

ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

A1. Με χρήση παραγώγου

1. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας των συναρτήσεων.

i. $f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x - 1$

ii. $f(x) = -x^3 + x^2 - x - 1$

iii. $f(x) = x^4 - x^3 + 3x^2 - 7x + 2$

iv. $f(x) = x^4 + (1 - x)^4$

2. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας των συναρτήσεων.

i. $f(x) = x + \frac{1}{x-1}$

ii. $f(x) = x - \sqrt{x^2 - 1}$.

3. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας των συναρτήσεων.

i. $f(x) = 2e^x - x + 1$

ii. $f(x) = 3x - 2x \ln x$

iii. $f(x) = (x - 2)e^x - \frac{x^2}{2} + x + 1$

iv. $f(x) = x - \ln(x^2 + 1)$.

4. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας των συναρτήσεων.

i. $f(x) = -2\sin x - x, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

ii. $f(x) = e^x \sin x, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$

iii. $f(x) = \frac{x^3}{3} + x - \eta \mu x$

iv. $f(x) = \frac{x^2}{2} + \sin x + \ln x$.

5. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας των συναρτήσεων.

i. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$

ii. $f(x) = \ln x + \frac{x^2}{2} - 2x$

iii. $f(x) = x + \eta \mu x$

6. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας των συναρτήσεων:

i. $f(x) = \begin{cases} x \ln x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

ii. $f(x) = |x - 1|$

iii. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, & x \leq 3 \\ 2x - 3, & x > 3 \end{cases}$

7. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας των συναρτήσεων:

i. $f(x) = |x^2 - 4|$

ii. $f(x) = \begin{cases} 3 - x^2, & x \leq 2 \\ x - 3, & x > 2 \end{cases}$

A2. Εύρεση τιμών παραμέτρων

8. Να βρείτε τις τιμές του $a \in \mathbb{R}^*$, για τις οποίες η συνάρτηση $f(x) = \frac{ax^3}{3} + x^2 + x - 1$

είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

9. Να βρείτε τις τιμές του $a \in \mathbb{R}$, για τις οποίες η συνάρτηση $f(x) = 3x^3 - ax^2 + 9x - 1$

είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

10. Να βρείτε τις τιμές του $a \in \mathbb{R}$, για τις οποίες η συνάρτηση $f(x) = ax^3 + x^2 - x + 1$

$a \neq 0$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

11. Να βρείτε τις τιμές του $a \in \mathbb{R}$, για τις οποίες η συνάρτηση

$f(x) = -\frac{x^3}{3} + (a-1)x^2 - 4x + 1$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

12. Να βρείτε τις τιμές του $a \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η συνάρτηση $f(x) = \ln(a^2 + x^2) + ax + 1$

είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

13. Να βρείτε τις τιμές του $a \in \mathbb{R}$, για τις οποίες η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x}{x^2 + a^2}$ είναι γνησίως

αύξουσα.

B1. Εύρεση μονοτονίας με χρήση $f', f'', f''', \dots$

14. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2}{2} + x \ln x - 2x$.

15. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση $f(x) = e^x - \frac{x^2}{2} - x$.

16. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση $f(x) = x^2 \ln x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x - 1$.

17. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x^2 - 6 \sin x$.

18. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τις παρακάτω συναρτήσεις:

i. $f(x) = e^x + (x+1) \ln(x+1) - 2x$.

ii. $f(x) = e^x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} - x$.

19. Έστω f μία παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $[0, +\infty)$ με $f(0) = 0$. Αν $f''(x) > 0$ για κάθε

$x \in (0, +\infty)$, να δείξετε ότι η $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, $x > 0$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

20. Έστω f μία παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ με $f''(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x) - \eta \mu^2 x}{\sqrt{x^2 + 4} - 2} = -4.$$

i. Να βρείτε τις τιμές των $f(0)$ και $f'(0)$.

ii. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία.

21. Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(1) = 3$ και $xf'(x) - f(x) = 2x \ln x$

για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

i. Να βρείτε τον τύπο της f .

ii. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία.

22. Έστω $f: [a, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ισχύει

$f''(x) > 0$ για κάθε $x \in (a, \beta)$. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ είναι

γνησίως αύξουσα στο (a, β) .

23. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση με $f(1) = 0$, η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με $f''(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση

$$g(x) = x(\ln x - 1) + \frac{f(x)}{x-1}, \quad x > 1.$$

B2. Επίλυση εξισώσεων και ανισώσεων-Απόδειξη ανισώσεων και εξισώσεων.

