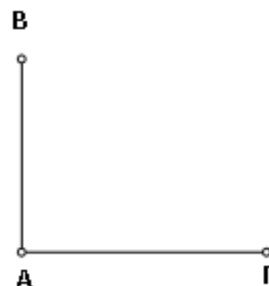


2.4 Ρυθμός μεταβολής

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x$.
 - i. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της f ως προς x στο σημείο $x_0 = 0$.
 - ii. Για ποιες τιμές του x ο ρυθμός μεταβολής της f ως προς x είναι θετικός και για ποιες αρνητικός;
 - iii. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης της C_f στο $A(x, f(x))$ ως προς x στο $x_0 = 1$.
2. Μια εταιρία εκτιμά ότι το κόστος παραγωγής x μονάδων ενός από τα προϊόντα της δίνεται από τη σχέση $K(x) = \frac{1}{3}x^3 - 15x^2 + 400x + 2014$ ευρώ, ενώ η τιμή πώλησης από την συνάρτηση $E(x) = 200x$ ευρώ. Να βρείτε το οριακό κέρδος για πώληση 15 μονάδων του προϊόντος.
3. Ένα κινητό ξεκινάει από την αρχή των αξόνων και κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = \sqrt{x-1}$, $x \geq 1$. Σε ποιο σημείο M της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης x του M είναι τριπλάσιος του ρυθμού μεταβολής της τεταγμένης y αν $y'(t) > 0$ για κάθε $t \geq 0$;
4. Αν ο όγκος V μιας σφαιρικής μπάλας αυξάνεται με ρυθμό $425\text{cm}^3 / \text{sec}$, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της επιφάνειας της E , όταν η ακτίνα είναι $R = 17\text{cm}$.
Υπενθυμίζουμε ότι: $E = 4\pi R^2$, $V = \frac{4}{3}\pi R^3$
5. Έστω η συνάρτηση $f(x) = e^x$ και A σημείο της γραφικής παράστασης της C_f , στο οποίο η εφαπτομένη διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
 - i. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης.
 - ii. Αν ένα κινητό M κινείται κατά μήκος της καμπύλης της C_f και καθώς περνάει από το A η τετμημένη του x ελαττώνεται με ρυθμό 3 μονάδες ανά δευτερόλεπτο, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του τη χρονική στιγμή που το M περνάει από το A .
6. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 2kx + \lambda$ με $k, \lambda \in \mathbb{R}$.
 - i. Να βρείτε τα $k, \lambda \in \mathbb{R}$ ώστε ο άξονας $x'x$ να εφάπτεται της C_f .

- ii. Έστω x, y οι διαστάσεις ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου. Αν η διάσταση x μεταβάλλεται με ρυθμό κ cm/sec και η διάσταση y μεταβάλλεται με ρυθμό λ cm/sec, όπου κ, λ οι πραγματικοί αριθμοί του πρώτου ερωτήματος, να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού του ορθογωνίου παραλληλογράμμου τη χρονική στιγμή που το $x=3\text{cm}$ και το $y=5\text{cm}$.

7. Στο διπλανό σχήμα είναι $\hat{A} = 90^\circ$. Από το σημείο A διέρχεται ένας ποδηλάτης που κινείται ευθύγραμμα προς το σημείο Γ με σταθερή ταχύτητα 4 m/sec. Στο σημείο B που απέχει 5 m από το σημείο A, βρίσκεται ένας ακίνητος παρατηρητής. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της απόστασης ποδηλάτη - παρατηρητή όταν η απόσταση αυτή είναι 13 m.



8. Σε ένα οξυγώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ABΓ με $AB=AG=10\text{cm}$, η πλευρά BΓ αυξάνει με ρυθμό $2\sqrt{3}\text{cm/sec}$. Αν $x = B\Gamma$ και $\theta = \hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma}$, να βρεθεί:
- Το εμβαδόν E του τριγώνου συναρτήσει των x και θ .
 - Το x συνάρτηση της γωνίας θ .
 - Ο ρυθμός μεταβολής της γωνίας θ τη χρονική στιγμή t_0 που το τρίγωνο ABΓ είναι ισόπλευρο.
9. Η θέση ενός κινητού που κινείται σε μια ευθεία δίνεται κάθε χρονική στιγμή από τη συνάρτηση θέσης: $x(t) = t^3 - 6t^2 + 9t - 4$ με $t \in [0, 5]$ (t σε min).
- Να βρεθεί η θέση του κινητού τη χρονική στιγμή $t=0$.
 - Να βρεθεί η ταχύτητα του κινητού κάθε χρονική στιγμή, καθώς και η επιτάχυνσή του.
 - Να βρεθούν ποιες χρονικές στιγμές αλλάζει η φορά της κίνησης του κινητού.
 - Ποια χρονικά διαστήματα το κινητό κινείται προς τα δεξιά και ποια προς τα αριστερά.
 - Να βρεθεί το συνολικό διάστημα που διένυσε το κινητό τα πρώτα 5 λεπτά της κίνησής του.
 - Να βρεθεί η μέση ταχύτητα του κινητού τα πρώτα 5 λεπτά της κίνησής του.
 - Σε ποιες χρονικές στιγμές η ταχύτητα του κινητού θα έχει μέτρο 9;
 - Τι δείχνει η τιμή $|x(5) - x(0)|$;
10. Δύο αυτοκίνητα A και B κινούνται κατά μήκος δύο κάθετων δρόμων AG και BΓ με ταχύτητες 50km/h και 100km/h αντίστοιχα. Να βρεθεί:

ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

- i. Συνάρτηση που δίνει την απόσταση των δύο αυτοκινήτων σε σχέση με τις αποστάσεις των οχημάτων από το σημείο Γ.
 - ii. Η απόσταση των δύο οχημάτων τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία το πρώτο όχημα απέχει από τη διασταύρωση 800m και το δεύτερο 600m.
 - iii. Ο ρυθμός μεταβολής της απόστασης AB ως προς το χρόνο την παραπάνω στιγμή t_0 .
- 11.** Τα άκρα A και B ενός ευθύγραμμου τμήματος $AB=10\text{cm}$ ολισθαίνουν αντίστοιχα επί των ημιαξόνων Ox και Oy ενός καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων xOy. Τη χρονική στιγμή t_0 που το A απέχει 6cm από την αρχή O, η ταχύτητά του είναι 4cm/sec.
- i. Αν $OA=x$ και $OB=y$, να γραφεί σχέση που δίνει το y συναρτήσει του x.
 - ii. Να βρεθεί η ταχύτητα με την οποία το σημείο B πλησιάζει την αρχή O τη χρονική στιγμή που απέχει 8cm από αυτή.
 - iii. Να εκφραστεί το εμβαδόν E του τριγώνου OAB ως συνάρτηση του x.
 - iv. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού E του τριγώνου OAB ως προς το x και ως προς το χρόνο.
 - v. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του E ως προς το χρόνο τη χρονική στιγμή t_0 .
- 12.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x$.
- i. Να βρείτε το σημείο A της εφαπτομένης ε της C_f στο $M(a, f(a))$ με τον άξονα $x'x$.
 - ii. Έστω ότι ένα κινητό M κινείται κατά μήκος της C_f . Αν ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης $a(t)$ του M δίνεται από τον τύπο $a'(t) = 2a(t)$, να βρείτε:
 - α. Το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του σημείου τομής A της εφαπτομένης της C_f στο M με τον άξονα $x'x$.
 - β. Το ρυθμό μεταβολής της γωνίας θ που σχηματίζει η εφαπτομένη με τον $x'x$ την ίδια χρονική στιγμή με το α ερώτημα.
- 13.** Οι πλευρές AB και AG ενός τριγώνου ABΓ ελαττώνονται με ρυθμό 3cm/sec και 4cm/sec αντίστοιχα, ενώ η γωνία $\hat{A}$ μειώνεται με ρυθμό 2rad/sec. Να βρεθεί:
- i. Η σχέση που συνδέει τις πλευρές του τριγώνου με τη γωνία $\hat{A}$.
 - ii. Το είδος του τριγώνου τη χρονική στιγμή t_0 που είναι $AB=6\text{cm}$, $AG=8\text{cm}$ και $B\Gamma=10\text{cm}$.
 - iii. Το ρυθμό μεταβολής της πλευράς BΓ τη χρονική στιγμή t_0 .

ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

- 14.** Ένα κινητό M κινείται στη καμπύλη $C: y = e^x$ και η κλίση της καμπύλης στο σημείο A είναι 1. Καθώς το M περνάει από το A η τετμημένη x αυξάνει με ρυθμό 3 μονάδες το δευτερόλεπτο. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της απόστασης $r=(OM)$ τη χρονική στιγμή που το κινητό περνάει από το A .
- 15.** Ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ έχει κάθετες πλευρές $A\Gamma=12\text{cm}$ και $AB=32\text{cm}$. Αν η πλευρά $A\Gamma$ αυξάνεται με ρυθμό 6cm/sec και η πλευρά AB ελαττώνεται με ρυθμό 4cm/sec , να βρεθεί ο ρυθμός αύξησης ή ελάττωσης του εμβαδού ύστερα από 3 sec.