

ΘΕΩΡΗΜΑ ROLLE**A. Συνθήκες θεωρήματος Rolle**

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 + x^2 - 8x + 1$.
 - i. Να εξεταστεί αν για την f ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[-2, 2]$.
 - ii. Αν ναι να εφαρμοστεί το θεώρημα Rolle για την παραπάνω συνάρτηση.
2. Να εξεταστεί αν για τις παρακάτω συναρτήσεις εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle στο αντίστοιχο διάστημα και αν ναι, να εφαρμοστεί:
 - i. $f(x) = \eta\mu 2x + \sigma\upsilon\nu 2x - 1, x \in [0, \pi]$
 - ii. $g(x) = x^2 - 4x + |x-2| + 3, x \in [1, 3]$
3. Να εξετάσετε από τις παρακάτω συναρτήσεις ποιές ικανοποιούν τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[a, \beta]$ που δίνεται και στη συνέχεια για εκείνες που ισχύει το θεώρημα, να βρείτε όλα τα $\xi \in (a, \beta)$ για τα οποία $f'(\xi) = 0$.
 - i. $f(x) = -x^3 + x - 1, x \in [0, 1]$.
 - ii. $f(x) = x^5 - 1, x \in [-1, 2]$.
 - iii. $g(x) = |x| - 1, x \in [-2, 2]$.
 - iv. $g(x) = \begin{cases} x-1, & x \in [-1, 0) \\ x^3, & x \in [0, 1] \end{cases}$.

B. Εύρεση παραμέτρων

4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 - kx + \lambda, & x \in [-1, 0) \\ \mu x^2 + 2x + 2, & x \in [0, 1] \end{cases}$.

Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς k, λ, μ αν ισχύουν για την f οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[-1, 1]$.

5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} ax^2 + \beta x, & x \in [-1, 0) \\ x^3 + \gamma, & x \in [0, 1] \end{cases}$.

Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, β, γ αν ισχύουν για την f οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[-1, 1]$ και στη συνέχεια το σημείο $x_0 \in (-1, 1)$ για το οποίο ισχύει $f'(x_0) = 0$.

6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} (\alpha+3)x+\beta+2, & x \leq 1 \\ \alpha x^2 + (\gamma+1)x + \beta + 1, & x > 1 \end{cases}$.

- i. Να βρεθεί η τιμή του γ έτσι, ώστε η f να είναι συνεχής.
- ii. Να βρεθεί η τιμή του α έτσι, ώστε η f να είναι παραγωγίσιμη.
- iii. Να βρεθούν οι α, β και γ έτσι, ώστε για την f να ισχύει το θεώρημα Rolle στο διάστημα $[-3, 5]$ και η C_f να διέρχεται από το σημείο $M(2, 12)$.
- iv. Να εφαρμοστεί το θεώρημα Rolle για την f στο διάστημα $[-3, 5]$.

Γ. Ύπαρξη ρίζας με το θ.Rolle

7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \lambda x^5 - x^4 - (\lambda - 1)x$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

- i. Η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.
- ii. Η εξίσωση $5\lambda x - \frac{\lambda - 1}{x^3} = 4$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.

8. Έστω f μία συνάρτηση η οποία είναι συνεχής στο $[0, \pi]$, παραγωγίσιμη στο $(0, \pi)$ και ισχύει $f(0) + f(\pi) = 0$.

- i. Να δείξετε ότι για τη συνάρτηση $g(x) = f(x) \sin x$, $x \in [0, \pi]$, ισχύουν οι υποθέσεις του θ.Rolle.
- ii. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0, \pi)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = f'(\xi) \sin \xi$.

9. Έστω η συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f(x) = (x - 1)f(x^2)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι:

- i. Για τη συνάρτηση $g(x) = f(x^2)$ ισχύει το θ.Rolle στο $[0, 1]$.
- ii. Υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, 1)$, τέτοιο ώστε $f'(\xi) = g(\xi)$.

10. Έστω η συνάρτηση f η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[a, \beta]$ και ισχύει $f'(a) = f(a)$ και $f'(\beta) = f(\beta)$. Να δείξετε ότι:

i. Για τη συνάρτηση $g(x) = [f'(x) - f(x)]e^{2x}$, ισχύει το θ .Rolle στο $[a, \beta]$.

ii. Υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (a, \beta)$, τέτοιο ώστε $f(\xi) = \frac{f'(\xi) + f''(\xi)}{2}$.

11. Έστω η συνάρτηση $f(x) = 4ax^3 + 3\frac{\beta}{2}x^2 + 2(\gamma - \delta)x + \delta$ με $a + \frac{\beta}{2} + \gamma = 0$. Να δείξετε ότι

υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, 1)$ έτσι ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο

$M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

12. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ τέτοια ώστε για τους $a, \beta \in \mathbb{R}$ με $a < \beta$, να ισχύει $3f^2(a) + 2f^2(\beta) = 2[3f(a) + 2f(\beta)] - 5$. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει μία τουλάχιστον εφαπτομένη παράλληλη στον άξονα $x'x$.

13. Έστω οι θετικοί αριθμοί a, β με $a < \beta$ και $a, \beta \neq 1$, τέτοιοι ώστε $a^\beta = \beta^a$. Να δείξετε ότι:

i. Για τη συνάρτηση $g(x) = \frac{\ln x}{x}$, ισχύει το θ .Rolle στο $[a, \beta]$.

ii. $a < e < \beta$.

14. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f στο διάστημα $[a, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (a, β) . Να δείξετε με τη βοήθεια της συνάρτησης $g(x) = e^{f(x)}(x-a)(x-\beta)$ $x \in \mathbb{R}$, ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = \frac{1}{a-x_0} + \frac{1}{\beta-x_0}$.

Γ. Πολλαπλή εφαρμογή του θ .Rolle

15. Αν μια πολυωνυμική συνάρτηση $f(x)$ τρίτου βαθμού έχει όλες τις ρίζες της πραγματικές και άνισες, να αποδείξετε ότι και η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει όλες τις ρίζες πραγματικές.

16. Μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με: $f(1) = f(2) = f(3)$.

Να αποδειχθεί ότι υπάρχει $\xi \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f''(\xi) = 0$.

- 17.** Αν η συνάρτηση f είναι τρεις φορές παραγωγίσιμη στο $[a, \beta]$ με $f(a)=f(\beta)$ και $f'(a)=f'(\beta)=0$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f'''(\xi)=0$.
- 18.** Αν η εξίσωση $x^4+ax^3+3\beta x^2+\gamma x+\delta=0$ έχει όλες τις ρίζες πραγματικές και άνισες μεταξύ τους $(a, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι $a^2 > 8\beta$.

