

ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ Θ.Μ.Τ-ΣΤΑΘΕΡΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

A. Σταθερή συνάρτηση

1. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και ικανοποιεί τη σχέση:
 $f'(x) + f(x) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

i. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = e^x f(x) - x + 1$, $x \in \mathbb{R}$ είναι σταθερή.

ii. Αν $f(0) = 0$, να βρείτε την f .

2. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη. Να αποδειχθεί ότι στις παρακάτω περιπτώσεις η συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι σταθερή και να βρεθεί η τιμή της.

i. $g(x) = f(x)f(-x)$, αν $f'(x)f(-x) = x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 1$.

ii. $g(x) = f^2(x) + f^2(-x)$, αν $f'(x) = 3f(-x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f'(0) = 3$.

3. Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = 0$ και $g(0) = 1$.

Αν ισχύει $f'(x) = g(x)$ και $f(x) = -g'(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να αποδειχθεί ότι:

i. Η συνάρτηση $\varphi(x) = f^2(x) + g^2(x)$ είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.

ii. $f^2(x) + g^2(x) = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

iii. Η συνάρτηση $h(x) = (f(x) - \eta\mu x)^2 + (g(x) - \sigma\upsilon\nu x)^2$ είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.

iv. $f(x) = \eta\mu x$ και $g(x) = \sigma\upsilon\nu x$, $x \in \mathbb{R}$.

4. Έστω $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση για την οποία ισχύει: $(1 + \ln x)f(x) + f'(x) = 0$, για κάθε $x > 0$.

i. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = x^x f(x)$, $x > 0$ είναι σταθερή.

ii. Αν $f(1) = 1$, να βρείτε την f .

5. Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f'(x) = -g^2(x)$ και $g'(x) = f^2(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

i. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $h(x) = f^3(x) + g^3(x)$ είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.

ii. Να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης h , αν $f(0) = 1$ και $g(0) = 2$.

6. Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοιες ώστε να ισχύουν οι σχέσεις:

$$f(x) \neq 0 \text{ και } g(x) \neq 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}, f(0) = g(0) = 1 \text{ και } f'(x) = \frac{1}{g(x)}, g'(x) = -\frac{1}{f(x)}.$$

i. Δείξτε ότι $f(x) \cdot g(x) = 1$

ii. Να βρεθούν οι τύποι των συναρτήσεων f, g .

B1. Εύρεση της f από παράγουσες βασικών συναρτήσεων.

7. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και για την οποία ισχύει ότι $f(2) = 5$ και $f'(x) = 2x + 3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τον τύπο της f .

8. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και για την οποία ισχύει ότι $f(0) = 3$ και $f'(x) = e^x - \eta\mu x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τον τύπο της f .

9. Έστω συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και για την οποία ισχύει ότι

$$f(1) = 3 \text{ και } f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \text{ για κάθε } x > 0. \text{ Να βρείτε τον τύπο της } f.$$

10. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και για την οποία ισχύει ότι $f(0) = 0$ και $f'(x) = 2x \cdot \eta\mu x + x^2 \cdot \sigma\upsilon\nu x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τον τύπο της f .

11. Έστω συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και για την οποία ισχύει

$$\text{ότι } f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \text{ και } f'(x) = -\frac{x\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}{x^2} \text{ για κάθε } x > 0. \text{ Να βρείτε τον τύπο της } f.$$

12. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις.

i. $f'(x) = 3x + \frac{2}{x} + 1, x \in \Delta = (0, +\infty)$ και $f(1) = \frac{5}{2}$.

ii. $f''(x) = e^x - \eta\mu x, x \in \Delta = \mathbb{R}$ και $f'(0) = f(0) = 1$.

iii. $f'(x) = x(2\sigma\upsilon\nu x - x\eta\mu x), x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 1$.

iv. $f'(x) = \frac{1-x}{e^x},$ και $f(0) = 2$.

13. Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f''(x) = g''(x) + 6x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(1) = g(1)$, $f'(1) = 4$ και $g'(1) = 0$. Να βρείτε τα διαστήματα του x που η C_f είναι πάνω από τη C_g .

14. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν $f''(x) + f''(4-x) = 2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(2) = 1$. Να δείξετε ότι:

i. $f'(x) - f'(4-x) = 2x - 4$, $x \in \mathbb{R}$.

ii. $f(x) + f(4-x) = x^2 - 4x + 6$, $x \in \mathbb{R}$.

B2. Εύρεση της f από κανόνες παραγωγίσιμης.

15. Έστω $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f(\pi) = 0$, για την οποία ισχύει:

$$xf'(x) + f(x) = \sin x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}. \text{ Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης } f.$$

16. Έστω $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f(\ln 2) = 16$, για την οποία ισχύει:

$$xf'(x) - f(x) = x^2 \cdot e^x, \text{ για κάθε } x > 0. \text{ Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης } f.$$

17. Έστω $f: \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi^2}{72}$, για την οποία ισχύει:

$$f'(x) \eta \mu x - f(x) \sigma \upsilon \nu x = 2x \cdot \eta \mu^2 x, \text{ για κάθε } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right). \text{ Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης } f.$$

18. Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(0) = 0$ και

$$2f'(x) = e^{x-f(x)}, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}. \text{ Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης } f.$$

19. Έστω $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση με $f(\pi) = 0$, η οποία είναι παραγωγίσιμη και

$$\text{ισχύει: } xf'(x) = (1 - \sin x)e^{-f(x)} - 1, \text{ για κάθε } x > 0. \text{ Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης } f.$$

20. Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ για την οποία ισχύει $f(0) = 1$ και

$$f'(x) + 2xf^2(x) = 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}. \text{ Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης } f.$$

21. Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ για την οποία ισχύει $f(0) = e$ και

$$f'(x) - 2xf(x) = 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}. \text{ Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης } f.$$

22. Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(0) = 0$ και

$$f'(x) - f(x) = e^x \sin x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}. \text{ Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης } f.$$

23. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$, η οποία είναι παραγωγίσιμη για την οποία ισχύει

$$f(0) = 2 \text{ και } f'(x) - \frac{x}{f(x)} = 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}. \text{ Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης } f.$$

24. Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$f'(x) - f(x) = \frac{e^{2x} + 2xe^x}{e^x + x^2} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}. \text{ Επίσης η εφαπτομένη της } C_f \text{ στο σημείο της}$$

$A(0, f(0))$ διέρχεται από το σημείο $B(2, 2)$. Να βρείτε:

i. Την εξίσωση εφαπτομένης στο $A(0, f(0))$.

ii. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f .

25. Να βρείτε τη συνάρτηση f , όταν ισχύει:

i. $f'(x) + f(x) = 1, x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 0$.

ii. $f'(x) - 2xf(x) = x, x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 1$.

iii. $x^2 f'(x) - f(x) = -1, x > 0$ και $f(1) = 1 + e^{-1}$.

26. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη με $f(0) = 2$ έχει την ιδιότητα:

$$2f'(x) - f(x) = -1, x \in \mathbb{R}. \text{ Να βρείτε τη συνάρτηση } f.$$

27. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

i. $f'(x) = \frac{e^x}{x^2} - \frac{2}{x} f(x), x \in \Delta = (0, +\infty)$ και $f(1) = e$.

ii. $f'(x) = \frac{f(x)}{x} + \frac{1}{\ln x}, x \in \Delta = (1, +\infty)$ και $f(e) = 0$.

28. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

i. $xf'(x) + f(x) = 2x, x > 0$ και $f(1) = 2$.

ii. $x(x^2 + 1)f'(x) - 1 = -2x^2 f(x), x > 0$ και $f(1) = 0$.

iii. $f'(x) = \frac{f(x)}{x-1} + e^x(x-1), x > 1$ και $f(2) = e^2$.

iv. $f'(x) = f(x) \sigma \phi x, x \in (0, \pi)$ και $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

B3. Εύρεση της f με βοηθητική συνάρτηση.

29. Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ για την οποία ισχύει $f(1) = e^{-1}$ και

$$xf'(x) + 1 = -2x^2(f(x) + \ln x), \text{ για κάθε } x > 0. \text{ Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης } f.$$

30. Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(0) = 1$, $f(x) \neq x$ για

$$\text{κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και } (x^2 + 1)^2 (f'(x) - 1) - x(f(x) - x)^3 = 0. \text{ Να βρείτε τον τύπο της } f.$$

31. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

i. $f'(x) - 1 = 2xe^{x-f(x)}, x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 0$.

ii. $f'(x) - 2x + 2x(f(x) - x^2) = 0, x \in \mathbb{R}, f(0) = 1$ και $f(x) \neq x^2, x \in \mathbb{R}$

iii. $(e^x + f(x) + xf'(x))(e^x + xf(x)) = x, x \in (0, +\infty)$ και $f(1) = \sqrt{2} - e$.

32. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

i. $f'(x) = f^2(x), f(2) = -1$ και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x > 1$.

ii. $f'(x) = 2f(x), f(0) = 1$ και $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

33. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f , όταν $[f'(x)]^2 + f(x)f''(x) = 2e^{2x}$ και

$$f(0) = f'(0) = 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

34. Έστω $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, με $f(0) = 0$, η οποία είναι παραγωγίσιμη και

$$\text{ικανοποιεί τις σχέσεις: } e^{f(x)} \neq -x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και } f'(x)e^{f(x)} + 1 = \frac{x}{x + e^{f(x)}}.$$

35. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη με $f'(0) = 0$ έχει την ιδιότητα:

$$f(x - y) = f(x)f(y) + \eta\mu x \cdot \eta\mu y \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}. \text{ Να αποδειχθεί ότι:}$$

i. $f(0) = 1$.

ii. $f(x) = \sin x$.

36. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη και ισχύουν οι σχέσεις:

i. $f(0) = 1, f(x) \neq x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ii. $(x^2 + 1)^2 (f'(x) - 1) - x(f(x) - x)^3 = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Να βρείτε τη συνάρτηση f .

37. Έστω $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, η οποία είναι παραγωγίσιμη και ικανοποιεί τις σχέσεις $f(1) = e^{-1}$ και $xf'(x) + 1 = -2x^2(f(x) + \ln x)$, για κάθε $x > 0$.

Να βρείτε τη συνάρτηση f .

B4. Μορφή $f'(x) = f(x)$.

38. Έστω $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, η οποία είναι συνεχής και ισχύουν

$$f'(x) = \frac{x+1}{x} f(x), \text{ για κάθε } x > 0 \text{ και } f(1) = e. \text{ Να βρείτε τον τύπο της } f.$$

39. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(x) > 0$ και $f'(x) = f(x) \ln f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν $f(0) = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε τον τύπο της f .

40. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο, για την οποία ισχύει $f(0) = 2f'(0) = 1$ και $f''(x) \cdot f(x) + (f'(x))^2 = f(x) \cdot f'(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τον τύπο της f .

41. Να βρείτε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$f'(x) \eta \mu x = f(x) (\sigma \upsilon \nu x + \eta \mu x), \text{ για κάθε } x \in (0, \pi) \text{ και } f\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{\frac{\pi}{2}}.$$

42. Να βρείτε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$f'(x) \sigma \upsilon \nu x - f(x) \eta \mu x = f(x) \sigma \upsilon \nu x, \text{ για κάθε } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \text{ και } \ln f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3} - \ln 2.$$

i. Να βρείτε τον τύπο της f .

ii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{f(x)}{x} = 2\eta \mu x$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

43. Να βρείτε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$xf'(x) = (x-1)f(x), \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty) \text{ και } f\left(\frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{e}.$$

B5. Σχέσεις με $f''(x)$.

44. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με $f(0) = f'(0) = 1$ και ισχύει $f''(x) = f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε τον τύπο της f .

45. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) > 0$ και $f''(x) - 2xf'(x) = 2f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν $f'(0) = 0$ και $f(2) = e$, να βρείτε τον τύπο της f .

46. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) > 0$ και $f''(x)f(x) = (f'(x))^2 + 2f^2(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν $f'(0) = f(0) = 1$ να βρείτε τον τύπο της f .

47. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $f''(x) - 2f'(x) + f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

- $f(1) = \frac{e}{2}$, $f'(1) = \frac{3e}{2}$.

i. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = x - \frac{f'(x) - f(x)}{e^x}$, $x \in \mathbb{R}$ είναι σταθερή.

ii. Να βρείτε τη συνάρτηση f .

48. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ικανοποιεί τις σχέσεις:

i. $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$, $f(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ii. $f(x)(f''(x) + 2f(x)) = (f'(x))^2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Να βρείτε τη συνάρτηση f .

49. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ικανοποιεί τις σχέσεις:

i. $f(0) = f'(0) = 0$.

ii. $(x^2 + 1)^2 f''(x) = 2(1 - xf'(x))$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Να βρείτε τη συνάρτηση f .

50. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ικανοποιεί τις συνθήκες:

- $f'(0) = f(0) = e$, $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- $f(x)f''(x) - f(x)f'(x) = (f'(x))^2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Να βρείτε τον τύπο της f .

51. Έστω συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ικανοποιεί τις συνθήκες:

- $f(x) + (x-2)f'(x) = xf''(x)$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$.
- $f'(1) = 0$ και $f(1) = e$.

Να βρείτε τον τύπο της f .

52. Έστω συνάρτηση $f: (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $f''(x) + f(x) = 0$, για κάθε $x \in (0, \pi)$ και $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

i. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = f'(x)\eta\mu x - f(x)\sigma\upsilon\nu x$, $x \in (0, \pi)$ είναι σταθερή.

ii. Να βρείτε τον τύπο της f .

53. Έστω συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(1) = 1$. Αν $f'(x) = xf\left(\frac{1}{x}\right)$, για κάθε $x > 0$, να βρείτε τον τύπο της f .

54. Έστω συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $f'(x^2) = 3x - 1$, για κάθε $x > 0$. Αν $f(1) = 1$, να βρείτε τον τύπο της f .

55. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $f'(x^3 + x) = 4x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν $f(0) = 2$, να βρείτε την εφαπτομένη ϵ της C_f στο $x_0 = 2$.

56. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ικανοποιεί τις σχέσεις: $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$ και $f''(x) = f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Να βρείτε τη συνάρτηση f .

57. Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f''(x) - 2f'(x) + f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $M(0, f(0))$, έχει εξίσωση $y = 5x + 3$. Να βρείτε

i. Τις τιμές $f(0)$ και $f'(0)$.

ii. Τον τύπο της f .

58. Έστω συνάρτηση $f:(0,+\infty)\rightarrow\mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη, για την οποία ισχύει:

$$x^2 f''(x) + x f'(x) - f(x) = 3x^2 \text{ για κάθε } x > 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 3x^2}{x^2 - 4x + 3} = 2, \text{ να βρείτε:}$$

i. Τις τιμές $f(1)$ και $f'(1)$.

ii. Τον τύπο της f .

B6 Εύρεση της f κατά διαστήματα.

59. Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $f(0)=2$ και

$$(x-1)f'(x) = 2x^2 - x - 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}. \text{ Να βρείτε τον τύπο της } f.$$

60. Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $f(1)=4$, $f(-1)=-2$

$$\text{και } xf'(x) - 2f(x) = x^3 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}. \text{ Να βρείτε τον τύπο της } f.$$

61. Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\rightarrow(0,+\infty)$, για την οποία ισχύει $f(\pi)=1$, και

$$x^2 f'(x) = f(x)(\chi \sin x - \eta \mu x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}. \text{ Να βρείτε:}$$

i. Τον τύπο της f .

ii. Το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

62. Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}^*\rightarrow\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $f(1)=1$, $f(-1)=-4$

$$\text{και } x^3 f'(x) + x^2 f(x) = 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}^*. \text{ Να βρείτε:}$$

i. Τον τύπο της f .

ii. Να υπολογίσετε τα όρια: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} x f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta \mu \frac{1}{x}}{f(x)}$.

63. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}^*\rightarrow\mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη και ισχύουν:

- $f'(x) = \frac{x-1}{x} f(x)$, για κάθε $x \neq 0$ και

- $f(1) = f(-1) = 2$.

Να βρείτε τον τύπο της f .

64. Έστω μια συνάρτηση f με $f'(x) = \begin{cases} 2x-1, & x < 0 \\ 3x^2-1, & x \geq 0 \end{cases}$.

Αν $f(1) = 2$ να βρείτε τον τύπο της f .

B7 Σχέσεις με f και g .

65. Έστω οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f, g: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x)g(x) \neq 0, x \in [0, +\infty)$ και $f(0) = g(0) = 1$. Επιπλέον, για $x \geq 0$ ισχύουν:

- $f'(x) + f^2(x)g(x) = 0$ και
- $g'(x) + g^2(x)f(x) = 0$.