24. Έστω $f(x) = \eta\mu x - \chi\sigma\upsilon\eta x$, να αποδείξετε ότι:

i. Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

ii. $\eta\mu x - \chi\sigma\upsilon\eta x > 0$ για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

iii. Η συνάρτηση $g(x) = \frac{\eta\mu x}{x}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

25. Να αποδείξετε ότι:

i. Η συνάρτηση $f(x) = 2\eta\mu x + \epsilon\phi x - 3x$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ είναι γνησίως αύξουσα.

ii. $2\eta\mu x + \epsilon\phi x \geq 3x$ για κάθε $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

26. Να λύσετε τις εξισώσεις.

i. $e^{-x} - x = 1$

ii. $x^2 + 2\ln x = 1$

27. Να λύσετε τις εξισώσεις.

i. $3^x + 4^x = 5^x$

ii. $5^x + 12^x = 13^x$

28. Να λύσετε τις εξισώσεις.

i. $3^{x-1} + 4^{x-1} = 5^{x-1}$

ii. $(\eta\mu\theta)^x + (\sigma\upsilon\eta\theta)^x = 1$, $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

29. Να λύσετε τις ανισώσεις.

i. $x^2 + 8\ln x > 8x - 7$

ii. $x^2 \ln x > x - 1$.

30. Να λύσετε τις ανισώσεις.

i. $e^{1-x} > x^3, x < 1$

ii. $\sqrt{x} + \ln x + 1 > e^{-x} - 1, x > 0.$

iii. $x \cdot \varepsilon\phi x + 1 > \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

31. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(1+x^2) - e^{-x} + 1$.

i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

ii. Να λύσετε την εξίσωση $\ln(1+x^2) = e^{-x} - 1$.

iii. Να λύσετε την εξίσωση $\ln \frac{1+\eta\mu^2\theta}{1+\sigma\upsilon\nu^2\theta} = -e^{-\sigma\upsilon\nu\theta} + -e^{-\eta\mu\theta}.$

iv. Να λύσετε την ανίσωση $\ln \frac{1+x^2}{2} < e^{-x} - e^{-1}.$

32. Έστω $f(x) = \frac{e}{x} - \ln x$.

i. Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία.

ii. Να λυθεί η εξίσωση $\frac{e}{|x|+3} - \frac{e}{2|x|+1} = \ln \frac{|x|+3}{2|x|+1}.$

33. Έστω $f(x) = a^x - x, x \in \mathbb{R}$ και $0 < a < 1$.

i. Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία.

ii. Να λυθεί η εξίσωση $a^{\lambda^2-4} - a^{\lambda-2} = \lambda^2 - \lambda - 2, 0 < a < 1.$

34. Έστω $f(x) = x^{2023} + x^{2021} + 10x + 3, x \in \mathbb{R}.$

i. Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία.

ii. Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε:

$$\lambda^{4046} + \lambda^{4042} + 10\lambda^2 > 3\lambda - 2^{2023} + 3\lambda - 2^{2021} + 10 \quad 3\lambda - 2.$$

35. Έστω $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - x$.

i. Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία.

ii. Να λυθούν οι ανισώσεις:

a. $\left(\frac{1}{2}\right)^x \leq x+6$

$$b. \left(\frac{1}{2}\right)^{2x^2+3x} - \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+10} > x^2 + 3x - 10$$

$$c. \left(\frac{1}{2}\right)^{\sin x} - \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} < \sin x - x - 1$$

36. Έστω $f(x) = \ln x + \frac{1}{x} - 1, x > 0$.

i. Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία.

ii. Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε: $\ln(2\lambda^2 + 2) - \frac{1}{\lambda^2 + 3} > \ln(\lambda^2 + 3) - \frac{1}{2\lambda^2 + 2}$.

37. Έστω $f(x) = \frac{e^{\lambda x}}{x^2 + \lambda^2}, \lambda > 1$.

i. Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία.

ii. Δείξτε ότι $e^{\lambda x} \geq 1 + \left(\frac{x}{\lambda}\right)^2$, για κάθε $x \in [0, +\infty)$.

iii. Αν $a, \beta \geq 0$ και $a - \beta = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{a^2 + \lambda^2}{\beta^2 + \lambda^2}$, δείξτε ότι $a = \beta$.

38. Αν ισχύει $\lambda^3 - 8\mu^3 + \lambda - 2\mu \leq \eta\mu\lambda - \eta\mu 2\mu, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι $\lambda \leq 2\mu$.

39. Αν ισχύει $e^a - e^\beta + a - \beta < \sin a - \sin \beta$, να δείξετε ότι $a < \beta$.

40. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = e^x - e^{-x} - 2x + 1, g(x) = x^2 + \ln x - 1$ και

$$h(x) = \varphi(x) - e^x + x^2, x \in \mathbb{R}.$$

i. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

ii. Να δείξετε ότι $f(g(x)) > 1$, για κάθε $x > 1$.

iii. Να βρείτε τη συνάρτηση φ που ικανοποιεί τη σχέση $f(h(x)) = 1$.

41. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{\lambda x^2}{2} + \lambda^2 - \lambda + 1, x > 3, \lambda \in \mathbb{R}$,

$$g(x) = \frac{x^2}{x+1} - 2x + 2\ln(1+x) \text{ και } h(x) = \varphi(x) - e^x + x, x \in \mathbb{R}.$$

i. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

ii. $f(g(x)) < 3$, για κάθε $x > 0$.

iii. Να βρείτε τη συνάρτηση φ που ικανοποιεί τη σχέση $f(h(x)) = 3$.

42. Δίνονται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x^2 + 1) - x$.

i. Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία.

ii. Να δείξετε ότι $f\left(\ln\left(x^4 + 1 + \frac{1}{x^4 + 1}\right)\right) > f((x^4 + 1) - x^2)$.

43. Δίνονται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^5}{x^2 + 1}$.

i. Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία.

ii. Να δείξετε ότι $f((x^8 + 1)(x^2 + 2)^5) = f(x^{20}(x^2 + 2)^2 + 1)$.

44. Δίνεται συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη για την οποία ισχύει

$xf''(x) + f'(x) = -1$, $x > 0$ και η C_f στο σημείο της $M(1, f(1))$ έχει οριζόντια

εφαπτομένη την ευθεία με εξίσωση $y = -1$.

i. Να βρείτε τον τύπο της f .

ii. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία.

iii. Αν $a > \beta > 1$, να αποδείξετε ότι $\ln \frac{a}{\beta} < a - \beta$

iv. Να λύσετε την ανίσωση $|x| - 2 < \ln \frac{2|x| + 1}{|x| + 3}$.

45. Α. Να λύσετε τις εξισώσεις

i. $e^{x^3+x} - e^{2x} = x - x^3$

ii. $e^{x^3+x+1} - e^{x+1} + x^2 = 0$

Β. Να λύσετε την ανίσωση $e^{x^2-1} + x^2 > 2$

46. Να λύσετε τις εξισώσεις

i. $e^{|x|} - e^2 = |x| - 2$.

ii. $e^{-x^2} - e^{-x} = \ln x$.

B3. Απόδειξη ανισώσεων με παράγουσα βοηθητική συνάρτηση.

47. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $f(0) = 0$ και

$$f'(x) < 2x - \sin x, x \in \mathbb{R}$$

i. Να δείξετε ότι $f(x) > x^2 - \eta\mu x$

ii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = x^2 - \eta\mu x$

iii. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

48. Έστω συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $xf'(x) < f(x) + x^2 \sin x$ για κάθε

$x > 0$ και $f(\pi) = 0$, να δείξετε ότι $f(x) < x\eta\mu x$ για κάθε $x > \pi$.

49. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $f'(x) > 2f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και

$f(0) = 1$, να δείξετε ότι $f(x) > e^{2x}$ για κάθε $x > 0$.

50. Έστω συνάρτηση $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι συνεχής και ισχύει

$$f(x)\eta\mu x < \sin x(e^x \sin x - f'(x)), x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right). \text{ Αν } f(0) = 1, \text{ να δείξετε ότι}$$

$$f(x) < e^x \sin x, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Γ. Η f έχει το πολύ, μία ή δύο ρίζες.

51. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\frac{x^3}{3} - \mu x^2 + 2(\mu^2 - \mu + 1)x - 1 = 0, \mu \in \mathbb{R}$ έχει μία, ακριβώς πραγματική ρίζα.

52. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(3) = f(2)$, η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με

$$f''(x) > 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}. \text{ Να λύσετε:}$$

i. την εξίσωση $f(x+1) = f(x)$.

ii. την ανίσωση $f(5x+1) > f(5x)$.

iii. την εξίσωση $f(x^2+2) = f(x^2+1)$.

- 53.** Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο διάστημα $[1, e]$ με $0 < f(x) < 1$ και $f'(x) \geq 0$, για κάθε $x \in [1, e]$, να δείξετε ότι υπάρχει ένα $x_0 \in (1, e)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0) + x_0 \ln x_0 = x_0$
- 54.** Να δείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν μία μόνο ρίζα στο διάστημα Δ .
- i. $x^3 + x = \sin x$ και $\Delta = \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.
 - ii. $2x + \ln x = 1$ και $\Delta = (0, 1)$.
 - iii. $(x - 1)\ln x = xe^{-1} - x + 2$ και $\Delta = (2, e)$.

