

2.1 Η έννοια της παραγώγου**A. Υπολογισμός παραγώγου στο x_0**

1. Να υπολογιστεί η παράγωγος των παρακάτω συναρτήσεων στο x_0 , όταν :

i. $f(x) = x^3 + 2x - 3, x_0 = 1$

ii. $f(x) = \sqrt{x^2 + 5} + x^2, x_0 = 2$

iii. $f(x) = |x - 3| + x^2, x_0 = 3$

iv. $f(x) = \sin^2 x, x_0 = 0$

2. Να υπολογίσετε την παράγωγο της f στο x_0 , στις παρακάτω περιπτώσεις:

i. $f(3+h) = 2 + 3h + h^4$, για κάθε $h \in \mathbb{R}$ και $x_0 = 3$

ii. $f(1+h) = 1 + h^2 + \eta\mu 2h$, για κάθε $h \in \mathbb{R}$ και $x_0 = 1$

3. Να βρείτε (αν υπάρχει) την παράγωγο f στο x_0 , στις παρακάτω περιπτώσεις:

i. $f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 5x + 6, & x \leq 1 \\ 2\sqrt{x^2 + 3}, & x > 1 \end{cases}, x_0 = 1$

ii. $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 3x + 3, & x \leq 1 \\ 2\sqrt{3x^2 - 2}, & x > 1 \end{cases}, x_0 = 1$

4. Να βρείτε (αν υπάρχει) την παράγωγο f στο x_0 , στις παρακάτω περιπτώσεις:

i. $f(x) = \begin{cases} x^3 \eta\mu \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}, x_0 = 0$

ii. $f(x) = \begin{cases} x^3 \sigma\upsilon\nu \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ \eta\mu x, & x = 0 \end{cases}, x_0 = 0$

iii. $f(x) = \begin{cases} \eta\mu x \cdot e^{\frac{1}{x}}, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x^3 e^{-\frac{1}{x}}, & x > 0 \end{cases}, x_0 = 0$

Β. Εύρεση παραμέτρων

5. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση f να είναι παραγωγίσιμη στο x_0 στις παρακάτω περιπτώσεις:

i. $f(x) = \begin{cases} x^3 + \alpha x + 1, & x \leq 0 \\ x^2 + x + \alpha^2, & x > 0 \end{cases}, x_0 = 0$

ii. $f(x) = \begin{cases} x^2 - \alpha x + 2, & x < 1 \\ \beta \sqrt{x}, & x > 1 \end{cases}, x_0 = 1$

iii. $f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha x + \beta, & x \leq 1 \\ \sqrt{x^2 + 3}, & x > 1 \end{cases}, x_0 = 1$

iv. $f(x) = \begin{cases} \alpha^2 \sqrt{x}, & 0 \leq x < 1 \\ \frac{x^2 + \beta}{4}, & x \geq 1 \end{cases}, x_0 = 1$

6. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση f να είναι παραγωγίσιμη στο x_0 στις παρακάτω περιπτώσεις:

i. $f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha x + \beta, & x < 2 \\ 3, & x = 2 \\ \gamma x^2 + x - 3, & x > 2 \end{cases}, x_0 = 2$

ii. $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + \alpha x - 2}{x - 1}, & x < 1 \\ \gamma x^2 + \beta x + \alpha, & x \geq 1 \end{cases}, x_0 = 1$

iii. $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + \alpha x + \beta}{x - 1}, & x < 1 \\ \beta x^2 + \gamma, & x \geq 1 \end{cases}, x_0 = 1$

Γ. Παράγωγος και συνέχεια

7. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$g(x) = (\sqrt{x^2 + 3} - 2)f(x) \text{ είναι παραγωγίσιμη στο } x_0 = 1.$$

8. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$ και , να αποδείξετε ότι:

i. $f(1) = 2$

ii. $f'(1) = 3$

9. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0=2$ και $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = 10$, να αποδείξετε ότι:

i. $f(2) = 0$

ii. $f'(2) = 10$

10. Έστω συνάρτηση f με $f(1)=1$ και $f'(1)=2$ και η $g(x) = \begin{cases} f^3(x) & , x \leq 1 \\ ax^2 + \beta & , x > 1 \end{cases}$.

Να βρείτε $a, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε η g να είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$.