Δ. Rolle σε βοηθητική συνάρτηση

- 19.** Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $[1, 3]$ και παραγωγίσιμη στο $(1, 3)$ με $f(1) - f(3) = -24$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (1, 3)$ με $f'(\xi) - 6\xi = 0$.
- 20.** Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $[0, 3]$ και παραγωγίσιμη στο $(0, 3)$ με $f(0) = 0$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 3)$ με $(3 - \xi)f'(\xi) = f(\xi)$.
- 21.** Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $[2, 3]$ και παραγωγίσιμη στο $(2, 3)$ με $9f(2) = 4f(3)$.
Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (2, 3)$ με $f'(\xi) = \frac{2f(\xi)}{\xi}$.
- 22.** Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[1, 2]$ και παραγωγίσιμη στο $(1, 2)$ με $f(2) - f(1) = 3$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f'(x) = 2x$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(1, 2)$.
- 23.** Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $[0, 2]$ και παραγωγίσιμη στο $(0, 2)$ με $f(2) - f(0) = 6$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 2)$ με $f'(\xi) - 3\xi^2 + \xi = 0$.
- 24.** Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα $[a, \beta]$ και παραγωγίζεται στο διάστημα (a, β) με: $f(a) - f(\beta) = a^3 - \beta^3$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 3\xi^2$.
- 25.** Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f(6) = 3f(2)$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει $\xi \in (2, 6)$ τέτοιο ώστε $\xi f'(\xi) = f(\xi)$.
- 26.** Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f(1) = e^2 - e$ και $f(2) = \frac{e^2}{2}$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει $\xi \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε $\xi^2 f'(\xi) + e^\xi \cdot \xi - e^\xi = 0$.

- 27.** Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\pi}$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει $\xi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \frac{\text{συν}\xi - f(\xi)}{\xi}$.
- 28.** Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f(1) = 2$ και $f(2) = 1$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει $\xi \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) \cdot f'(f(\xi)) = 1$.
- 29.** Έστω f συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[a, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο διάστημα (a, β) . Να αποδειχθεί ότι υπάρχει $\gamma \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\gamma) = \frac{f(a) - f(\beta)}{\gamma - \beta}$.
- 30.** Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\gamma \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f'(\gamma) = \frac{2\gamma f(\gamma)}{1 - \gamma^2}$.
- 31.** Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(1) = 1$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 > 0$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = 2 - \frac{f(x_0)}{x_0}$.
- 32.** Έστω συνάρτηση $f : [a, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, $(0 < a < \beta)$, είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $f(x) > 0$, για κάθε $x \in [a, \beta]$. Αν $(f(\beta))^\beta = (f(a))^\alpha$, να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) \ln f(x_0) = x_0 f'(x_0)$.
- 33.** Να δείξετε ότι η εξίσωση $3x^2 + 2\lambda x - \lambda - 1 = 0$ έχει μια, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.
- 34.** Έστω $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Αν $f'(0) > 0$ και $f(1) = 2 + f(0)$, να αποδείξετε ότι:
- i. Υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $a \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε $f'(a) = 4a$.
 - ii. Υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\beta \in (0, a)$ τέτοιο, ώστε $f'(\beta) = 5\beta$.
- 35.** Έστω η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[1, 2]$ και παραγωγίσιμη στο $(1, 2)$ και ισχύει $f(2) - f(1) = 3 - \ln 2$, να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε $x_0 f'(x_0) = 2x_0^2 - 1$.

- 36.** Έστω μία συνάρτηση f , η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f(1) = 1$, $f(2) = 4 - \ln 2$, $f(e) = e^2 - 1$. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (1, e)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi) = \frac{1}{\xi^2} + 2$.
- 37.** Έστω μία συνάρτηση f , η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύουν $f(-1) = f(1) = 1$ και $f(0) = 0$. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (1, e)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(\xi, f'(\xi))$ να είναι παράλληλη στην ευθεία $\varepsilon: y = 2x - 3$.
- 38.** Έστω $f: [1, e] \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $(1, e)$. Αν $f(e) = 0$, να δείξετε ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον $\xi \in (1, e)$ τέτοιο, ώστε $\xi f'(\xi) \ln \xi = -f(\xi)$.
- 39.** Αν η συνάρτηση $f: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής, παραγωγίσιμη στο $(0, \pi)$ και η C_f δεν τέμνει τον άξονα $x'x$, να δείξετε ότι υπάρχει $\gamma \in (0, \pi)$ τέτοιο, ώστε $\sin \gamma f(\gamma) = f'(\gamma) \eta \mu \gamma$.
- 40.** Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία παραγωγίσιμη συνάρτηση και x_1, x_2 ($x_1 < x_2$) είναι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = xe^{x^2}$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$, ώστε $f'(\xi) - 2\xi f(\xi) = e^{\xi^2}$.
- 41.** Δίνεται μία συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής στο $[0, 1]$, παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$ και ισχύει $\frac{1}{f(0)} - \frac{1}{f(1)} = 1$. Αν $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [0, 1]$, να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0) = 2x_0 f^2(x_0)$.
- 42.** Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία παραγωγίσιμη συνάρτηση και ισχύει το θεώρημα του Rolle στο $[1, 4]$. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in \mathbb{R}^*$ τέτοιο, ώστε
$$\frac{1 - f'(\xi^2)}{3} = \frac{1 + f'(3\xi - 2)}{2\xi}.$$
- 43.** Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[2, 3]$, παραγωγίσιμη στο $(2, 3)$ και ισχύει $f(3) = 2f(2)$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (2, 3)$, τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$, να διέρχεται από το σημείο $A(1, 0)$.

- 44.** Έστω συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, μία παραγωγίσιμη συνάρτηση και x_1, x_2 ($x_1 < x_2$) ρίζες της εξίσωσης $f(x) + x^2 = 0$. Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(x_0, f(x_0))$, να διέρχεται από το σημείο $A(0, x_0^2)$.
- 45.** Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f(1) = f(2) = 0$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει $\xi \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = -f(\xi)$.
- 46.** Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $\frac{f(2)}{f(1)} = \sqrt{e}$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει $\xi \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε $\xi^2 f'(\xi) = f(\xi)$.
- 47.** Έστω f παραγωγίσιμη συνάρτηση στο διάστημα $[1, 2]$ με $f(1) = f(2) = 0$. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 2\xi f(\xi)$.
- 48.** Έστω f παραγωγίσιμη συνάρτηση στο διάστημα $[e, e^2]$ με $f(e^2) = 2f(e)$. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (e, e^2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) \ln \xi = f(\xi)$.
- 49.** Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη για την οποία ισχύει ότι $f(0) = f(2) = 2$ και $f(1) = 3$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, 2)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi) = 4 - 6\xi$.
- 50.** Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη για την οποία ισχύει ότι $f(0) = f(\pi) = f(2\pi) = 0$. Να αποδειχθεί ότι εξίσωση $[f'(x)]^2 + f(x) \cdot f'(x) + \eta \mu x = 0$ έχει μία τουλάχιστον πραγματική ρίζα.
- 51.** Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $[f(x)]^2 \leq f(x) \cdot f(1-x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(1-x) + (2-x)f'(x) = x \cdot f'(1-x) + f(x)$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0, 1)$.
- 52.** Έστω συνάρτηση $f : [a, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, $a > 0$, μια συνάρτηση η οποία είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $\beta f(a) = a f(\beta)$. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (a, \beta)$, τέτοιο ώστε η εφαπτομένη στη γραφική παράσταση της f στο σημείο $A(\xi, f(\xi))$, να διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