Θεώρημα του Fermat

- 55.** Έστω συνάρτηση $f(x) = 2a \ln x - \frac{\beta}{x} + 3a$, $a, \beta \in \mathbb{R}$. Αν η f έχει ακρότατο στο 1 το 5, να βρείτε τα a, β .
- 56.** Έστω συνάρτηση $f(x) = ax^3 + \beta x^2 - 9x + 3a$, $a, \beta \in \mathbb{R}$. Αν η f έχει ακρότατα στα $x_1 = -1$ και $x_2 = 3$, να βρείτε τα a, β .
- 57.** Αν για κάθε $x > 0$, ισχύει $a \ln x \leq x - 1$, $a \in \mathbb{R}$, να βρείτε την τιμή του a .
- 58.** Αν για τη συνάρτηση $f(x) = x^3 + ax^2 - \ln x$, $x > 0$, ισχύει $f(x) \geq f(1)$, $x > 0$, να βρείτε την τιμή του a .
- 59.** Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη και ισχύει:
 $f(x) \leq e^x + \ln(x^2 + 1)$, $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(0, 1)$
- 60.** Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη και ισχύει:
 $(1 + e^{1-x})f(x) + \sin x \geq 3$, $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(1, 2)$
- 61.** Έστω συνάρτηση $f(x) = 2^x + 3^x + a^x - 5^x - 6^x$, ώστε $f(x) \leq 1$, $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε την τιμή του $a > 0$.
- 62.** Έστω οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f, g: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(0) + 2 = g(0)$ και $f(x) + 2e^{-x} \geq g(x) + \ln(x + 1)$, για κάθε $x > -1$. Να δείξετε ότι $f'(0) - 3 = g'(0)$.

- 63.** Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη και ισχύει: $f(x) = |\eta\mu x - ax|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε την συνάρτηση f .
- 64.** Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ , x_0 εσωτερικό του Δ και $f(x_0) = 0$. Αν η συνάρτηση $g(x) = |f(x)|$, $x \in \Delta$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , να δείξετε ότι $f'(x_0) = 0$.
- 65.** Έστω οι συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, οι οποίες είναι δύο φορές παραγωγίσιμες και ισχύουν: $f(x) \geq x + 1$ και $f(x) \cdot e^{g(x)} = e^x - x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν η C_f διέρχεται από το σημείο $A(0,1)$, να δείξετε ότι οι εφαπτόμενες των C_f και στο $x_0 = 0$, τέμνονται κάθετα.
- 66.** Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ισχύει $(f \circ f')(x) \geq (x-2)^2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν η f παρουσιάζει ακρότατο στο 2 και η C_f διέρχεται από το σημείο $O(0,0)$, να δείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο 2, είναι παράλληλη στον $x'x$.
- 67.** Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη και ισχύει: $f^3(x) + 2f^2(x) + 3f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 5$, $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η f δεν έχει ακρότατα.
- 68.** Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη και ισχύει: $f^3(x) + xf(x) = x + 2$, $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η f δεν έχει ακρότατα.
- 69.** Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και ισχύει: $f^3(x) + x^3 = 3xf(x)$, $x > 0$. Αν για $x = x_0$ η f παρουσιάζει ακρότατο, να βρεθεί η τιμή του x_0 .
- 70.** Έστω συνάρτηση $f(x) = x^3 + ax^2 + 3x + \beta$, αν η f έχει δύο διακεκριμένα τοπικά ακρότατα, να δείξετε ότι $|a| > 3$.
- 71.** Έστω συνάρτηση $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει: $f(x) = (x^2 - x)f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
- Να δείξετε ότι η f έχει ολικά ακρότατα, τα οποία να βρείτε.
 - Να βρείτε τον τύπο της f .