11. Αν $f(x) = \begin{cases} g(x) \ln \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$, και $g(0)=g'(0)=0$ να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f

είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

12. Δίνεται η συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ και $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{\sqrt{x^2-5}-2} = 2$.

Αν f συνεχής στο $x_0=3$, να βρείτε το $f'(3)$.

13. Αν η συνάρτηση g είναι ορισμένη στο $\mathbb{R}$ και συνεχής στο $x_0=1$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = |x^2-1|g(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$, αν και μόνο αν $g(1)=0$

Δ. Παράγωγος και όρια

14. Έστω η συνάρτηση f με $f(2)=2$ και $f'(2)=-1$. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f^3(x)-8}{x^2-4}$.

15. Η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο $\mathbb{R}$ και συνεχής στο $x_0=2$ με $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-x^2+6x}{x-2} = 6$.

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f παραγωγίζεται στο $x_0=2$ και να βρείτε την $f'(2)$.

16. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $x_0=2$, να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4f(x)-x^2f(2)}{x-2}$.

17. Έστω συνάρτηση f η οποία ικανοποιεί τη σχέση $2x \ln x \leq xf(x) \leq \ln^2 x + x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν $f(0)=0$, να αποδείξετε ότι η f παραγωγίζεται στο $x_0=0$ και να βρείτε την $f'(0)$.

18. Έστω συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$, συνεχής στο $x_0=0$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση $|xf(x) - \ln^2 x| \leq x^4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

- 19.** Αν $|f(x) - \eta\mu 2x| \leq \sqrt{x^2 + 1} - 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε το $f'(0)$.
- 20.** Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ισχύει $f(x) \leq x^2 + g(x)$ και οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο $x_0 = 3$ με $f(3) - g(3) = 9$, να αποδείξετε ότι $f'(3) - g'(3) = 6$.
- 21.** Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , να δείξετε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{xf(x_0) - x_0f(x)}{x - x_0} = f(x_0) - x_0f'(x_0).$$

Ε. Θεωρητικές

- 22.** Έστω συνάρτηση f η οποία ικανοποιεί τη σχέση $f^3(x) + xf^2(x) = x^3 + \eta\mu^3 x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν η f παραγωγίζεται στο $x_0 = 0$ να βρείτε την $f'(0)$.
- 23.** Αν για τις συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει $|f(x)| \leq |g(x)|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $g(0) = g'(0) = 0$, να αποδείξετε ότι $f'(0) = 0$.
- 24.** Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση στο 1.

Αν η συνάρτηση $g(x) = \begin{cases} f^3(x) + 2f^2(x), & x < 1 \\ f^2(x) + 2, & x \geq 1 \end{cases}$, είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$, να βρεθεί

- i. $f(1)$
 - ii. $f'(1)$
- 25.** Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη $x_0 = 0$ και ισχύει $f^3(x) + xf^2(x) = 2x^3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι $f'(0) = 1$.
- 26.** Αν $f^3(x) + f(x) + 8 = x^3$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι:
- i. Η f είναι συνεχής στο $x_0 = 2$
 - ii. $f'(2) = 12$
- 27.** Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο $x_0 = 0$ και ισχύει $f^2(x) + g^2(x) = 2x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι $[f'(0)]^2 + [g'(0)]^2 = 2$.
- 28.** Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο $x_0 = 1$ και ισχύει $f^2(x) + g^2(x) = (x^2 - 1)^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι $[f'(1)]^2 + [g'(1)]^2 = 4$.

ΣΤ. Παράγωγος και συναρτησιακές σχέσεις

- 29.** Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο 0 με $f'(0)=1$, η οποία για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση $f(x+y) = f(x)\sin 2y + f(y)\sin 2x$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$, με $f'(x_0) = \sin 2x_0$.
- 30.** Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο 1 με $f'(1)=2$, η οποία για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^*$ ικανοποιεί τη σχέση $f(xy) = f(x) + f(y)$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x_0 \in \mathbb{R}^*$, με $f'(x_0) = \frac{2}{x_0}$.
- 31.** Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο a , με $f'(a) = 2a - 3$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$, με $f'(x_0) = 2x_0 - 3$.
- 32.** Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $f(0) = 0$ και ισχύει: $f(x+y) \leq f(x) + f(y) + xy$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι $f'(x) = x + f'(0)$.

