

ΚΥΡΤΟΤΗΤΑ-ΣΗΜΕΙΑ ΚΑΜΠΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Μελέτη ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμψής

1. Να μελετηθούν ως προς τα κοίλα και τα σημεία καμψής (αν υπάρχουν) οι συναρτήσεις:

i. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 4$

ii. $f(x) = \frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + x + 1$

iii. $f(x) = \frac{3x^2 - 2}{x^3}$

iv. $f(x) = e^{-x^2}$

2. Να μελετηθούν ως προς τα κοίλα και τα σημεία καμψής (αν υπάρχουν) οι συναρτήσεις:

i. $f(x) = \left(\frac{x}{x-2}\right)^2$

ii. $f(x) = (x-1)e^{\frac{1}{x}}$

iii. $f(x) = 2\left(\ln x + \frac{2}{x}\right) - \frac{1}{x^2}$

iv. $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{3}{4}x^2, x > 0$.

i. Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.

ii. Να μελετηθεί η f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμψής (αν υπάρχουν).

4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 + 2x^3 - 12x^2 + 12x + 5$. Να βρεθούν:

i. Τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή ή κοίλη.

ii. Τα σημεία καμψής της C_f , αν υπάρχουν.

5. Να δείξετε ότι η $f(x) = x^2(3\ln x - x - 2)$ στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω στο $(0, +\infty)$.

6. Να μελετήσετε ως προς τα κοίλα τις παρακάτω συναρτήσεις και να βρείτε τα σημεία καμψής των γραφικών παραστάσεων.

i. $f(x) = \begin{cases} x^4 - 6x^2 + 2x + 1, & x \leq 0 \\ x^4 - 4x^3 + 2x + 1, & x > 0 \end{cases}$

ii. $f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x^2 + 3x - 1, & x \leq 2 \\ (x-3)^5 + 2, & x > 2 \end{cases}$

ΚΥΡΤΟΤΗΤΑ-ΣΗΜΕΙΑ ΚΑΜΠΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

- 7.** Να δείξετε ότι, η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \frac{x}{x^2 + 4}$, έχει τρία σημεία καμπής, τα οποία είναι συνευθειακά.
- 8.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = a^x - x$, με $0 < a < 1$.
- i. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.
 - ii. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.
 - iii. Να λύσετε την εξίσωση $a^{\lambda^2-4} - a^{\lambda-2} = (\lambda^2 - 4) - (\lambda - 2)$.
- 9.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (\ln x + 2x + 4)\ln x - 6x + 6$.
- i. Να βρείτε τη δεύτερη παράγωγο της f .
 - ii. Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης $g(x) = \ln x - x + 1$.
 - iii. Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα και τα σημεία καμπής.
 - iv. Να βρείτε τη μονοτονία και το πρόσημο της f και να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.
- 10.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 \ln x$.
- i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f , να μελετήσετε τη μονοτονία της και να βρείτε τα ακρότατα.
 - ii. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής.
 - iii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .
- 11.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x} \ln x$.
- i. Να βρείτε τα διαστήματα που η f είναι κυρτή ή κοίλη.
 - ii. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(e, f(e))$.
 - iii. Να δείξετε ότι $2\sqrt{ex} \ln x \leq 3x - e$ για κάθε $x > 1$.
- 12.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(\ln x)$.
- i. Να δείξετε ότι η f είναι κοίλη.
 - ii. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο $x_0 = e$.
 - iii. Να δείξετε ότι $\ln(\ln x) \leq \frac{x}{e} - 1$ για κάθε $x > 1$.
 - iv. Να λύσετε την εξίσωση $e \ln x - e^{\frac{x}{e}} = 0$, για $x > 1$.
 - v. Να βρείτε το πλησιέστερο σημείο της C_f προς την ευθεία $\varepsilon: x - ey = 0$.

ΚΥΡΤΟΤΗΤΑ-ΣΗΜΕΙΑ ΚΑΜΠΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

13. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^5 + x^3 + 3\eta\mu x, x \in \mathbb{R}$.

- i. Να δείξετε ότι η C_f έχει μοναδικό σημείο καμπής.
- ii. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο καμπής.
- iii. Δείξτε ότι $x^5 + x^3 + 3\eta\mu x \geq 3x$ για κάθε $x \geq 0$.

14. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^3}{6} - e^x$.

- i. Να δείξετε ότι η f είναι κοίλη στο $\mathbb{R}$.
- ii. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 0$.
- iii. Αν $g(x) < f(x), x \in \mathbb{R}$, να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$.

15. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^x$ και $g(x) = \ln x, x > 0$

- i. Να δείξετε ότι η f είναι κυρτή και η g είναι κοίλη.
- ii. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(1,1)$ και της C_g στο σημείο $B(1,0)$.
- iii. Να δείξετε ότι:
 - $x^x \geq x, x > 0$
 - $\ln x \leq x - 1, x > 0$ και τότε ισχύουν οι ισότητες;
 - Η C_f είναι πάνω από τη C_g .

16. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = e^x - \frac{x^2}{2} - x + \ln x$, έχει ακριβώς ένα σημείο καμπής.

17. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (1,2)$ στο οποίο η συνάρτηση $g(x) = \ln^2 x - x \ln x$ παρουσιάζει καμπή.

Εύρεση παραμέτρων.

18. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 - 2ax^3 + 6x^2 - 1$. Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού a , ώστε η συνάρτηση f να είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

19. Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού a , ώστε η συνάρτηση $f(x) = x^4 - ax^3 + \frac{3}{2}x^2 - 1$ να είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

ΚΥΡΤΟΤΗΤΑ-ΣΗΜΕΙΑ ΚΑΜΠΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

20. Αν $|a| < 1$, να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = -\frac{x^4}{12} - \frac{ax^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 3x - 1$ είναι κοίλη στο $\mathbb{R}$.

21. Να βρείτε τις τιμές των $a, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση $f(x) = ax^3 + \beta x^2 - 36x + 5$ να έχει στο σημείο $x_0 = 3$ τοπικό ακρότατο και η γραφική παράσταση της C_f να έχει σημείο καμπής στο $M\left(\frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$.

22. Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού a , ώστε η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^4}{12} - \frac{a^2x^3}{3} + \frac{ax^2}{2} - 3x + 1$ να παρουσιάζει καμπή στο $x_0 = 1$.

23. Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού a , ώστε η συνάρτηση $f(x) = a^2x^4 - 4ax^3 + 6(2a - 1)x^2 - 4x + 11$ να παρουσιάζει καμπή στο $x_0 = 1$.

24. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{a^2x^4}{2} - (a^2 + 1)x^3 + 3x^2 - 6x - 2014, a \in \mathbb{R}$. Βρείτε το a ώστε ένα από τα σημεία καμπής της C_f να έχει τετμημένη $x_0 = 1$.

25. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{a^2x^4}{12} - \frac{(a+1)x^3}{6} + \frac{(2a-1)x^2}{2} + 2x - 1, a \in \mathbb{R}$ που παρουσιάζει καμπή στο $x_0 = 1$.

- i. Να βρεθεί η δεύτερη παράγωγος της f .
- ii. Να βρεθούν οι δυνατές τιμές του a .
- iii. Να μελετηθεί η f ως προς τα κοίλα και να βρεθούν οι θέσεις των σημείων καμπής της C_f .

26. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων καμπής της συνάρτησης $f(x) = 2\lambda e^x - x^2, \lambda > 0$

27. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2e^{\lambda x} - x^2 - \frac{2}{\lambda^2}, \lambda > 0$

- i. Να βρείτε το σημείο καμπής M της C_f .
- ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών των τετμημένων των σημείων καμπής της C_f .
- iii. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων καμπής M της C_f .

28. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x \ln x - \frac{\lambda x^2}{2}, \lambda > 0$

ΚΥΡΤΟΤΗΤΑ-ΣΗΜΕΙΑ ΚΑΜΠΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

- i. Να βρείτε το σημείο καμπής M της C_f .
- ii. Να βρείτε την εξίσωση της καμπύλης που βρίσκεται το σημείο M .
- 29.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3ax^2 + 5ax - 6a^2 + 2a^3, a \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι για κάθε $a \in \mathbb{R}$ η γραφική παράσταση της f έχει ακριβώς ένα σημείο καμπής, το οποίο κινείται σε μία παραβολή.
- 30.** Έστω $f : (1, 3) \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ισχύει $f(x) \cdot (2f(x) - 1) = x - x^2$, για κάθε $x \in (0, 1)$. Να δείξετε ότι η f δεν παρουσιάζει καμπή.
- 31.** Έστω $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ισχύει $f^2(x) + xf(x) + x^2 - 3x + 1 = 0$, για κάθε $x \in (1, 3)$. Να δείξετε ότι η f δεν παρουσιάζει καμπή.
- 32.** Έστω $f : (-\infty, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ισχύει $f^2(x) = x^2 - 2x$, για κάθε $x < 0$. Να δείξετε ότι:
- i. $f(x) \cdot f''(x) + [f'(x)]^2 = 1$.
- ii. Η f δεν παρουσιάζει καμπή.
- 33.** Να αποδείξετε ότι γραφική παράσταση της συνάρτησης:
- $$f(x) = 2x^4 + 4ax^3 + 3(2a^2 - 4a + 5)x^2 + ax + 1, a \in \mathbb{R}$$
- δεν έχει σημεία καμπής.