- 53.** Έστω f παραγωγίσιμη συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και ισχύει $a^{f(\beta)} = \beta^{f(a)}$ με $1 < a < \beta$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = \xi f'(\xi) \ln \xi$.
- 54.** Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $[1, e]$, έτσι ώστε να ισχύει $f(1) = \frac{f(e)}{e} + 1$. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα $x_0 \in (1, e)$ έτσι ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ να διέρχεται από το σημείο $B(0, x_0)$.
- 55.** Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f με $x > 0$, έτσι ώστε να ισχύει: $f(1) - f(e) = \frac{1}{e}$. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα $x_0 \in (1, e)$ έτσι ώστε $x_0^2 f'(x_0) + 1 - \ln x_0 = 0$.
- 56.** Έστω f συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[a, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο διάστημα (a, β) και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε $\frac{f'(x_0)}{f(x_0)} = \frac{1}{a-x_0} + \frac{1}{\beta-x_0}$.
- 57.** Δίνεται η συνάρτηση $h(x) = f(x) \ln(x^2 + ax)$ με $a > -2$ και f παραγωγίσιμη στο $[2, 4]$ με $f(2) = 2f(4) \neq 0$. Αν η h ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θ. Rolle στο διάστημα $[2, 4]$, να δείξετε ότι υπάρχει ένα $x_0 \in (2, 4)$ έτσι ώστε $f'(x_0) \ln x_0^{x_0} + f(x_0) = 0$.
- 58.** Έστω f παραγωγίσιμη συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και $a \in \mathbb{R}$ ώστε $f(a+1) = e f(a)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (a, a+1)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = f(x_0)$.
- 59.** Έστω f παραγωγίσιμη συνάρτηση στο διάστημα $[a, \beta]$ με $f(a) = \beta$, $f(\beta) = a$ και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\gamma \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\gamma) = \frac{f(\gamma)}{a + \beta - \gamma - 2f(\gamma)}$.
- 60.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-1) \ln(x+1)$.
- Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 1)$, τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$.
 - Να εξετάσετε αν η εξίσωση $(x+1)^{x+1} = e^{1-x}$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.

- 61.** Η συνάρτηση f είναι ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ με συνεχή παράγωγο στο $[0,1]$ και ισχύουν οι σχέσεις $f(1)-f(0)=\frac{1}{2}$ και $f'(0)>0$.

Να αποδείξετε ότι:

- i. Υπάρχει $a \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε $f'(a)=a$.
 - ii. Υπάρχει $\beta \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε $f'(\beta)=2\beta$.
- 62.** Δίνεται η συνάρτηση f ορισμένη στο $[a,\beta]$, δύο φορές παραγωγίσιμη με $f''(x) \neq 0$, $f(x)>0$ για κάθε $x \in [a,\beta]$ και $f(a)f'(\beta)=f(\beta)f'(a)$.

Να αποδείξετε ότι:

- i. Υπάρχει $\xi_1 \in (a,\beta)$ τέτοιο, ώστε $[f'(\xi_1)]^2 = f(\xi_1)f''(\xi_1)$.
- ii. Υπάρχει $\xi_2 \in (a,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi_2)(a-\beta) = f(\xi_2) \ln \frac{f(a)}{f(\beta)}$.

Ε. Σχέση πλήθους ριζών των f και f' (το πολύ κ ρίζες-ακριβώς κ ρίζες)

- 63.** Έστω $f:[1,2] \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με $f(2)=2f(1)$ και $f''(x) \neq 0$, για κάθε $x \in (1,2)$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = xf'(x)$ έχει μοναδική ρίζα στο $(1,2)$.
- 64.** Έστω $f:[0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, με $f''(x) \neq 2$, για κάθε $x \in [0,1]$. Αν για την f ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο $[0,1]$, να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in (0,1)$, στο οποίο οι εφαπτόμενες στη C_f και στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = x^2 - x$ είναι παράλληλες.
- 65.** Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, μία συνάρτηση η οποία είναι παραγωγίσιμη και ικανοποιεί τη σχέση $f'(x) \neq 6x-1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=3x^2-x+\lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$ έχει μία το πολύ ρίζα.
- 66.** Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, μία συνάρτηση η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη. Αν η εφαπτομένη της C_f σε οποιοδήποτε σημείο της δεν είναι παράλληλη στην ευθεία

$\varepsilon: y = 3x + 1$, να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = \frac{3x^2}{2} + 7x - \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$ έχει το πολύ δύο πραγματικές ρίζες.

- 67.** Δίνεται συνάρτηση f με $f''(x) \neq 2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = x^2 + \lambda x - \lambda$, έχει το πολύ δύο πραγματικές ρίζες.
- 68.** Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, μία συνάρτηση η οποία είναι παραγωγίσιμη και ικανοποιεί τη σχέση $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να λύσετε την εξίσωση $f(3x-2) - f(2x+1) = 0$.
- 69.** Έστω $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση η οποία είναι παραγωγίσιμη με $xf'(x) - x \neq -1$, για κάθε $x > 0$. Αν ισχύει $2 < 2f(x) < 3$, για κάθε $x \in [1, e]$, να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (1, e)$, ώστε $f(x_0) = x_0 - \ln x_0$.
- 70.** Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = 0$, η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ικανοποιεί τη σχέση $2f'(x) \neq (1-x)f''(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης $g(x) = (x-1)f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.
- 71.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $4x^3 - 21x^2 + 18x + 6\mu = 0$ έχει, για κάθε τιμή του $\mu \in \mathbb{R}$, το πολύ μία ρίζα στο διάστημα $(1, 2)$.
- 72.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^5 - 5x + \lambda = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$, δεν μπορεί να έχει δύο πραγματικές ρίζες στο διάστημα $(-1, 1)$.
- 73.** Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει το πολύ δύο ρίζες.
- 74.** Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα και μόνο σημείο στις παρακάτω περιπτώσεις.
- $f(x) = (x-1)e^x + 1$
 - $f(x) = (x+a)^4 - x^4 - a^4$, $a \neq 0$.
- 75.** Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^4 + e^x = 3x + 10$ με $a, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ έχει το πολύ δύο διαφορετικές πραγματικές ρίζες.
- 76.** Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = e^{\frac{x}{2}} + x + 1$, $x \in \mathbb{R}$ και $g(x) = e^{-x} - 2x^3 + 1$, $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι οι C_f και C_g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο το οποίο βρίσκεται πάνω στον άξονα $y'y$.

- 77.** Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=e^{x-2}+x$, $x \in \mathbb{R}$ και $g(x)=e^{2-x}-x+4$, $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι οι C_f και C_g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο το οποίο να προσδιορίσετε.
- 78.** Έστω f παραγωγίσιμη συνάρτηση με $x>0$, έτσι ώστε να ισχύει:
 $f^2(x)+f(x)-6x=3\ln x+2014$ για $x>1$. Να αποδείξετε ότι η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ το πολύ σε ένα σημείο.
- 79.** Έστω μία συνάρτηση f , η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $[0,\pi]$ και ισχύει
 $\sin x \cdot f(x) \neq \eta \mu x \cdot f'(x)$, για κάθε $x \in [0,\pi]$. Να δείξετε ότι:
 i. $f(0)f(\pi) \neq 0$.
 ii. Η f έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0,\pi)$.
- 80.** Έστω οι συναρτήσεις f,g οι οποίες είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ και ισχύει
 $f(x) \cdot g'(x) \neq f'(x) \cdot g(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν x_1, x_2 διαδοχικές ρίζες της g με $x_1 < x_2$, να δείξετε ότι:
 i. Οι x_1, x_2 δεν είναι ρίζες της f .
 ii. Υπάρχει $x_3 \in (x_1, x_2)$ το οποίο είναι ρίζα της f .
- 81.** Έστω μία συνάρτηση f , η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ και ισχύει
 $(2x-1) \cdot f(x) \neq (x^2-x) \cdot f'(x)$, για κάθε $x \in [0,1]$. Να δείξετε ότι:
 i. $f(0)f(1) \neq 0$.
 ii. Η f έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$.
- 82.** Να αποδείξετε ότι εξίσωση $(x^2-1)\sin x+2\eta \mu x=0$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες.