Ζ. Παράγωγος και αλλαγή μεταβλητής

- 33.** Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο $\mathbb{R}$ και παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = a$, να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow a} \frac{xf(x) - af(a)}{x - a} = f(a) + af'(a)$
- 34.** Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο $\mathbb{R}$ και παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ με $f'(0) = 2$, να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:
- i. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x) - f(0)}{x}$
- ii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(7x) - f(3x)}{x}$
- 35.** Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο $\mathbb{R}$ και παραγωγίσιμη στο x_0 με $f'(x_0) = a$, να αποδείξετε ότι $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + 2h) - f(x_0 - 3h)}{h} = 5a$.
- 36.** Αν η συνάρτηση f είναι περιττή και η κλίση της στο $x_0 = -1$ είναι 3 , να βρεθεί η κλίση της f στο $x_0 = 1$.
- 37.** Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε:

- i. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + 2h) - f(x_0)}{h} = 2f'(x_0)$
- ii. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - h) - f(x_0 + 3h)}{h} = -4f'(x_0)$
- iii. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^2(x_0 - h) - f^2(x_0)}{h} = -2f(x_0)f'(x_0)$
- iv. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h^2) - f(x_0)}{h} = 0$

38. Έστω μια συνάρτηση f η οποία για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση $f(x) - f(y) \leq (x - y)^2$

Να αποδείξετε ότι:

- i. $|f(x) - f(y)| \leq (x - y)^2$ κάθε $x, y \in \mathbb{R}$
- ii. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ με $f'(x_0) = 0$.

#2,2-2.3Παράγωγος συνάρτηση-Κανόνες παραγώγισης

A. Κανόνες παραγώγισης

B. Εφαπτομένη

1. Να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$, όταν:

- i. $f(x) = \frac{x^2}{2} - x + 1$ και $x_0 = -2$
- ii. $f(x) = \frac{1}{x-1} + x - 1$ και $x_0 = 2$
- iii. $f(x) = |x - 2| + 2x$ και $x_0 = 1$

2. Να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$, όταν:

- i. $f(x) = \begin{cases} \eta\mu 2x & , x \leq 0 \\ 2x + 1 - \sigma\upsilon\nu x, & x > 0 \end{cases}$ και $x_0 = 0$
- ii. $f(x) = \begin{cases} x^3 \sigma\upsilon\nu \frac{5}{x}, & x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$ και $x_0 = 0$

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - x + 2$. Να βρείτε το σημείο της C_f στο οποίο η εφαπτομένη:

- i. Σχηματίζει με τον $x'x$ γωνία $\omega = 135^\circ$

- ii. Είναι παράλληλη στην ευθεία $\varepsilon: y = 3x - 1$
- iii. Είναι κάθετη στη χορδή AB με $A(0, f(0))$ και $B(2, f(2))$
- iv. Είναι παράλληλη στον $x'x$.
4. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $\varepsilon: y = x - 1$ έχει με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^3 - x^2$ δύο κοινά σημεία και εφάπτεται αυτής σε ένα από τα σημεία αυτά.
5. Αν $f(x) = ax^2 + bx$, να βρείτε τις τιμές των $a, b \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η γραφική παράσταση της f στο $A(1, 5)$ έχει εφαπτομένη με κλίση 8.
6. Αν $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x}, & x \leq 0 \\ \eta\mu x + 1, & x > 0 \end{cases}$ να αποδείξετε ότι ορίζεται η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης στο $A(0, 1)$ και σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\omega = 60^\circ$.
7. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που είναι κάθετη στην εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = x^2 - x + 3$ στο $A(2, 5)$.
8. Αν $f(x) = ax^3 - bx^2 + 2$, να βρείτε τις τιμές των $a, b \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η γραφική παράσταση της f στο $A(-1, 2)$ έχει εφαπτομένη που σχηματίζει τον άξονα $x'x$ γωνία $\omega = 45^\circ$.
9. Δίνεται $f(x) = \begin{cases} ax^2 + \beta, & x \leq 2 \\ x^3 + \gamma x, & x > 2 \end{cases}$, να βρείτε τις τιμές των $a, b, \gamma \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η γραφική παράσταση της f στο $A(2, f(2))$ έχει εφαπτομένη παράλληλη στην ευθεία $\varepsilon: y = 8x - 1$.
10. Δίνεται $f(x) = \begin{cases} -x^3 + 2x, & x \leq 1 \\ 2 - x, & x > 1 \end{cases}$,
- i. Δείξτε ότι η γραφική παράσταση της f δέχεται εφαπτομένη στο $x_0 = 1$
- ii. Ποια γωνία σχηματίζει η εφαπτομένη που βρίσκουμε με τους άξονες $x'x$ και $y'y$
- iii. Δείξτε ότι η εφαπτομένη που βρήκατε σχηματίζει με τους άξονες τρίγωνο εμβαδού $E = g'(0)$ όπου $g(x) = \eta\mu 2x$.
11. Να προσδιοριστεί ο $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^3 + 2x^2 - \lambda x$ να μην δέχεται οριζόντια εφαπτομένη.