- 72.** Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι τρεις φορές παραγωγίσιμη και έχει ρίζες τις ισχύει x_1, x_2 ($x_1 < x_2$) και ισχύει $f(x) \geq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$, τέτοιο, ώστε $f^{(3)}(\xi) = 0$.
- 73.** Έστω συνάρτηση $f : [a, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ και $\gamma, \delta \in (a, \beta)$ τέτοια, ώστε $f(a) < f(\beta) < f(\gamma) < f(\delta)$. Αν η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη, να δείξετε ότι η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει μία, τουλάχιστον λύση στο (a, β) .
- 74.** Έστω συνάρτηση $f : (a, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f'(x) \neq 0$, για κάθε $x \in (a, \beta)$, να δείξετε ότι $f'(x) > 0$, για κάθε $x \in (a, \beta)$ ή $f'(x) < 0$, για κάθε $x \in (a, \beta)$.
- 75.** Έστω συνεχής συνάρτηση $f : [a, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) > 0$, για κάθε $x \in [a, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (a, β) . Αν $f(a) + f(\beta) = f(\gamma)$, $\gamma \in (a, \beta)$, να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(x) = 0$.
- 76.** Έστω συνάρτηση f η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $[2, \pi]$ με $f(2) = 3$ και $f(\pi) = \pi + 1$. Αν η f έχει σύνολο τιμών το διάστημα $[-2, 7]$, τότε να δείξετε ότι υπάρχουν τουλάχιστον δύο τιμές $x_1, x_2 \in (2, \pi)$ με $x_1 \neq x_2$ τέτοιες, ώστε $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$.
- 77.** Έστω συνεχής συνάρτηση $f : [a, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, για κάθε $x \in [a, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (a, β) . Αν η f έχει σύνολο τιμών το $[-1, 2]$ και $f(a) = 0$, $f(\beta) = 1$, να δείξετε ότι:
- Υπάρχουν $x_1, x_2 \in (a, \beta)$ τέτοια, ώστε $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$.
 - Η εξίσωση $f'(x) = (x^2 + 1)f(x)$ έχει μία τουλάχιστον, ρίζα στο (a, β) , όταν η f' είναι συνεχής στο $[a, \beta]$.
- 78.** Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : [a, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f'(a)f'(\beta) < 0$, να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = 0$.
- 79.** Δίνεται συνάρτηση $f : [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη, για την οποία ισχύει $f(1) < f(0) < f(3) < f(2)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, 3)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi) = 0$.

80. Δίνεται συνάρτηση $f : [1, 4] \rightarrow \mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη, για την οποία ισχύει

$$f(2) < f(1) < f(4) < f(3). \text{ Να αποδείξετε ότι:}$$

- i. Η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει δύο τουλάχιστον λύσεις στο $(1, 4)$
- ii. Η εξίσωση $f''(x) + 2xf'(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο $(1, 4)$.

81. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ισχύει

$$2f(x^2) - f^2(x) \geq 1, \quad x \in \mathbb{R}. \text{ Να δείξετε ότι:}$$

- i. Υπάρχει $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0) = 0$.
- ii. $f'(0) = f'(1)$.
- iii. Η εξίσωση $f''(x) = 0$ έχει δύο, τουλάχιστον, ρίζες στο $(0, 1)$.

ΑΚΡΟΤΑΤΑ

A1. Εύρεση τοπικών ακροτάτων.

82. Να μελετήσετε τις παρακάτω συναρτήσεις ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

- i. $f(x) = e^x + x^3 + x$
- ii. $f(x) = x + \sin x - 2$
- iii. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$

83. Να μελετήσετε τις παρακάτω συναρτήσεις ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

- i. $f(x) = x^3 - 3x + 1$
- ii. $f(x) = x - 2\sqrt{x-1}$
- iii. $f(x) = e^{-x^3}$
- iv. $f(x) = \frac{x}{e^x}$

84. Να μελετήσετε τις παρακάτω συναρτήσεις ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

- i. $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$
- ii. $f(x) = x \ln x$
- iii. $f(x) = x^2(2 \ln x - 5) - 4x(\ln x - 3)$

iv. $f(x) = 4x^3 - 3x - \frac{1}{2}, x \in [0, +\infty).$

85. Να μελετήσετε τις παρακάτω συναρτήσεις ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

i. $f(x) = 4x - 3x^2 - 4\ln x + 1$

ii. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{3}{4}x^2 + x + 2$

iii. $f(x) = \frac{\ln x}{x-2}.$

86. Να μελετήσετε τις παρακάτω συναρτήσεις ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

i. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x - 1, & x \leq 2 \\ x^2 - 6x + 7, & x > 2 \end{cases}$

ii. $f(x) = \begin{cases} 2x^3 + 3x^2 - 1, & x \leq 0 \\ -2x^3 + 3x^2 - 1, & x > 0 \end{cases}$

87. Να μελετήσετε τις παρακάτω συναρτήσεις ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

i. $f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 2, & x \leq 1 \\ 3 - x^2, & x > 1 \end{cases}$

ii. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + 1, & x < 0 \\ e^x, & x \geq 0 \end{cases}$

iii. $f(x) = \begin{cases} e^x - x, & x < 0 \\ x^2 - 2x + 2, & x \geq 0 \end{cases}$

88. Έστω η συνάρτηση $f(x) = e^{\lambda x} - x, \lambda > 0$. Να βρείτε την τιμή του λ , για την οποία η ελάχιστη τιμή της f γίνεται μέγιστη.

89. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση $f(x) = \alpha \ln(x-1) - \beta x^2 - 4x + 1$, να παρουσιάζει τοπικά ακρότατα στα σημεία $x_1 = 2$ και $x_2 = 3$. Μετά να βρεθούν οι τιμές και το είδος των ακροτάτων αυτών.

B1. Ακρότατα-ρίζες-πρόσημο-ανισώσεις.

90. Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της συνάρτησης $f(x) = (x-2)\ln x + \frac{x^2-1}{2}.$

91. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{x-1} - \ln x + 1.$

- i. Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της συνάρτησης
- ii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x^{2020}) + f(x^{2022}) = 4$.

92. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x+1)\ln x + x - 1$.

- i. Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της f .
- ii. Να λύσετε την ανίσωση $x^{x+1} > e^{1-x}$, $x > 0$.
- iii. Να δείξετε ότι $ex < e^{\frac{2}{1+x}}$, $x \in (0,1)$

93. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x - \frac{1}{x} + x$.

- i. Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της f .
- ii. Να λύσετε την ανίσωση $e^{x^2-1} \cdot x^x < 1$.
- iii. Να δείξετε ότι $xe^{x-\frac{1}{x}} \geq 1$.

94. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, $x > 0$

- i. Να μελετήσετε τη συνάρτηση ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.
- ii. Να δείξετε ότι $\ln x \leq \frac{x}{e}$.
- iii. Να συγκρίνετε τους αριθμούς e^n, n^e .

95. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln x}{x-1}$, $x > 1$.

- i. Να μελετήσετε τη συνάρτηση ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.
- ii. Αν $\kappa, \lambda \in (1, +\infty)$ και $\frac{\ln \lambda}{\ln \kappa} > \frac{\lambda-1}{\kappa-1}$, να δείξετε ότι $\kappa > \lambda$.

96. Να λύσετε την εξίσωση $x^2 = 2^x$.

97. Να δείξετε ότι $e^x > x^2 + 1$, για κάθε $x > 0$.

B2. Εύρεση πλήθους ριζών εξίσωσης $f(x) = 0$.

98. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $2x^3 - 6x + 1 = 0$.

99. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $x^2 - \sin x = 0$, $x \in (-\pi, \pi)$.

100. Αν γνωρίζετε ότι η συνάρτηση g είναι $1-1$, να δείξετε ότι η εξίσωση $g(f(x) + x^3 - x) = g(f(x) + 2x - 1)$ έχει ακριβώς δύο θετικές και μία αρνητική ρίζα.

101. Να βρείτε το σύνολο τιμών και το πλήθος των ριζών των παρακάτω συναρτήσεων:

i. $f(x) = \ln x - \frac{1}{x} - \sqrt{1-x}$

ii. $f(x) = \ln(-x^2 + 4x - 3)$

iii. $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x}$

102. Έστω συνάρτηση $f(x) = x^4 - 8x^2 + 5$.

i. Να μελετηθεί η συνάρτηση ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $x^4 - 8x^2 + 5 = 0$.

iii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

103. Έστω συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$.

i. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

ii. Να δείξετε ότι η εξίσωση $(x^2 + 1)^2 = x$, δεν έχει καμία ρίζα στο $\mathbb{R}$.

B3. Εύρεση πλήθους ριζών παραμετρικής εξίσωσης.

104. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $x^3 - 3x^2 - a = 0$, για τις διάφορες τιμές του $a \in \mathbb{R}$.

105. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $x^3 - 3x^2 - 9x - \lambda = 0$, για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.

106. Δίνεται η εξίσωση $x^3 - 3x^2 - a = 0$. Να βρείτε τις τιμές του $a \in \mathbb{R}$, ώστε η εξίσωση να έχει μία, ακριβώς, ρίζα στο $(-1, 1)$.

107. Να βρείτε τις τιμές του $a \in \mathbb{R}$, ώστε η εξίσωση $x^3 - 12x + a = 0$, να έχει τρεις πραγματικές ρίζες.

108. Έστω $f(x) = \sqrt{x-2} + \sqrt{8-2x}$, $x \in [2, 4]$

i. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

- ii. Να βρείτε τις τιμές του $a \in \mathbb{R}$, ώστε η εξίσωση $f(x) = a$, να έχει τουλάχιστον μία λύση.

109. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 9}{x^2 - 4}$.