Κυρτότητα και ανισότητες.

- 34.** Έστω μία παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : [-1, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι κυρτή. Αν $f(1) = 2$, να δείξετε ότι $2f(4) + 3f(-1) > 10$.
- 35.** Έστω $f : (-\infty, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, η οποία είναι κοίλη. Να δείξετε ότι $f(x) + f(3x) < 2f(2x)$, για κάθε $x < 0$.
- 36.** Έστω $f : [-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση η οποία είναι κυρτή με $f(-1) = 2$. Να βρείτε τη μονοτονία της συνάρτησης $g(x) = \frac{f(x) - 2}{x + 1}$, $x > -1$.
- 37.** Έστω $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση η οποία είναι συνεχής και κοίλη με $f(0) = 0$ και $f(1) = 1$. Να δείξετε ότι $f(x) > x$, για κάθε $x \in (0, 1)$.

ΚΥΡΤΟΤΗΤΑ-ΣΗΜΕΙΑ ΚΑΜΠΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

38. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα.

$$e^{f(x)} + f(x) = x + 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

- i. Να δείξετε ότι $f(0) = 0$.
- ii. Να αποδειχθεί ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.
- iii. Να μελετηθεί η f ως προς τα κοίλα.
- iv. Να αποδειχθεί ότι $xf'(x) < f(x) < \frac{x}{2}$ για κάθε $x > 0$.

39. Έστω η συνάρτηση $f : [a, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και οι f', f είναι κυρτές στο $[a, \beta]$. Το σημείο $x_0 = \frac{a+\beta}{2}$ είναι κρίσιμο σημείο της f .

- i. Να αποδείξετε ότι $f'(a) + f'(\beta) > 0$.
- ii. Αν ακόμα $f(x_0) = 0$, να αποδείξετε ότι $f(a) + f(\beta) > 0$.

40. Δίνεται η κυρτή συνάρτηση f στο διάστημα Δ .

- i. Να αποδειχθεί ότι για κάθε $a, \beta \in \Delta$ ισχύει ότι $\frac{f(a) + f(\beta)}{2} \geq f\left(\frac{a+\beta}{2}\right)$.
- ii. Αν $a, \beta > 0$, να αποδειχθεί ότι $a \ln a + \beta \ln \beta \geq (a + \beta) \ln \frac{a+\beta}{2}$.

41. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, για την οποία ισχύει $(f'(x))^2 + f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- i. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = e^{f(x)}$, $x \in \mathbb{R}$ είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.
- ii. Αν $a \neq \beta$ να δείξετε ότι $e^{f\left(\frac{a+\beta}{2}\right)} < \frac{e^{f(a)} + e^{f(\beta)}}{2}$.

42. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \ln(\ln x)$.

- i. Να δείξετε ότι η f είναι κοίλη.
- ii. Αν $a, \beta \in (1, +\infty)$, να δείξετε ότι $\ln \frac{a+\beta}{2} \geq \sqrt{\ln a \cdot \ln \beta}$
- iii. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\ln x - \sqrt{\ln(x-1) \cdot \ln(x+1)} = 3 - x$, έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(2, 4)$.

43. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και $a < \beta$.

- i. Αν η f είναι κυρτή, να αποδειχθεί ότι: $f(x) - f(a) \leq f'(\beta)(x - a)$ για κάθε $x \in [a, \beta]$

ΚΥΡΤΟΤΗΤΑ-ΣΗΜΕΙΑ ΚΑΜΠΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

- ii. Αν η f είναι κοίλη, να αποδειχθεί ότι: $f(x) - f(a) \geq f'(a)(x - a)$ για κάθε $x \in [a, b]$
- iii. Να δοθεί η γεωμετρική ερμηνεία των παραπάνω ανισοτήτων.

Συναρτησιακά-Θεωρητικά θέματα.

44. Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε $2x^2 + e^x + f^2(x) = 4x + 3$. Δείξτε ότι η C_f δεν έχει κανένα σημείο καμπής.
45. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $(-2, 2)$ τέτοια, ώστε $f^2(x) - 2f(x) + x^2 - 3 = 0$ για κάθε $x \in (-2, 2)$. Δείξτε ότι:
- i. $f(x) \neq 1$, για κάθε $x \in (-2, 2)$.
 - ii. Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη.
 - iii. Η C_f δεν έχει κανένα σημείο καμπής.
46. Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο (a, b) και τρεις φορές παραγωγίσιμη στο $x_0 \in (a, b)$. Αν $f''(x_0) = 0$ και $f^{(3)}(x_0) > 0$, δείξτε ότι η f παρουσιάζει καμπή στο x_0 .
47. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση η οποία είναι κυρτή και η ευθεία $y = x$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της f στο $O(0, 0)$. Να μελετήσετε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - x$ ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
48. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση η οποία είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $f^3(x) + f(x) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- i. Να βρείτε το πρόσημο της f και να δείξετε ότι είναι γνησίως αύξουσα.
 - ii. Να δείξετε ότι η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και να βρείτε τα διαστήματα που είναι κυρτή ή κοίλη και το σημείο καμπής της.
 - iii. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x}{f(x) - x}$.
49. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f .
- i. Αν $f(x + y) = f(x)f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ και $f'(0) = 3$, τότε να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