- 12.** Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^3 - x^2 + ax + 1$ $a \in \mathbb{R}$
- Na δείξετε ότι για κάθε $a \in \mathbb{R}$ οι εφαπτόμενες της C_f στο $A(-1, f(-1))$ διέρχονται από σταθερό σημείο.
 - Για $a = -4$, να βρείτε το σημείο M της εφαπτομένης ε της C_f στο $A(-1, f(-1))$, που απέχει τη μικρότερη απόσταση από την αρχή των αξόνων.
- 13.** Να βρείτε τα $a, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η ευθεία $\varepsilon: y = ax + 1$ να εφάπτεται της C_f στο $x_0 = -1$, όταν $f(x) = \beta x^2 - ax + 2$.
- 14.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2$. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων στη γραφική παράσταση της f , που διέρχονται από το σημείο $M(0, -4)$.
- 15.** Να αποδείξετε ότι η ευθεία $\varepsilon: y = 2x - 3$ εφάπτεται της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = x^2 + 4x - 2$.
- 16.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = 2x^2 - 5x + 3$, η οποία διέρχεται από το σημείο $M(0, 3)$.
- 17.** Να βρεθούν τα $a, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε οι C_f, C_g να έχουν κοινή εφαπτομένη στο $x_0 = 1$ όπου $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ και $g(x) = ax^2 + 2\beta x + 2$.
- 18.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{-x}$. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
- 19.** Να βρείτε τις τιμές των $a \in \mathbb{R}$ ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 + ax + a + \frac{3}{4}$ να εφάπτεται στον άξονα $x'x$.
- 20.** Να δείξετε ότι η ευθεία $\varepsilon: y = 8x - 21$ εφάπτεται της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = 3x^2 - 4x - 9$.
- 21.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 3ax + 4a$ και η ευθεία $\varepsilon: y = ax + 1$. Να βρείτε το $a \in \mathbb{R}$, ώστε η ευθεία ε να εφάπτεται της C_f .
- 22.** Αν C_f και C_g οι γραφικές παραστάσεις των $f(x) = x^2 - 4x + 5$ και $g(x) = x^2 + 2x - 4$ αντιστοίχως να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(3, f(3))$ εφάπτεται και της C_g .

- 23.** Έστω οι συναρτήσεις $f(x) = \ln \frac{1}{x}$ και $g(x) = e^{-x}$. Αν η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο A και η C_g τον άξονα $y'y$ στο B, να δείξετε ότι η ευθεία AB είναι κοινή εφαπτομένη των C_f και C_g .
- 24.** C_f και C_g οι γραφικές παραστάσεις των $f(x) = x^2 - x + 3$ και $g(x) = -x^2 + 2x + a, a \in \mathbb{R}$, να βρεθεί η τιμή του a , ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(1, f(1))$, να εφάπτεται και της C_g .
- 25.** Έστω οι συναρτήσεις $f(x) = kx^2 - 2\lambda x + k$ και $g(x) = x^3 - x + \lambda$. Να βρείτε τις τιμές των k, λ , ώστε οι C_f και C_g να έχουν κοινή εφαπτομένη στο $x_0 = 1$.
- 26.** Να βρείτε την κοινή εφαπτομένη των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $f(x) = x^2 - 2x$ και $g(x) = -x^2 - 5$.
- 27.** Έστω οι συναρτήσεις $f(x) = e^{-x}$ και $g(x) = e^{\lambda-x}$. Να βρείτε το λ , ώστε η κοινή εφαπτομένη αυτών να διέρχεται από το σημείο $M(1, 0)$.
- 28.** Να βρεθούν οι κοινές εφαπτόμενες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $f(x) = x^2$ και $g(x) = -\frac{1}{x^2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$.
- 29.** Να βρεθούν οι κοινές εφαπτόμενες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $f(x) = 4 - x^2$ και $g(x) = -x^2 + 8x - 20$.
- 30.** Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 2x^2 + \lambda x$ και $g(x) = x^2 + \mu$, με $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Αν η ευθεία $y = 2x$ είναι κοινή εφαπτομένη των f και g τότε:
- Να βρεθούν τα λ και μ .
 - Αν $\lambda = 2$ και $\mu = 1$ να εξετάσετε αν υπάρχει άλλη κοινή εφαπτομένη των f και g .
- 31.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu 3x + x$.
- Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f σε τυχαίο σημείο $A(x_0, f(x_0))$
 - Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in \left(-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right)$ στο οποίο η εφαπτομένη της C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
- 32.** Για μια συνάρτηση f ισχύει $x^2 + 6x \leq f(x) \leq x + 5\eta\mu x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- Να δείξετε ότι $f(0) = 0$.

