

Μελέτη συνάρτησης

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$.

- i. Να μελετηθεί η συνάρτηση.
- ii. Να γίνει η γραφική παράσταση.

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 - 4x^3 + 11$.

- i. Να μελετηθεί η συνάρτηση.
- ii. Να γίνει η γραφική παράσταση.

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 + x + 2}{x - 1}$.

- i. Να μελετηθεί η συνάρτηση.
- ii. Να γίνει η γραφική παράσταση.

4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x^2 - 1}{x^2 - 1}$.

- i. Να μελετηθεί η συνάρτηση.
- ii. Να γίνει η γραφική παράσταση.

5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x - 1 + \frac{1}{x - 1}$.

- i. Να μελετηθεί η συνάρτηση.
- ii. Να γίνει η γραφική παράσταση.

6. Να μελετήσετε και να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση $f(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}$.

7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = xe^{-x}$.

- i. Να γίνει ο πίνακας μεταβολών της f .
- ii. Να μελετηθεί η συνάρτηση f .
- iii. Να γίνει η γραφική παράσταση της f .
- iv. Να βρεθεί το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $x = \lambda e^x$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.

8. Να μελετήσετε και να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση $f(x) = \frac{1 + 2 \ln x}{x}$.

9. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln x + 1}{x}$.

- i. Να γίνει ο πίνακας μεταβολών της f .

ΜΕΛΕΤΗ ΓΡΑΦΙΚΗΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

- ii. Να μελετηθεί η συνάρτηση f .
- iii. Να γίνει η γραφική παράσταση της f .
- iv. Να βρεθεί το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $\ln x - \lambda x + 1 = 0$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.

10. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x$.

- i. Να μελετήσετε και να παραστήσετε γραφικά την f .
- ii. Να βρεθεί το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $x^3 - 3x = a$ για τις διάφορες τιμές του $a \in \mathbb{R}$.

11. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^3}{x-2}$.

- i. Να μελετήσετε και να παραστήσετε γραφικά την f .
- ii. Να βρεθεί το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $x^3 = \lambda(x-2)$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.

12. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x - \eta\mu x$.

- i. Να μελετήσετε και να παραστήσετε γραφικά την f .
- ii. Να βρεθεί το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $\eta\mu x + \lambda = x$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.

Γενικές.

13. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 \ln x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$. Να αποδείξετε ότι:

- i. Η f είναι συνεχής.
- ii. Να βρείτε την $f'(0)$.
- iii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και την κυρτότητα.
- iv. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

14. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x + \frac{\eta\mu x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$. Να αποδείξετε ότι:

- i. Η f είναι συνεχής.
- ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .
- iii. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f .

ΜΕΛΕΤΗ ΓΡΑΦΙΚΗΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

15. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$

- i. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία, την κυρτότητα και να βρείτε τα ακρότατα αυτής.
- ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .
- iii. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $e^{\frac{1}{x}} = \frac{a}{x}$, για τις διάφορες τιμές του $a \in \mathbb{R}$.
- iv. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} \left(f\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x^2} \ln(1+x) \right)$.

16. Έστω η συνάρτηση $f(x) = e^x$ και η ευθεία $\varepsilon: y = x$.

- i. Να βρείτε ότι η C_f είναι πάνω από την ευθεία ε .
- ii. Να βρείτε το σημείο της C_f το οποίο απέχει τη μικρότερη απόσταση από την ευθεία ε και στη συνέχεια την απόστασή του από την ε .
- iii. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x-1) - x^2 + 1)$.

17. Έστω ο μιγαδικός $z = a + \beta i$, $a, \beta \in \mathbb{R}$ με $a \neq 0$ που η εικόνα του ανήκει στο μοναδιαίο

κύκλο και η συνάρτηση $f(x) = \frac{|x-z|^2 - |x+z|^2}{x^2 + |z|^2}$.

- i. Να βρείτε τα όρια: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
- ii. Αν ισχύει $|z-1| < |z+1|$, να βρείτε τα ακρότατα της f και το σύνολο τιμών της.