ΚΥΡΤΟΤΗΤΑ-ΣΗΜΕΙΑ ΚΑΜΠΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

- ii. Αν $f(xy) = f(x) + f(y)$ για κάθε $x, y > 0$ και $f'(1) = 2$, να αποδείξετε ότι η f είναι κοίλη στο $(0, +\infty)$.

50. Έστω η συνάρτηση $f : [a, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

- i. Αν η f έχει τοπικό ελάχιστο στο a και είναι παραγωγίσιμη στο a , τότε $f'(a) \geq 0$.
- ii. Αν η f έχει τοπικό ελάχιστο στο β και είναι παραγωγίσιμη στο β , τότε $f'(\beta) \leq 0$.
- iii. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $[a, \beta]$ και $f'(a) < 0 < f'(\beta)$, τότε υπάρχει $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0) = 0$.
- iv. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $[a, \beta]$ και $f'(a) < \kappa < f'(\beta)$, τότε υπάρχει $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0) = \kappa$.

51. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση της οποίας ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} και είναι παραγωγίσιμη. Να αποδειχθεί ότι:

- i. Αν $f'(x) > 0$ και $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε η f^{-1} είναι κοίλη.
- ii. Αν $f'(x) < 0$ και $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε η f^{-1} είναι κυρτή.

52. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και x_0 είναι κρίσιμο σημείο της f .

- i. Αν η f είναι κυρτή, να αποδειχθεί ότι το $f(x_0)$ είναι ολικό ελάχιστο της f .
- ii. Αν η f είναι κοίλη, να αποδειχθεί ότι το $f(x_0)$ είναι ολικό μέγιστο της f .
- iii. Αν η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και $f''(x_0) \neq 0$, να αποδειχθεί ότι το $f(x_0)$ είναι τοπικό ακρότατο της f .

53. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση η οποία είναι κυρτή και ισχύουν:

- Η C_f διέρχεται από το σημείο $A(0, 1)$.
- $f(x) \geq e^x + x - \ln(x^2 + 1)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Να λύσετε την εξίσωση $f(x) - 2x = 1$.

54. Έστω $f : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow (0, 1)$ δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση με την ιδιότητα:

$$f^2(x) + [f'(x)]^2 = 1 \text{ για κάθε } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \text{ και } f\left(\frac{\pi}{4}\right) = f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Να αποδειχθεί ότι:

ΚΥΡΤΟΤΗΤΑ-ΣΗΜΕΙΑ ΚΑΜΠΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

i. $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ και ότι η f αντιστρέφεται.

ii. Η f είναι κοίλη συνάρτηση.

iii. Ο τύπος της f είναι $f(x) = \eta \mu x$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

55. Έστω $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις για τις οποίες ισχύουν:

- $f(x) > 0, x \in \mathbb{R}$.
- $\ln f(x) + f(x) = e^x + x, x \in \mathbb{R}$.
- Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.
- $f(g(x)) + g(x) = x + 1$.

i. Να βρείτε την f .

ii. Να βρείτε την εφαπτομένη της g στο $x_0 = 0$.

iii. Να μελετήσετε την g ως προς την κυρτότητα.

iv. Να δείξετε ότι $xg'(x) \leq g(x) \leq \frac{x}{2}$.

56. Έστω συνεχής συνάρτηση f στο $[a, \beta]$ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο (a, β) με

$f(a) = f(\beta) = 0$. Αν υπάρχει $\gamma \in (a, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f(\gamma) > 0$, να αποδειχθεί ότι:

i. Υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (a, \beta)$ τέτοια, ώστε $f'(\xi_1) \cdot f'(\xi_2) < 0$.

ii. Υπάρχει $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi) < 0$.

iii. Αν f κυρτή στο $[a, \beta]$, τότε:

- Υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0) = 0$
- $f(x) < 0$ για κάθε $x \in (a, \beta)$.

ΚΥΡΤΟΤΗΤΑ-ΣΗΜΕΙΑ ΚΑΜΠΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