- ii. Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 και να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(0, f(0))$.
33. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f και η ευθεία $\varepsilon: y = -x + 3$ που εφάπτεται της C_f στο σημείο $A(0, f(0))$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_g της συνάρτησης $g(x) = f(\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x) + \eta\mu 2x$ στο σημείο της $B\left(\frac{\pi}{4}, g\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$.
34. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με $f(x) = g(x^2 + 2^x)$. Αν η ευθεία $\varepsilon: y = x - 1$ εφάπτεται της C_g στο $x_1 = 3$, να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο $x_2 = 1$.
35. Μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(0) = 1$. Αν για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ είναι $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)$, να αποδείξετε ότι $f'(x) = 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
36. Δίνεται η ευθεία $\varepsilon: 54x + (2e^4 + 1)y - 3 = 0$ και η συνάρτηση f τέτοια ώστε $f(x^3) = e^{x+1} + \ln(x-1)$ για κάθε $x > 1$. Αν η f είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x > 1$, δείξτε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο $x_0 = 27$ είναι κάθετη στην ευθεία ε .
37. Δίνεται η γνησίως μονότονη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση $f(f(x) + y) = f(x + y) + 2$.
- Να δείξετε ότι $f(x) = x + f(0)$, $x \in \mathbb{R}$.
 - Να βρεθεί ο τύπος της f .
 - Να αποδειχθεί ότι η C_f εφάπτεται της C_g όπου $g(x) = \ln x + 3$, με $x > 0$.
38. Δίνονται οι συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$ και $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, από τις οποίες η f είναι μία φορά παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και η g δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Αν $g^2(x) + (g'(x))^2 = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $M(a, \beta)$ είναι κοινό σημείο των γραφικών παραστάσεων f και $h(x) = f(x)g'(x)$, $x \in \mathbb{R}$, να αποδειχθεί ότι:
- $g'(a) = 1$ και $g(a) + g''(a) = 0$
 - $g(a) = 0$
 - Οι C_f και C_h έχουν στο σημείο M κοινή εφαπτομένη.
39. Μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση:
- $$f(x+1) - f(2-x) = x^2 + 14x - 5 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

- i. Να αποδειχθεί ότι $3f(x) - 2f(3-x) = x^2 + 12x - 18$.
- ii. Να βρεθεί ο τύπος της f .
- iii. Να αποδειχθεί ότι οι εφαπτόμενες προς της C_f , οι οποίες άγονται από το σημείο $K\left(1, -\frac{1}{4}\right)$.

40. Μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση:

$$f(x-2) \leq x^2 - 3x + 2 \leq f(x-3) + 2x - 4 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Έστω μεταβλητή ευθεία η οποία διέρχεται από το σημείο $M\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ και τέμνει τη C_f

σε δύο διαφορετικά σημεία A και B.

- i. Να βρεθεί ο τύπος της f .
- ii. Να αποδειχθεί ότι οι εφαπτόμενες της C_f στα A, B τέμνονται κάθετα.
- iii. Να αποδειχθεί ότι το σημείο τομής των παραπάνω εφαπτόμενων κινείται στη σταθερή ευθεία με εξίσωση $y = -\frac{1}{2}$.