

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και

ισχύει $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

M.7

A2. Πότε μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της.

M.4

A3. Δίνεται η παρακάτω πρόταση.

«Κάθε συνάρτηση η οποία είναι συνεχής στο x_0 τότε είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό».

i. Να χαρακτηρίσετε τον παρακάτω ισχυρισμό ως αληθή ή ψευδή.

M.1

ii. Αν η πρόταση είναι αληθής να την αποδείξετε, ενώ αν είναι ψευδής να δώσετε κατάλληλο αντιπαράδειγμα.

M.3

A4. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις σωστές ή λάθος.

i. Για κάθε $x \neq 0$ είναι $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$.

ii. Η συνάρτηση $f(x) = a^x$, $a > 0$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = xa^{x-1}$.

iii. Αν η f έχει δεύτερη παράγωγο στο x_0 , τότε η f'' είναι συνεχής στο x_0 .

iv. Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.

v. Μεταξύ δύο διαδοχικών ριζών της f' , υπάρχει το πολύ μία ρίζα της f .

M.10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = ae^x + \beta x^2$, $a, \beta \in \mathbb{R}$. Αν η ευθεία $y = -6x + 2$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της f' στο σημείο $A(0, f'(0))$ τότε :

B1. Να αποδείξετε ότι $a = 2$ και $\beta = -4$.

M.7

B2. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο $B(0, f(0))$.

M.6

B3. Να βρεθούν τα $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\eta \mu x}{f(x)}$.

M.6

B4. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $M(x_0, f(x_0))$ να είναι κάθετη στην ευθεία $x - 2y - 4444 = 0$.

M.6

ΘΕΜΑ Γ

Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη με συνεχή πρώτη παράγωγο και ισχύουν:

- $f(x) \neq 0, x \in \mathbb{R}$
- $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)f(x) + \eta \mu(x^2 - 4)}{\sqrt{x-1} - 1} = -2$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f(2) = -5$.

M.6

Γ2. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (1,2)$ τέτοιο, ώστε $\frac{1}{x_0 - 1} + \frac{1}{x_0 - 2} = \frac{2019}{f(x_0)}$.

M.7

Γ3. Αν επιπλέον ισχύει $f^2(x) + f(x^2) = 2x^2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε:

- Να αποδείξετε ότι $f(1) = -2$.
- Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής της παράστασης στο σημείο της $A(1, f(1))$.
- Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) + (2\xi - 1) \cdot f(\xi) = 0$.

M.6

M.6

ΘΕΜΑ Δ

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν :

- η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ με $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + 1}{x} = -\frac{1}{2}$
- $f^2(x) - x = x^2 + 1, x \in \mathbb{R}$
- η g είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$ και ισχύει $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(1+h) - g(1-h)}{h} = 2$

Δ1. Αν $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e-2)^x + \ln x}{[\ln(e-1)]^x + \ln x}$ να δείξετε ότι $A = 1$.

M.5

Δ2. Να δείξετε ότι $g'(1) = A$.

M.5

Δ3. Να δείξετε ότι $f(x) = -\sqrt{x^2 + x + 1}$, $x \in \mathbb{R}$.

M.5

Δ4. Αν $K(x) = e^x$ και $\Lambda(x) = -\frac{1}{x}$ τότε :

i. Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^2 e^{1+2x} = -2 \left[\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + x) \right]$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

M.5

ii. Να δείξετε ότι υπάρχει κοινή εφαπτομένη των C_K, C_Λ .

M.5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!!!...