ΣΤ. Συνδιαστικές-Θεωρητικές ασκήσεις

83. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- i. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.
- ii. Η f δεν είναι άρτια συνάρτηση.
- iii. Αν $f(x) + f(4-x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να λυθεί η εξίσωση $f(x) = 0$.

84. Έστω f παραγωγίσιμη συνάρτηση στο διάστημα $\Delta = (a, \beta)$ με: $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x) = \lambda$.

Να αποδειχθεί ότι:

- i. Η συνάρτηση $g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{αν } x \in (a, \beta) \\ \lambda, & \text{αν } x = a \text{ ή } x = \beta \end{cases}$ είναι συνεχής στο $[a, \beta]$,
- ii. Υπάρχει $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε, $f'(\xi) = 0$.

85. Δίνεται συνάρτηση $f: [0, 1] \rightarrow (0, 1)$ συνεχής στο διάστημα $[0, 1]$ και παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0, 1)$ με $|f'(x)| < 1$ για κάθε $x \in (0, 1)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = \xi$.

86. Αν η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι:

- i. Μεταξύ δύο ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$ υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης $f'(x) = 0$.
- ii. Μεταξύ δύο ριζών της εξίσωσης $f'(x) = 0$ υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης $f''(x) = 0$.
- iii. Μεταξύ δύο διαδοχικών ριζών της $f'(x) = 0$ υπάρχει μία το πολύ ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$.
- iv. Αν η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο $\mathbb{R}$, τότε η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει το πολύ δύο διαφορετικές ρίζες.

87. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση η οποία είναι παραγωγίσιμη και ο μιγαδικός αριθμός z για τον οποίο ισχύουν:

- i. $\operatorname{Re}(z) \operatorname{Im}(z) \neq 0$
- ii. $z + \frac{1}{z} = f(0)$

iii. $|z+1| = \sqrt{2+f(1)}$

Να δείξετε ότι:

α. $|z|=1$ και στη συνέχεια ότι $f(0) = 2\operatorname{Re}(z)$.

β. υπάρχει $a \in (0,1)$, ώστε $f'(a) = 0$.

88. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $[a,\beta]$ με $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [a,\beta]$ και οι μιγαδικοί αριθμοί $z = -e^a + if(a)$, $z = -ie^\beta + f(\beta)$.

i. Αν $a \geq 0$ και $|z|=1$ να βρείτε τον πραγματικό αριθμό a .

ii. Αν $\operatorname{Im}(zw)=0$ να δείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $x_0 \in (a,\beta)$ έτσι ώστε $f(x_0) = 0$.

iii. Αν ο μιγαδικός αριθμός $u = zw \in \mathbb{I}$ να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον ένα $\xi \in (a,\beta)$, έτσι ώστε $f'(\xi) = f(\xi)$.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ

A. Συνθήκες-Συμπεράσματα του Θ.Μ.Τ

89. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + x + 3$.

i. Να αποδειχθεί ότι για την f εφαρμόζεται στο διάστημα $[-2,4]$ το θεώρημα της μέσης τιμής.

ii. Να εφαρμοστεί το Θ.Μ.Τ για την f στο διάστημα $[-2,4]$ και να ερμηνευτεί γεωμετρικά το αποτέλεσμα.

90. Να εξετάσετε αν ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ για τη συνάρτηση $f(x) = x^3 + x^2 - 3x - 5$ στο διάστημα $[-1,1]$.

i. Αν ισχύουν να βρείτε $\xi \in (-1,1)$ τέτοιο ώστε $2f'(\xi) = f(1) - f(-1)$

ii. Να δείξετε ότι η εφαπτομένη ευθεία της C_f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$, είναι παράλληλη στην τέμνουσα της C_f , ευθεία $\varepsilon: 2x + y + 4 = 0$.

91. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} x^2 + a, & x \leq 1 \\ x^3 - ax + \beta, & x > 1 \end{cases}$

Αν για την f πληρούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής στο διάστημα $[-1,2]$, τότε:

- i. Να βρεθούν οι τιμές των α, β .
- ii. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει σημείο $M(\xi, f(\xi))$ με $\xi \in (-1,2)$, στο οποίο η εφαπτομένη (ε) προς τη C_f είναι παράλληλη στην ευθεία $(\eta): 2x - y + 3 = 0$.
- iii. Να βρεθεί η παράγωγος της f .
- iv. Να βρεθούν οι συντεταγμένες του σημείου M .

92. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} \frac{3-x^2}{2}, & x \leq 1 \\ \frac{1}{x}, & x > 1 \end{cases}$

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θ.Μ.Τ στο $[0,2]$ και να βρείτε τα σημεία $\xi \in (0,2)$ για τα οποία ισχύει $f'(\xi) = \frac{f(2) - f(0)}{2}$.

93. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[a, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο διάστημα (a, β) , με $f(a) = \beta$ και $f(\beta) = a$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = -1$.
94. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[a, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο διάστημα (a, β) , με $f(a) = 2\beta + 6a$ και $f(\beta) = 3a + 5\beta$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = 3$.
95. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση η οποία είναι παραγωγίσιμη και η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(1,2)$, $B(2,4)$ και $\Gamma(4,3)$. Να δείξετε ότι υπάρχουν δύο τουλάχιστον $\xi_1, \xi_2 \in (1,4)$ τέτοια ώστε οι εφαπτομένες της C_f , στα σημεία αυτά να είναι μεταξύ τους κάθετες.
96. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση η οποία είναι παραγωγίσιμη και η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(-1,2)$ και $B(1,3)$. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο M της C_f , στο οποίο η εφαπτομένη της C_f είναι κάθετη στην ευθεία $\varepsilon: 2x + y - 3 = 0$.

- 97.** Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη για την οποία ισχύει ότι: $f(1) + f(4) = f(2) + f(3)$. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, 4)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi) = 0$.
- 98.** Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση η οποία είναι παραγωγίσιμη με $f^2(1) - f^2(0) > 1$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 1)$, τέτοιο ώστε $f(\xi)f'(\xi) > \frac{1}{2}$.
- 99.** Έστω $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση με $f(0) = 0$ η οποία είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}, x > 0$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0, a), a > 0$, ώστε $\xi^2 f(a) = ag(\xi)$.
- 100.** Μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[-2, 2]$ και παραγωγίσιμη στο διάστημα $(-2, 2)$ με $f'(x) \leq 1$ για κάθε $x \in (-2, 2)$, $f(-2) = -2$ και $f(2) = 2$.
- Να εφαρμόσετε για την f το Θ.Μ.Τ στα διαστήματα $[-2, 0]$ και $[0, 2]$.
 - Να αποδείξετε ότι $f(0) = 0$.
- 101.** Σε έναν αγώνα δρόμου δύο αθλητές τερματίζουν ταυτόχρονα. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μία τουλάχιστον χρονική στιγμή t_0 στη διάρκεια του αγώνα, κατά την οποία οι δύο αθλητές έχουν την ίδια ταχύτητα.

