1) + 2f(x_2) + 3f(x_3) = 6f(\gamma)$.

83. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[a, b]$ και $x_1, x_2, x_3 \in [a, b]$, Αν κ, λ, ρ είναι θετικοί αριθμοί, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\gamma \in [a, b]$ τέτοιος, ώστε:

$$f(\gamma) = \frac{\kappa f(x_1) + \lambda f(x_2) + \rho f(x_3)}{\kappa + \lambda + \rho}.$$

84. Έστω $f : [0, 5] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής και γνησίως μονότονη συνάρτηση με $f(0) = 7$ και $f(5) = 1$.

Να αποδείξετε ότι:

i. Υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0, 5)$ τέτοιος, ώστε:

$$f(x_0) = \frac{f(x_1) + 2f(x_2) + 3f(x_3) + 4f(x_4)}{10}$$

ii. Η εξίσωση $f(x) = 6$ έχει μοναδική ρίζα.

85. Έστω συνάρτηση f συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $[a, b]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει

$$\gamma \in [a, b] \text{ τέτοιος, ώστε: } f(\gamma) = \frac{f(a) + f(b) + f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{3}.$$

86. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής με $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

i. Η συνάρτηση $g(x) = f(x) - x$, $x \in [0, 1]$ έχει ελάχιστη τιμή.

ii. Υπάρχει $x_0 \in [0, 1]$, ώστε $f(x) \geq f(x_0) - x_0$ για κάθε $x_0 \in [0, 1]$.

Σύνολο τιμών

87. Να βρείτε το σύνολο τιμών των συναρτήσεων:

i. $f(x) = 5x + 3$, $x \in [-1, 2]$,

ii. $f(x) = -2x + 1$, $x \in [-1, 2]$,

ΘΕΩΡΗΜΑ BOLZANO-ΒΑΣΙΚΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

iii. $f(x) = \ln x + 2e^x, x \in (0,1],$

iv. $f(x) = \frac{3}{x} + \sin x, x \in (0,\pi).$

88. Να βρείτε το σύνολο τιμών των συναρτήσεων:

i. $f(x) = x^5 + x^3 + 2x + 3, x \in [-1,1],$

ii. $f(x) = \frac{x}{x^2 - 4}, x \in (-2,2),$

iii. $f(x) = \sin^3 x - \eta\mu^3 x - 2x, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],$

iv. $f(x) = \frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}}, x \in (-2,2).$

89. Δίνεται η συνάρτηση $f: (0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{1}{x} - \ln x$

i. Να βρείτε τη μονοτονία της παραπάνω συνάρτησης

ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

iii. Να δείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $x_0 \in (0,1]$ τέτοιος, ώστε $3x_0 = 2 - 2x_0 \ln x_0$

90. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + \ln x - 1$.

i. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

ii. Να δείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $x_0 > 0$ τέτοιος, ώστε $e^{x_0} + \ln x_0 = 1$

91. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - e^{-x} + x + 1$.

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

iii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία μόνο ρίζα.

92. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 2]$ και

γνησίως φθίνουσα στο $[2, +\infty)$ για την οποία ισχύουν ότι: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ και

$f(2) = 3$, να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$ και το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .

93. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ με $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \gamma \in \mathbb{R}$

και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \delta \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα $x_0 > 0$ τέτοιος, ώστε

$$f(x_0) + e^{x_0+1} + \ln x_0 = 1.$$

ΘΕΩΡΗΜΑ BOLZANO-ΒΑΣΙΚΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

94. Να δείξετε ότι η εξίσωση $2x \ln \frac{1}{x} = 1$ έχει μία, τουλάχιστον, θετική ρίζα.

95. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) + \ln x - 1 = 0$ έχει μία, τουλάχιστον, θετική ρίζα.

96. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι γνησίως φθίνουσα. Αν η f έχει σύνολο τιμών το διάστημα $\Delta = (-\infty, 1)$, να βρείτε τα παρακάτω όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + f(x)}{x + 2}$

ii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2 + xf(x)}{x - 2}.$

97. Έστω $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση με $f(x) = x^2 - \frac{1}{x} + 1$

i. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

ii. Να δείξετε ότι υπάρχει αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} και ότι είναι γνησίως αύξουσα.

iii. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x + f^{-1}(x)}{x + f^{-1}(x)}$, αν γνωρίζουμε ότι η f^{-1} είναι συνεχής.

98. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση τέμνει τον $y'y$ στο σημείο με τεταγμένη 3.

Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(-2)x^3 + 5x^2 - 2x - 2]$.

99. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)f(x)}{\sqrt{x+3}-2} = 8. \text{ Να βρείτε:}$$

i. Το $f(1)$

ii. Το όριο $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(3)x^5 + 5x^2 - 2x - 12]$.

100. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $xf(x) = (x^2 - 4)e^x$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο $(-2, 2)$.

101. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [1, 2]$. Να

αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{f(x)}{x-1} + \frac{f(x)}{x-2} = 0$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο $(1, 2)$.

ΘΕΩΡΗΜΑ BOLZANO-ΒΑΣΙΚΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

102. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει ότι:

$$x^3 f^2(x) - 2x^5 f(x) + x^2 - x + 1 = 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

i. Να βρεθεί το $f(1)$.

ii. Να αποδείξετε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

103. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) \neq x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ενώ η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A(3,2)$. Να αποδείξετε ότι:

i. $f(x) < x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ii. Υπάρχει $\xi \in (-1,1)$ τέτοιο, ώστε $\xi \cdot f(\xi) = 1$.