- i. Να μελετήσετε τη συνάρτηση ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.
ii. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = a, a \in \mathbb{R}$

110. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^3 - 4x}{x^2 - 1}$.

- i. Να μελετήσετε τη συνάρτηση ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.
ii. Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^3 - ax^2 - 4x + a = 0$ είναι ισοδύναμη με την $f(x) = a$ και στη συνέχεια ότι έχει τρεις πραγματικές ρίζες, για κάθε $a \in \mathbb{R}$.

Γ1. Ύπαρξη ακροτάτου.

- 111.** Αν $a > 0$, να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 > 0$, ώστε η συνάρτηση

$$f(x) = x \ln x + ax^2 \text{ παρουσιάζει ελάχιστο.}$$

- 112.** Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^3}{5} - 2x^2 + 2x - 1$, έχει ακριβώς δύο τοπικά ακρότατα και στη συνέχεια, να βρείτε το είδος των τοπικών ακροτάτων.

- 113.** Αν ισχύει $e^x \geq ax + \beta$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $a > 0$, τότε να δείξετε ότι $e^{a-\beta} \geq a^a$.

- 114.** Αν ισχύει $\ln x \leq \lambda x^2 - x$, για κάθε $x > 0$, να βρείτε τη μικρότερη τιμή του λ .

- 115.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - \lambda x$, $\lambda > 0$.

- i. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f .
ii. Να βρείτε την μεγαλύτερη τιμή του $\lambda > 0$, για την οποία ισχύει $e^x \geq \lambda x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
iii. Για $\lambda = e$, να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = \lambda x$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της $g(x) = e^x$.

Δ. Θεωρητικές-Γενικές.

116. Έστω $f : [x_1, x_2] \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση με ρίζες x_1, x_2 με $x_1 < x_2$ και $f''(x) > 0$, για κάθε $x \in [x_1, x_2]$. Να δείξετε ότι $f(x) < 0$, για κάθε $x \in (x_1, x_2)$.

117. Έστω $f : [a, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση με $f(\beta) = f(a)$ και $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$.
Να δείξετε ότι $f'(a) \cdot f'(\beta) < 0$, για κάθε $x \in (x_1, x_2)$.

118. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, που είναι παραγωγίσιμη και για την οποία ισχύει:

$$f^3(x) + f(x) = e^{-x} - 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

i. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

ii. Να λύσετε την εξίσωση $f(\ln x) = f(1 - x)$.

119.A. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει: $f^3(x) + f(x) + 1 - x = 0$, $x \in \mathbb{R}$.

i. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

ii. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1} .

B. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει: $f^3(x) + f(x) + 1 = x + e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

120. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη

$$\text{και ισχύει: } f^3(x) + \ln f(x) + e^{f(x)} = x^3 + x^2 + 2x - 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

i. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

ii. Να λύσετε την εξίσωση $f(\ln x) = f(1 - x^2)$.

121. Έστω συνάρτηση $g(x) = e^x + x - \eta\mu x$ και η $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$e^{f(x)} + f(x) - \eta\mu f(x) - x = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

i. Να βρείτε το σύνολο τιμών της g και να δείξετε ότι αντιστρέφεται.

ii. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και $f = g^{-1}$.

iii. Να βρείτε την f^{-1} .

122. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη για την οποία ισχύει:

$$f^3(x) + \beta f^2(x) + \gamma f(x) = x^3 - 2x^2 + 6x - 1, \quad x \in \mathbb{R} \text{ με } \beta, \gamma \in \mathbb{R} \text{ και } \beta^2 < 3\gamma.$$

i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση δεν έχει ακρότατα.

ii. Να βρείτε το είδος μονοτονίας της συνάρτησης.

iii. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο $(0,1)$.

Προβλήματα μονοτονίας-ακροτάτων.

123. Μια βιομηχανία παράγει x ποσότητα από ένα προϊόν με κόστος που δίνεται από τη συνάρτηση $K(x) = \frac{a}{4}x^3$, $x > 0$ και η παράμετρος a παίρνει τιμές στο διάστημα $\left[\frac{2}{9}, \frac{9}{2}\right]$.

Τα έσοδα από την πώληση x ποσότητας προϊόντος δίνονται από τη συνάρτηση $E(x) = x^2$, $x > 0$.

i. Να βρείτε την ποσότητα x_0 για την οποία έχουμε το μέγιστο κέρδος, το οποίο συμβολίζουμε με $M(a)$.

ii. Να βρείτε την τιμή του $a \in \left[\frac{2}{9}, \frac{9}{2}\right]$ για την οποία το $M(a)$ γίνεται μέγιστο, καθώς και το μέγιστο αυτό κέρδος.