B. Θ.Μ.Τ-θεώρημα Bolzano-θεώρημα Rolle-Πρόσημο f' και f''

- 102.** Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με συνεχή πρώτη παράγωγο για την οποία ισχύει: $f(3) - f(0) = 9$ και $f'(0) > 0$. Να αποδείξετε ότι:
- Υπάρχει $x_0 \in (0, 3)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0) = x_0^2$.
 - Υπάρχει $\xi \in (0, 3)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = 3\xi$.
- 103.** Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με συνεχή πρώτη παράγωγο για την οποία ισχύει: $f(2) - f(1) = 3$ και η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(1, f(1))$ είναι κάθετη στην ευθεία $2x + 8y - 2021 = 0$. Να αποδείξετε ότι:
- Υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (1, 2)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0) = 2x_0$.
 - Υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, 2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = 3\xi$.

- 104.** Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[a, \gamma]$ με $f(a) < a$, $f(\gamma) < \gamma$ και $f(\beta) > \beta$, όταν $\beta \in (a, \gamma)$ να αποδείξετε ότι υπάρχει εφαπτομένη της C_f παράλληλη στην ευθεία $y = x + 1$.
- 105.** Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[a, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο διάστημα (a, β) , με $f(a) = \beta$ και $f(\beta) = a$, να αποδείξετε ότι:
- Υπάρχει $\gamma \in (a, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f(\gamma) = \gamma$.
 - Υπάρχουν $\kappa, \lambda \in (a, \beta)$ τέτοια ώστε $f'(\kappa)f'(\lambda) = 1$.
- 106.** Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[a, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο διάστημα (a, β) , με $f(a) = 2\beta$ και $f(\beta) = 2a$, να αποδείξετε ότι:
- Η εξίσωση $f(x) = 2x$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (a, β) .
 - Υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (a, \beta)$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1)f'(\xi_2) = 4$.
- 107.** Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι:
 $2f(x) - 2x \leq f(4) + f(-4)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδειχθεί ότι:
- $f(4) - f(-4) = 8$
 - Υπάρχει σημείο $M(\xi, f(\xi))$, με $\xi \in (-4, 4)$, στο οποίο η εφαπτομένη της C_f είναι παράλληλη στην ευθεία $x - y + 2021 = 0$.
 - Υπάρχουν $x_0 \in (-4, 4)$, ώστε $f(x_0) - f(-4) = 4$.
 - Υπάρχουν $x_1, x_2 \in (-4, 4)$, ώστε $\frac{1}{f'(x_1)} + \frac{1}{f'(x_2)} = 2$.
- 108.** Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(1) = 2$ και $f(5) = 20$. Να αποδειχθεί ότι:
- Υπάρχει $x_1, x_2 \in (1, 5)$ με $x_1 < x_2$, ώστε $f(x_1) = 6$ και $f(x_2) = 12$.
 - Υπάρχουν $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in (1, 5)$, ώστε $\frac{2}{f'(\xi_1)} + \frac{3}{f'(\xi_2)} + \frac{4}{f'(\xi_3)} = 2$.
- 109.** Μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και η γραφική παράσταση της

C_f έχει τρία τουλάχιστον σημεία πάνω στην ευθεία $y = x$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει $\xi \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi) = 0$.

110. Έστω $a > 0$ και η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση στο διάστημα $[-a, a]$ συνάρτηση g . Αν $2g(0) = g(a) + g(-a)$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (-a, a)$ τέτοιο, ώστε: $g''(\xi) = 0$.

111. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ισχύει $g(a) + g(3a) = 2g(2a)$, $a > 0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (a, 3a)$ τέτοιο, ώστε: $g''(\xi) = 0$.

112. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη. Αν η εφαπτομένη της C_f στο $A(a, f(a))$ τέμνει τη C_f στο $B(\beta, f(\beta))$, $\beta > a$, να δείξετε ότι:

i. Η f' δεν είναι 1-1.

ii. Υπάρχει $\xi \in (a, \beta)$, τέτοιο ώστε $f''(\xi) = 0$.

113. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[1, 2]$ και παραγωγίσιμη στο διάστημα $(1, 2)$, με $f(1) = 3$, και $f(2) = 6$, να αποδείξετε ότι υπάρχει σημείο της C_f στο οποίο η εφαπτομένη της διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

114. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(1, -2)$, $B(2, 3)$ και $\Gamma(3, -1)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, 3)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi) = 0$.

115. Έστω $f: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση με $f(1) = 0$ η οποία είναι παραγωγίσιμη με $f(x) > 0$, για κάθε $x > 1$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\beta \in (1, a)$, $a > 1$ ώστε $f(a) > (\beta - 1)f'(\beta)$

116. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[1, 2]$ και παραγωγίσιμη στο διάστημα $(1, 2)$, με $f(1) = f(2)$, να αποδείξετε ότι:

i. Υπάρχει $\xi \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$.

ii. Υπάρχει $\gamma \in (1, 2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\gamma) = (2\gamma - 3)\frac{1}{2}e^{-f(\gamma)}$.

117. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[1,2]$, με $f(0) = 0$, και $f(1) = 1$, να αποδείξετε:

- i. Υπάρχει $\gamma \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε $f(\gamma) = \frac{1}{2}$.
- ii. Υπάρχουν $x_1, x_2 \in (0,1)$ τέτοια, ώστε $\frac{1}{f'(x_1)} + \frac{1}{f'(x_2)} = 2$.

118. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[1,2]$, με $f(2) = 4$, και $f(1) = 2$, να αποδείξετε:

- iii. Υπάρχει $x_0 \in (1,2)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 2(3 - x_0)$.
- iv. Υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (1,2)$ τέτοια, ώστε $f'(\xi_1)f'(\xi_2) = 4$.

119. Έστω f συνεχής συνάρτηση στο $[a,b]$ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο (a,b) με $f(a) = f(b) = 0$. Αν για κάποιο $\gamma \in (a,b)$ είναι $f(\gamma) > 0$, να αποδειχθεί ότι:

- i. Υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (a,b)$ τέτοια, ώστε $f'(\xi_1)f'(\xi_2) < 0$.
- ii. Υπάρχει $\xi \in (a,b)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi) < 0$.

120. Δίνεται η συνάρτηση f , η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και της οποίας η γραφική παράσταση C_f διέρχεται από τα σημεία $A(-2,1)$ και $B(1,7)$.

- i. Να αποδειχθεί ότι η f είναι 1-1.
- ii. Να λυθεί η εξίσωση $f^{-1}(-6 + f(x^2 - 8)) = -2$.
- iii. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο της C_f , στο οποίο η εφαπτομένη της C_f είναι κάθετη στην ευθεία $\varepsilon: x + 2y - 3 = 0$.

121. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τρεις φορές παραγωγίσιμη για την οποία ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x) - \eta\mu 3x \cdot \eta\mu 4x}{\eta\mu^2 x} = -2. \text{ Επίσης η εφαπτομένη της } C_f \text{ στο σημείο της } A(3, f(3))$$

έχει εξίσωση $y = -2x + 12$.

- i. Να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $B(0, f(0))$.
- ii. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{xf(x) - 18}{x^2 - 9}$
- iii. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0,3)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi) = -4$.

122. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται

από την αρχή των αξόνων και επίσης ισχύει ότι: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)f(x) + \eta\mu(x^2-1)}{\sqrt{x+3}-2} = 12$.

- i. Να βρεθεί η τιμή $f(1)$.
- ii. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)f(\xi) = \xi$.

123. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επίσης ισχύει

ότι: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)f(x) + \eta\mu(x^2-4)}{\sqrt{x-1}-1} = -2$ και $f^2(x) + f(x^2) = 2x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- i. Να βρεθούν οι τιμές $f(1)$ και $f(2)$.
- ii. Να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(1, f(1))$.
- iii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(x-3)f'(x) + f(x) = 1$, έχει μια τουλάχιστον λύση στο διάστημα $(1,2)$

124. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα $[a, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο διάστημα (a, β) , με $f(a) \neq f(\beta)$. Να αποδειχθεί ότι:

- i. Υπάρχει $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο, ώστε $4f(x_0) = f(a) + 3f(\beta)$.
- ii. Υπάρχουν $\xi_1, \xi_2, \xi \in (a, \beta)$ με $\xi_1 \neq \xi_2$, τέτοια ώστε: $\frac{3}{f'(\xi_1)} + \frac{1}{f'(\xi_2)} = \frac{4}{f'(\xi)}$.

125. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα $[a, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο διάστημα (a, β) .

- i. Αν $f(a) = f(\beta)$ να αποδειχθεί ότι υπάρχουν εφαπτόμενες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ της γραφικής παράστασης της f οι οποίες σχηματίζουν με τον άξονα $x'x$ ισοσκελές τρίγωνο.
- ii. Αν το τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφές τα σημεία $A(a, f(a))$, $B(\beta, f(\beta))$, $\Gamma(\gamma, f(\gamma))$ όπου $\gamma \in (a, \beta)$, είναι ορθογώνιο στο Γ , να δείξετε ότι υπάρχουν $\rho_1, \rho_2 \in (a, \beta)$ με $f'(\rho_1)f'(\rho_2) = -1$.

126. Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $[-2, 2]$ με $f'(-2) > 0$, $f'(2) > 0$ και $f(2) < f(-2)$. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f' έχει ένα

τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $x_0 \in (-2, 2)$, στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη στον x' .

127. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και ισχύει $2f(2) - 2f\left(\frac{1}{2}\right) = 3$, να

αποδείξετε ότι:

- i. Υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in \left(\frac{1}{2}, 2\right)$ τέτοιο ώστε $f'\left(\frac{1}{\xi}\right) = \xi^2$.
- ii. Υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in \left(\frac{1}{2}, 2\right)$ τέτοιο ώστε $3\psi\left(\frac{\pi}{\xi}\right) + 2\xi^2 = 0$.

128. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και x_1, x_2 ($x_1 < x_2$) ρίζες της. Αν $\gamma \in (x_1, x_2)$ και $f(\gamma) > 0$, να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi) < 0$.

129. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα $[0, 4]$ και παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0, 4)$. Αν $f(0) = -3$ και $f'(x) > 1$ για κάθε $x \in (0, 4)$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $(0, 4)$.

130. Έστω μία συνάρτηση $f: [a, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής με $f(x) \neq 0$, για κάθε $x \in [a, \beta]$ η οποία είναι γνησίως μονότονη και παραγωγίσιμη.

Να δείξετε ότι η εξίσωση $\frac{2}{f(x)} = \frac{1}{f(a)} + \frac{1}{f(\beta)}$ έχει μόνο μία ρίζα $x_0 \in (a, \beta)$.

131. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα $[a, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο διάστημα (a, β) με $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (a, \beta)$. Να αποδείξετε ότι:

- i. $f(a) \neq f(\beta)$.
- ii. Υπάρχει $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = \frac{f(a) + 2f(\beta)}{3}$.
- iii. Υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (a, \beta)$ τέτοια ώστε: $\frac{f'(\xi_1)}{f'(\xi_2)} = 2 \frac{\beta - x_0}{x_0 - a}$.
- iv. Υπάρχουν ξ_1, ξ_2, ξ_3 τέτοια, ώστε: $\frac{2}{f'(\xi_1)} + \frac{1}{f'(\xi_2)} = \frac{3}{f'(\xi_3)}$.

132. Έστω μία συνάρτηση $f: [a, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής με $f'(x) \neq 0$, για κάθε $x \in (a, \beta)$. Να δείξετε ότι:

i. Υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (a, \beta)$, τέτοιο ώστε $5f(x_0) = 2f(a) + 3f(\beta)$.

ii. Υπάρχουν $\xi_1, \xi_2, \xi \in (a, \beta)$ τέτοια, ώστε: $\frac{3}{f'(\xi_1)} + \frac{2}{f'(\xi_2)} = \frac{5}{f'(\xi)}$.

133. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα $[a, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο διάστημα (a, β) με $f(a) = a$ και $f(\beta) = \beta$. Να αποδειχθεί ότι:

i. Υπάρχει $\gamma \in (a, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f(\gamma) = a + \beta - \gamma$.

ii. Υπάρχουν $x_1, x_2 \in (a, \beta)$ με $x_1 \neq x_2$ τέτοια, ώστε $f(x_1)f'(x_2) = 1$.

Γ. Αποδείξεις ανισοτήτων και Θ.Μ.Τ

134. Έστω f συνεχής συνάρτηση στο $[1, 3]$ με $f(1) = 2$ και $2 < f'(x) < 4$ για κάθε $x \in (1, 3)$.

Να αποδειχθεί ότι $|f(3) - 8| < 2$.

135. Μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη με $|f'(x)| \leq 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν $f(1) = 2006$, να αποδείξετε ότι $2004 < f(2) < 2008$.

136. Μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο $[0, 1]$ με $f(0) = 2$ και για κάθε $x \in [0, 1]$ να ισχύει $|f'(x)| \leq 1$. Δείξτε ότι για κάθε $x \in (0, 1)$ ισχύει $1 < f(x) < 3$.

137. i. Να αποδείξετε ότι $\left| \frac{x^2 + \eta \mu x}{2x^2 + 2} \right| \leq \frac{1}{2}$

ii. Αν f είναι μία συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $f'(x) = \frac{x^2 + \eta \mu x}{2x^2 + 2}$, να αποδείξετε ότι

για όλα τα $a, \beta \in \mathbb{R}$, ισχύει $|f(\beta) - f(a)| \leq \frac{1}{2}|\beta - a|$.

138. Αν η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ και $f(0) = 0$, να δείξετε ότι $f'(1) < f(1) < f'(0)$.

139. Αν η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $[a, \beta]$, να δείξετε ότι $f\left(\frac{a+\beta}{2}\right) < \frac{f(a) + f(\beta)}{2}$.

140. Αν $0 < a < \beta < \frac{\pi}{2}$, τότε $\frac{a - \beta}{\sin^2 \beta} < \varepsilon \varphi a - \varepsilon \varphi \beta < \frac{a - \beta}{\sin^2 a}$.

141. Να αποδειχθεί ότι:

i. Για κάθε $x > 0$ είναι $\frac{1}{x+1} < \ln \frac{x+1}{x} < \frac{1}{x}$.

ii. Για κάθε φυσικό αριθμό $n > 0$, είναι $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} > \ln(n+1)$.

142. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) < x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι $f(4) - f(2) < 6$

143. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(-1) = 3$, η οποία είναι παραγωγίσιμη με $f'(-1) = 3$. Αν η f' είναι γνησίως φθίνουσα, να δείξετε ότι $f(x) \geq 2x + 5$, για κάθε $x \in [-1, 0]$.

144. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και η f' είναι γνησίως φθίνουσα. Να δείξετε ότι $f(x+1) + f(x+2) > f(x) + f(x+3)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

145. Έστω $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση με $f(0) = 0$ η οποία είναι συνεχής. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$, η f' είναι γνησίως αύξουσα και ισχύει $f'(x) > 0$, για κάθε $x > 0$, να δείξετε ότι $x < f(x) < xf'(x)$, για κάθε $x > 0$.

146. Μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και $f(0) = 2$. Αν $f^3(x) + 3f(x) = 3x + 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδειχθεί ότι:

i. Η συνάρτηση f είναι 1-1.

ii. $f(x) \leq x + 2$ για κάθε $x \geq 0$.

147. Να αποδείξετε ότι:

i. $|\eta\mu\alpha - \eta\mu\beta| \leq |\alpha - \beta|$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

ii. Αν $0 < \alpha < \beta$, τότε $1 - \frac{\alpha}{\beta} < \ln \frac{\beta}{\alpha} < \frac{\beta}{\alpha} - 1$.

iii. Αν $0 < \alpha < \beta$, τότε $e^\beta - e^\alpha < \beta e^\beta - \alpha e^\alpha$.

148. Να αποδείξετε ότι:

i. $2 - \frac{e}{n} < \ln n < \frac{n}{e}$.

ii. $\sin \frac{5n}{18} < \frac{1}{2} + \frac{n\sqrt{3}}{36}$.

iii. $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{n}{72} < \eta\mu \frac{5n}{18} < \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{n}{36}$.

149.Α. Θεωρούμε τη συνάρτηση f ορισμένη, παραγωγίσιμη και θετική σε ένα διάστημα Δ . Αν

η συνάρτηση $h(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ να αποδείξετε ότι για κάθε

$$\alpha, \beta \in \Delta \text{ με } \alpha < \beta \text{ ισχύει } \frac{f'(\beta)}{f(\beta)} < \frac{\ln f(\beta) - \ln f(\alpha)}{\beta - \alpha} < \frac{f'(\alpha)}{f(\alpha)}.$$

Β. Αποδείξτε ότι $\varepsilon\varphi\alpha < \frac{\ln \sigma\upsilon\nu\alpha - \ln \sigma\upsilon\nu\beta}{\beta - \alpha} < \varepsilon\varphi\beta$, $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$.

150. Να αποδείξετε ότι:

i. $|\sigma\upsilon\nu^2\alpha - \sigma\upsilon\nu^2\beta| \leq |\alpha - \beta|$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

ii. $|\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha - \beta\sigma\upsilon\nu\beta| < 2|\alpha - \beta|$ με $0 < \alpha < \beta < 1$.

151. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

Α. Αν η f' είναι γνησίως αύξουσα, να αποδείξετε ότι:

i. $f'(a) < \frac{f(x) - f(a)}{x - a} < f'(x)$ για κάθε $x > a$.

ii. $f'(x) < \frac{f(x) - f(a)}{x - a} < f'(a)$ για κάθε $x < a$.

Β. Αν η f' είναι γνησίως φθίνουσα, να αποδείξετε ότι:

i. $f'(x) < \frac{f(x) - f(a)}{x - a} < f'(a)$ για κάθε $x > a$.

ii. $f'(a) < \frac{f(x) - f(a)}{x - a} < f'(x)$ για κάθε $x < a$.

152. Να αποδείξετε ότι:

i. $e^x < \frac{e^x - 1}{x} < 1$ για κάθε $x < 0$.

ii. $\frac{x}{x+1} < \ln(x+1) < x$ για κάθε $x > 0$.

153. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα $[a, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο διάστημα (a, β) .

Αν η f' είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα (a, β) , να αποδειχθεί ότι:

i. Αν η f' είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα (a, β) , να αποδειχθεί ότι:

$$f\left(\frac{a+\beta}{2}\right) < \frac{f(a)+f(\beta)}{2}.$$

ii. Αν η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα (a,β) , να αποδείξετε ότι:

$$f\left(\frac{a+\beta}{2}\right) > \frac{f(a)+f(\beta)}{2}.$$

iii. Αν $f'(x) \leq 1$ για κάθε $x \in (a,\beta)$, $f(a) = a$ και $f(\beta) = \beta$, να αποδείξετε ότι:

iv. Να αποδείξετε ότι $2e^4 < e^3 + e^5$.

v. Να αποδείξετε ότι $\ln 3 + \ln 7 < 2 \ln 5$.

154. Αν $a^e > b^e > 1$, να αποδείξετε ότι: $a^a > b^b$.

155. Αν $0 < x_1 < x_2$, να αποδείξετε ότι: $\ln \frac{x_1 + x_2}{2} > \frac{\ln(x_1 x_2)}{2}$.

156. Αν η $f'(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι:

$$f(0) + f'(1) < f(1) < f(0) + f'(0).$$

157. Να λύσετε την εξίσωση $4^x + 5^x = 3^x + 6^x$.

158. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i. $3^x + 4^x = 2^x + 5^x$.

ii. $6^x + 9^x = 7^x + 8^x$.

iii. $4^x + 9^x = 7^x + 6^x$.

159. Μια συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ με $f(0) > 0$ και

$$f(1) = f'(1) = 0. \text{ Να αποδειχθεί ότι υπάρχει } \xi \in (0,1) \text{ τέτοιο, ώστε } f''(\xi) > 0.$$

160. Αν η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ με $f(1) = f(0) + \kappa$ και

$$f'(1) = f'(0) = \kappa. \text{ Να αποδειχθεί ότι υπάρχουν } x_1, x_2 \in (0,1) \text{ με } x_1 \neq x_2 \text{ και}$$

$$f''(x_1) = f''(x_2).$$

161. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[0,2]$ και ισχύει: $f(1) = 3$ και

$$|f'(x)| \leq 2 \text{ για κάθε } x \in (0,2).$$

Να αποδείξετε ότι:

i. Για κάθε $x \in [0,1]$ υπάρχει ξ_1 τέτοιο, ώστε: $f(x) = (x-1)f'(\xi_1) + f(1)$

ii. $1 \leq f(x) \leq 5$ για κάθε $x \in [0,2]$.

Δ. Θ.Μ.Τ και διαίρεση διαστήματος.