Να βρείτε τις f, g .

66. Έστω $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις, οι οποίες είναι παραγωγίσιμες και ισχύουν οι σχέσεις:

- $f(0) = g(0) = 1, f(x) \neq x$ και $g(x) \neq x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και
- $f'(x) - 1 = \frac{x}{g(x) - x}, x \in \mathbb{R}$ και $g'(x) - 1 = \frac{x}{f(x) - x}, x \in \mathbb{R}$.

Να δείξετε ότι $f=g$ και στη συνέχεια να βρείτε την f .

67. Έστω $f, g: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις, οι οποίες είναι παραγωγίσιμες και ισχύουν οι σχέσεις:

- $f(0) = g(0) = 0$
- $f'(x) = e^{-g(x)}, g'(x) = e^{-f(x)},$ για κάθε $x > -1$.

Να δείξετε ότι $f=g$ και στη συνέχεια να βρείτε την f .

Γ1. Σχέσεις της μορφής: $f(x) = ag(x)$, $f(x)f'(-x) = g(x)$, $f(x)f'\left(\frac{1}{x}\right) = g(x)$

68. Έστω συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $xf'(x) = e^{\frac{1}{x}}(x-1)$ για κάθε $x > 0$ και $f(1) = e$. Να δείξετε ότι $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$, $x > 0$.

69. Έστω συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(1) = 0$, η οποία είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, για κάθε $x > 0$. Να δείξετε ότι $f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$, για κάθε $x > 0$.

70. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $f'(x) = \frac{1}{1+e^x}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 0$. Να δείξετε ότι $f(-x) = f(x) - x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

71. Έστω συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(1) = 1$, για την οποία ισχύει $f(x)f'\left(\frac{1}{x}\right) = x$, για κάθε $x > 0$. Να δείξετε ότι $f(x) = x$, $x > 0$.

72. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση για την οποία ισχύει $f(x)f'(-x) = 1$, $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 1$.

- i. Να δείξετε ότι $f(x) > 0$, $x \in \mathbb{R}$.
- ii. Να βρείτε την f .

Ε. ΓΕΝΙΚΕΣ

66. Έστω $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση με $f(0) = 0$, η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$ και ισχύει: $2f'(x) \neq (1-x)f''(x)$, για κάθε $x \in (0, 1)$.

i. Υπάρχει μοναδικό $a \in (0, 1)$, ώστε $f(a) = (1-a)f'(a)$.

ii. Υπάρχει $\beta \in (0, a)$, ώστε $f'(\beta) = \left(\frac{1}{a} - 1\right)f'(a)$.

67. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση με $f(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f''(x) \cdot f(x) \neq (f'(x))^2$, $x \in \mathbb{R}$. Θεωρούμε τους μιγαδικούς $|z+i|^2 + |z-i|^2 = 4$ και z_1, z_2 δύο από αυτούς με $|z_1 + z_2| = \sqrt{3}$ και $f(0) = f'(0) = |z_1 - z_2|$.

i. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z .

ii. Να βρείτε το $f(0)$.

iii. Να βρείτε τη συνάρτηση f .

iv. Αν x_1, x_2 ρίζες της συνάρτησης $g(x) = f(x) - x - 2$, $x \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (x_1, x_2)$, ώστε $f'(\xi_1) + 2f'(\xi_2) = 3$.

68. Έστω συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, μία παραγωγίσιμη συνάρτηση που ικανοποιεί τη σχέση: $(xf'(x) - 1) \cdot (f(x) - \ln x) = x^2$, για κάθε $x > 0$. Θεωρούμε επίσης τους μιγαδικούς z , για τους οποίους ισχύει: $|z + i\sqrt{2}| = 1 + \sqrt{2} \operatorname{Im}(z)$ και $\min|z| = f(1)$.

i. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z .

ii. Να βρείτε τη συνάρτηση f .

iii. Να δείξετε ότι $\ln 2 < \frac{2}{e}$ και στη συνέχεια ότι η εξίσωση $f(x) = \frac{x}{e} + 2$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο διάστημα $(2, e)$.