124. Ένα τουριστικό λεωφορείο έχει διανύσει απόσταση 625 km με σταθερή ταχύτητα x km την ώρα. Το μέγιστο όριο ταχύτητας είναι 90 km την ώρα και τα καύσιμα κοστίζουν 1,6 ευρώ το λίτρο, η ωριαία κατανάλωση είναι $5,5 + \frac{x^2}{200}$ λίτρα και η αμοιβή του οδηγού είναι 20 ευρώ την ώρα.

i. Να αποδείξετε ότι το συνολικό κόστος $K(x)$ της διαδρομής είναι

$$K(x) = \frac{18000}{x} + 5x, \quad 0 < x \leq 90.$$

ii. Να βρείτε την ταχύτητα του λεωφορείου για την οποία το κόστος της διαδρομής γίνεται ελάχιστο.

125. Το πλήθος των ατόμων που προσβάλλονται ημερησίως από μία συγκεκριμένη επιδημία t ημέρες μετά την πρώτη της εμφάνιση δίνεται από τη σχέση $P(t) = -t^3 + 120t^2 + 20$, $t \in [0, 120]$.

i. Να βρεθεί μετά από πόσες μέρες το πλήθος των ημερησίων θυμάτων της επιδημίας θα γίνει μέγιστο.

- ii. Ποια χρονική στιγμή μέχρι να γίνει αυτό, ο ρυθμός αύξησης των ασθενών ανά ημέρα θα γίνει μέγιστος.

126. Δίνεται η παραβολή $y = \frac{1}{14}(48 - x^2)$ και σημεία της Β, Γ τέτοια, ώστε το τρίγωνο ΟΒΓ να είναι ισοσκελές με $OB = OG$. Να βρεθούν τα Β, Γ ώστε το εμβαδόν του τριγώνου να είναι μέγιστο.

127. Η αξία ενός προϊόντος αυξάνεται με τον χρόνο t με ρυθμό $-t^3 + 12t^2 + 343$ εκατοντάδες ευρώ το έτος με $t \in [0, 13]$. Το κόστος αποθήκευσης σε εκατοντάδες ευρώ για το χρονικό διάστημα των t ετών δίνεται από τον τύπο $K(t) = 4t^3$. Η ιδανική στιγμή για να πουληθεί το προϊόν είναι, όταν η διαφορά της αξίας του και του κόστους γίνει μέγιστη, να βρεθεί σε πόσα έτη μετά την έναρξη της αποθήκευσης είναι η ιδανική αυτή στιγμή.

128. Ένα ταξιδιωτικό γραφείο έκλεισε αεροπλάνο με 400 θέσεις για ένα ταξίδι στο Παρίσι. Αν συμπληρωθεί το αεροπλάνο η τιμή για κάθε επιβάτη είναι 600 ευρώ. Αν όμως οι επιβάτες είναι λιγότεροι, τότε η τιμή του εισιτηρίου αυξάνεται κατά 50 ευρώ για κάθε κενή θέση.

- i. Ποια θα ήταν η ιδανικότερη οικονομικά περίπτωση για τους επιβάτες.
- ii. Ποια θα ήταν η ιδανικότερη οικονομικά περίπτωση για το ταξιδιωτικό γραφείο.

129. Βιοτέχνης παράγει x μονάδες ενός προϊόντος τη μέρα με $x \in (0, 500)$ και τις πουλάει με τιμή πώλησης $p(x) = 3000 - 2x$ ευρώ την μονάδα. Το ημερήσιο κόστος παραγωγής των x μονάδων δίνεται από τη σχέση $K(x) = 2000x + 20000$.

- i. Να βρεθεί η παραγωγή που δίνει το μέγιστο κέρδος.
- ii. Αν το κόστος αυξηθεί, δίνοντας για διαφήμιση $x + 20$ ανά μονάδα, να βρεθεί η παραγωγή που θα αποφέρει το μέγιστο κέρδος.
- iii. Να συγκρίνετε τα αποτελέσματα των δύο ερωτημάτων.

130. Δύο σημεία Α, Β, κινούνται αντίστοιχα πάνω στους άξονες $x'x$ και $y'y$ σύμφωνα με τις εξισώσεις $x(t) = 2t - 9$ και $y(t) = -3t + 7$, $t \geq 0$.

- i. Να βρείτε την απόστασή τους τη χρονική στιγμή t .
- ii. Για ποια τιμή του t , αυτή η απόσταση γίνεται ελάχιστη; Ποια είναι η θέση των σημείων Α, Β τη χρονική αυτή στιγμή.