- 162.** Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[1,5]$ και ισχύει: $f(1) = -2$ και $f(5) = 2$. Να δείξετε ότι:
- Υπάρχει εφαπτομένη ε της C_f τέτοια ώστε να είναι παράλληλη στη διχοτόμου του 1ου τεταρτημορίου.
 - Υπάρχουν ξ_1, ξ_2 τέτοια ώστε $f'(\xi_1) = 2 - f'(\xi_2)$.
- 163.** Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα $[-a,a]$ και παραγωγίσιμη στο διάστημα $(-a,a)$ με $f(-a) = -f(a) = -a$. Αν $f'(x) \leq 1$ για κάθε $x \in (-a,a)$, να αποδειχθεί ότι $f(0) = 0$.
- 164.** Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα $[a,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο διάστημα (a,β) με $f(a) = f(\beta)$, να αποδειχθεί ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (a,\beta)$, τέτοια ώστε: $f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = 0$.
- 165.** Έστω μια συνάρτηση f για την οποία ισχύουν οι υποθέσεις θ . Rolle στο $[1,3]$. Να δείξετε ότι:
- Για την f ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ στα διαστήματα $[1,2]$ και $[2,3]$.
 - Υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (1,3)$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = 0$.
- 166.** Έστω μια συνάρτηση f για την οποία ισχύουν οι υποθέσεις θ . Rolle στο $[1,3]$. Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα και έχει σύνολο τιμών το $[0,2]$ να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (1,3)$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = -2$.
- 167.** Μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[4,6]$ και παραγωγίσιμη στο διάστημα $(4,6)$ με $f(6) - f(4) = 2$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (4,6)$, τέτοια ώστε $f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = 2$.
- 168.** Δίνεται συνάρτηση f και παραγωγίσιμη στο διάστημα $[0,1]$ με $f(0) = 1$ και $f(1) = 3$. Να αποδειχθεί ότι $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in (0,1)$ τέτοια, ώστε: $f'(\xi_1) + f'(\xi_2) + f'(\xi_3) = 6$.
- 169.** Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση η οποία είναι παραγωγίσιμη και για την οποία ισχύει ότι $f(10) - f(1) = 9$, να αποδείξετε ότι:

i. υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (1, 10)$, τέτοια ώστε $f'(\xi_1) + 2f'(\xi_2) = 3$.

ii. υπάρχουν $x_1, x_2 \in (1, 10)$, τέτοια ώστε $4f'(x_1) + 5f'(x_2) = 9$.

170. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα $[a, b]$ και παραγωγίσιμη στο διάστημα (a, b) . Να αποδειχθεί ότι:

i. Υπάρχουν $\xi_1, \xi_2, \xi \in (a, b)$ με $f'(\xi_1) + 2f'(\xi_2) = 3f'(\xi)$.

ii. Υπάρχουν $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi \in (a, b)$ με $f'(\xi_1) + 2f'(\xi_2) + 3f'(\xi_3) = 6f'(\xi)$.

171. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

i. Αν $f(19) = f(1)$ να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in (1, 19)$ τέτοιοι ώστε $2f'(\xi_1) + 3f'(\xi_2) + 4f'(\xi_3) = 0$.

ii. Αν $4f(19) - 2f(1) = f(13) + f(7)$ να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\rho_1, \rho_2, \rho_3 \in (1, 19)$ τέτοιοι ώστε $2f'(\rho_1) + 3f'(\rho_2) + 4f'(\rho_3) = 0$.

172. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $[a, b]$ με $f(a) = 1$ και $f(b) = 675$, να αποδειχθεί

ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in (a, b)$, ώστε $f'(\xi_1) + f'(\xi_2) + f'(\xi_3) = \frac{2022}{b-a}$.

Ε. ΘΕΩΡΗΤΙΚΕΣ-ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ

173. Έστω f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f(1) = 0$ και γνησίως αύξουσα παράγωγο. Θεωρούμε τη

συνάρτηση: $g(x) = \frac{f(x)}{x-1}$, αν $x \neq 1$

i. Να βρεθεί η $g'(x)$ ως συνάρτηση των f, f' .

ii. Να αποδειχθεί ότι η g έχει θετική παράγωγο.

174. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση με:

$f(0) = 0$ και $f(x) - e^{-f(x)} = x - 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

i. Να εκφραστεί η f' ως συνάρτηση της f .

ii. Να αποδειχθεί ότι η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και να βρεθεί ο αριθμός $f''(0)$.

iii. Να αποδειχθεί ότι οι συναρτήσεις f, f' είναι γνησίως αύξουσες.

- iv. Να αποδειχθεί ότι $\frac{x}{2} \leq f(x) \leq xf'(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Πότε ισχύει η ισότητα;
175. Μια συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ με $f(0) > 0$ και $f(1) = f'(1) = 0$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει $\xi \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi) > 0$.
176. Έστω $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση με $f(0) = 0$ η οποία είναι παραγωγίσιμη με $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$ δύο θετικές ρίζες της. Δίνεται επίσης συνάρτηση g για την οποία ισχύει $f'(x) = x^3 g(x), x > 0$. Να δείξετε ότι υπάρχει:
- $a \in (x_1, x_2)$, ώστε $g(a) = 0$.
 - $\xi \in (0, a)$, ώστε $f(a) = a\xi^3 g(\xi)$.
177. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) > 0, x \in \mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη και η συνάρτηση $g(x) = e^{-x}f(x)$. Να δείξετε ότι:
- Η συνάρτηση g ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θ.Μ.Τ στο $[0, a], a > 0$.
 - Υπάρχει $\beta \in (0, a)$, ώστε $af'(\beta) < af(\beta) + f(a)$.
178. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με f' να είναι 1-1. Να δείξετε ότι η εφαπτομένη ε της C_f σε οποιοδήποτε σημείο της $M(x_0, f(x_0))$ δεν έχει άλλο κοινό σημείο με τη C_f .
179. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και οι μιγαδικοί z, w που ικανοποιούν τις σχέσεις: $|z| = 2 - \bar{z}z$ και.
- Έστω, επιπλέον, ότι $f(0) = |z|$ και $f(1) = |w|$. Να δείξετε ότι υπάρχει:
- $a \in (0, 1)$, ώστε $f'(a) = 0$.
 - $\beta \in (0, a)$, ώστε $f(a) > af'(\beta)$.
180. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη και ικανοποιεί τη σχέση $f(2x+3) = f(2x+1) + 2e^x - 2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι υπάρχει:
- $a \in (1, 3)$, ώστε $f'(a) = 0$.
 - $\beta \in (1, 3)$, ώστε $f''(\beta) = \frac{1}{2}$.

181. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και οι μιγαδικοί z, w που ικανοποιούν τις σχέσεις: $|z| = 1$ και $w = \frac{2z - i}{iz + 2}$.

Έστω, επιπλέον, ότι $f(0) = |z|$ και $f(1) = 2|w|$. Να δείξετε ότι:

- i. $f(1) = 2$.
- ii. Υπάρχει $a \in (0, 1)$, ώστε $f'(a) = 1$.
- iii. Υπάρχει $\beta \in (0, a)$, ώστε $\beta f''(\beta) < 1$, όταν $f'(0) \geq 0$.

182. Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές στο $[0, e]$. Αν η C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων και $f(1) + f(e) = 0$ με $f(1) \neq f(e)$. Να δείξετε ότι:

- i. Υπάρχουν δύο τουλάχιστον ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο $[0, e]$.
- ii. Η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0, e)$.
- iii. Αν $f'(e) = |z^2| - 4\kappa\lambda + 1$, όπου $z \in \mathbb{C}$ με $z = \kappa - 2\lambda i$, $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$. Υπάρχει $\xi \in (0, e)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi) > 0$.

183. Αν η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[0, 2]$ με $f(1) = 1$ και $f(0) = f(2) = 0$. Να δείξετε ότι:

- i. Υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (0, 2)$ με $\xi_1 < \xi_2$, τέτοια ώστε $f'(\xi_1) - f'(\xi_2) = 2$.
- ii. Υπάρχει $\xi \in \mathbb{R}$, τέτοιο ώστε $f''(\xi) < -1$.