

1.1 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ
§1.2 ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΚΑΙ ΑΦΑΙΡΕΣΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ
§1.3 ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΑΡΙΘΜΟΥ ΜΕ ΔΙΑΝΥΣΜΑ

1. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και σημεία Δ και E του επιπέδου τέτοια, ώστε $\overrightarrow{A\Delta} = 2\overrightarrow{AB} + 5\overrightarrow{A\Gamma}$ και $\overrightarrow{AE} = 5\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{A\Gamma}$

α) Να γράψετε το διάνυσμα $\overrightarrow{\Delta E}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$. **M.13**

β) Να δείξετε ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{\Delta E}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}$ είναι παράλληλα. **M.12**

2. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και E, Z σημεία τέτοια ώστε: $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{5} \cdot \overrightarrow{A\Delta}$ και

$$\overrightarrow{AZ} = \frac{2}{7} \cdot \overrightarrow{A\Gamma}$$

α) Να γράψετε τα διανύσματα $\overrightarrow{EZ}$ και $\overrightarrow{ZB}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Delta}$ **M.13**

β) Να αποδείξετε ότι τα σημεία B, Z και E είναι συνευθειακά. **M.12**

3. Θεωρούμε τα σημεία P, Λ, K και M του επιπέδου για τα οποία ισχύει η σχέση $5\overrightarrow{P\Lambda} = 2\overrightarrow{PK} + 3\overrightarrow{PM}$

α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία K, Λ και M είναι συνευθειακά. **M.10**

β) Για τα παραπάνω σημεία K, Λ και M να δείξετε ότι ισχύει $2\overrightarrow{A\Lambda} + 3\overrightarrow{B\Lambda} + 2\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BK}$, όπου A και B είναι σημεία του επιπέδου. **M.15**

4. Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ και τυχαίο σημείο O . Αν $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha} + 2\vec{\beta} + 5\vec{\gamma}$, $\overrightarrow{OB} = -\vec{\alpha} + 3\vec{\beta} + 4\vec{\gamma}$ και $\overrightarrow{OG} = 3\vec{\alpha} + \vec{\beta} + 6\vec{\gamma}$, τότε:

α) να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AG}$ συναρτήσει των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$.

M.13

β) να αποδείξετε ότι τα σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά.

M.12

5. Σε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ είναι $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{A\Delta} = \vec{\beta}$. Θεωρούμε σημεία E, Z στην $A\Delta$ και τη διαγώνιο $A\Gamma$ αντίστοιχα, ώστε $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3} \overrightarrow{A\Delta}$ και $\overrightarrow{AZ} = \frac{1}{4} \overrightarrow{A\Gamma}$. Να αποδείξετε ότι:

α) $\overrightarrow{AZ} = \frac{1}{4}(\vec{\alpha} + \vec{\beta})$

M.8

β) $\vec{EZ} = \frac{1}{4} \left(\vec{\alpha} - \frac{1}{3} \vec{\beta} \right)$ και να υπολογίσετε με τη βοήθεια των $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ το $\vec{EB}$. **M.12**

γ) τα σημεία E, Z, B είναι συνευθειακά. **M.5**

§1.4 ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

6. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{OA} = 2\vec{i} + 4\vec{j}$, $\vec{OB} = 3\vec{i} + \vec{j}$ και $\vec{OG} = 5\vec{i} - 5\vec{j}$, όπου $\vec{i}$ και $\vec{j}$ είναι τα μοναδιαία διανύσματα των αξόνων $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των $\vec{AB}$ και $\vec{BG}$. **M.12**

β) Να εξετάσετε αν τα σημεία A, B και Γ μπορεί να είναι κορυφές τριγώνου. **M.13**

7. Θεωρούμε τα σημεία $A(\alpha + 1, 3)$, $B(\alpha, 4)$ και $\Gamma(-4, 5\alpha + 4)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τα διανύσματα $\vec{AB}$, $\vec{BG}$. **M.8**

β) Να βρείτε για ποια τιμή του α , τα A, B, Γ είναι συνευθειακά. **M.10**

γ) Αν $\alpha = 1$, να βρείτε αριθμό λ ώστε $\vec{AG} = \lambda \vec{AB}$. **M.7**

8. Δίνεται παραλληλόγραμμο ABΓΔ με τρεις κορυφές τα σημεία A(1,1), Γ(4,3) και Δ(2,3)

α) Να υπολογίσετε τα μήκη των πλευρών του ABΓΔ. **M.9**

β) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες του σημείου τομής K των διαγωνίων ΑΓ και ΒΔ, καθώς και τις συντεταγμένες της κορυφής B. **M.16**

9. Θεωρούμε τα σημεία $A(1 + 2\alpha, 4\alpha - 2)$ και $B(5\alpha + 1, -\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{A}$

α) Να γράψετε το $\vec{AB}$ συναρτήσει του α και να βρείτε το α ώστε $|\vec{AB}| = 10$. **M.12**

β) Έστω $\alpha = 2$. Να βρείτε σημείο M του άξονα $x'x$ ώστε το τρίγωνο MAB να είναι ισοσκελές με βάση την AB. **M.13**

10. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = \vec{i} - 2\vec{j}$, $\vec{\beta} = 2\vec{i} - 5\vec{j}$ και $\vec{\gamma} = (7, 3)$.

α) Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ είναι μη συγγραμμικά ανά δύο. **M.10**

β) Να γραφεί το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$. **M.15**

§1.5 ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

11. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{b}$ με $(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{3}$ και $|\vec{a}| = \sqrt{2}$, $|\vec{b}| = 2\sqrt{2}$.

α) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{a} \cdot \vec{b}$ **M.8**

β) Αν τα διανύσματα $2\vec{a} + \vec{b}$ και $\vec{a} + \vec{b}$ είναι κάθετα να βρείτε την τιμή του κ. **M.10**

γ) Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $2\vec{a} + \vec{b}$ **M.7**

12. Σε τρίγωνο ABΓ είναι: $\overrightarrow{AB} = (-4, -6)$ και $\overrightarrow{AG} = (2, -8)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{AM}$, όπου AM είναι η διάμεσος του τριγώνου ABΓ. **M.7**

β) Να αποδείξετε ότι η γωνία A είναι οξεία. **M.10**

γ) Αν στο τρίγωνο ABΓ επιπλέον ισχύει $A(3,1)$, να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών του B και Γ. **M.8**

13. Έστω τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{b}$ για τα οποία: $2|\vec{a}| = |\vec{b}| = 2\sqrt{2}$ και $(\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ$.

α) Να αποδείξετε ότι $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2$ **M.10**

β) Να υπολογίσετε τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{a} + \vec{b}$ και $\vec{a} - \vec{b}$. **M.15**

14. Δίνονται τα διανύσματα $\overrightarrow{AB} = (\kappa^2 - 6\kappa + 9, \kappa - 3)$ και $\overrightarrow{AG} = (1, 6)$, όπου $\kappa \in \mathbb{R}$

α) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG}$ **M.8**

β) Να βρείτε τις τιμές του κ, ώστε τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{AG}$ να είναι κάθετα. **M.9**

γ) Για $\kappa = 1$ να βρείτε το διάνυσμα $\overrightarrow{BG}$. **M.7**

15. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (1, 7)$ και $\vec{b} = (2, 4)$.

α) Να βρεθεί η προβολή του $\vec{a}$ πάνω στο $\vec{b}$. **M.10**

β) Να αναλύσετε το $\vec{a}$ σε δύο κάθετες μεταξύ τους συνιστώσες, από τις οποίες, η μία να είναι παράλληλη στο $\vec{b}$. **M.15**

16. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a}$, $\vec{b}$ με $|\vec{a}| = 1$, $(\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot \vec{b} = 7$ και $\vec{a} \cdot \vec{b} = -1$

α) Να υπολογίσετε τα $\vec{\alpha}^2$ και $|\vec{\beta}|$ **M.6**

β) Να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$ **M.9**

γ) Να βρείτε την προβολή του $\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$ στο διάνυσμα $\vec{\beta}$ **M.10**

17. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\beta}| = 2|\vec{\alpha}| = 4$ και $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -8$

α) Να υπολογίσετε τη γωνία $(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$ **M.10**

β) Να αποδείξετε ότι $\vec{\beta} + 2\vec{\alpha} = \vec{0}$. **M.10**

18. Έστω $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ δύο διανύσματα με $|\vec{\alpha}| = 2, |\vec{\beta}| = \sqrt{2}$ $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{5\pi}{6}$ και $\vec{u} = \vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$.

α) Να υπολογίσετε τα εσωτερικά γινόμενα $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ και $\vec{\beta} \cdot \vec{u}$. **M.16**

β) Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\vec{u}$. **M.9**

19. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 1, |\vec{\beta}| = 2$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$. Να υπολογίσετε τα εξής:

α) το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ και κατόπιν την τιμή της παράστασης $\vec{\alpha}^2 + \vec{\alpha} \cdot (2\vec{\beta})$ **M.10**

β) το συνημίτονο της γωνίας των διανυσμάτων $\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$ και $\vec{\beta} + 2\vec{\alpha}$. **M.15**

20. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (-1, \sqrt{3})$ και $\vec{\beta} = (\sqrt{3}, 3)$. Να υπολογίσετε:

α) τη γωνία $(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$ **M.10**

β) το διάνυσμα $\vec{u} = \vec{\alpha}^2 \cdot \vec{\beta} - (\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})^2 \cdot \vec{\alpha}$ **M.15**

21. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (-1, 3)$ και $\vec{\beta} = (-2, -\frac{1}{2})$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{u} = \vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$ **M.10**

β) Να βρείτε τον θετικό αριθμό x για τον οποίο τα διανύσματα $\vec{u}$ και $\vec{v} = (x^2, x - 1)$ είναι κάθετα. **M.15**

22. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (2, -3)$ και $\vec{\beta} = \left(1, \frac{1}{2}\right)$

α) Να βρείτε την προβολή του $\vec{\alpha}$ πάνω στο $\vec{\beta}$. **M.10**

β) Να αναλύσετε το $\vec{\alpha}$ σε δύο κάθετες συνιστώσες από τις οποίες η μία να είναι παράλληλη με το $\vec{\beta}$. **M.15**

23. Έστω $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δύο διανύσματα του επιπέδου για τα οποία ισχύουν $3|\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}| = 9$,

$$2|\vec{\alpha}| - |\vec{\beta}| = 1 \text{ και } \left(\vec{\alpha}, \vec{\beta}\right) = \frac{\pi}{3}$$

α) Να βρείτε τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ και το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$. **M.12**

β) Να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{u} = 2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}$. **M.13**

24. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ και $\vec{u} = \vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$, $\vec{v} = 5\vec{\alpha} - 4\vec{\beta}$ για τα οποία ισχύουν:

$$\vec{u} \perp \vec{v} \text{ και } |\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = 1$$

α) Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \frac{1}{2}$ **M.12**

β) Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{u} - 3\vec{v}$ και $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ είναι αντίρροπα και ότι $|\vec{u} - 3\vec{v}| = 14$ **M.13**

25. Έστω $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δυο διανύσματα για τα οποία ισχύουν:

$$\vec{\beta} = \left(\frac{1}{7}, 1\right) \text{ και } \vec{\alpha} + 7\vec{\beta} = (\mu + 2, 7 - 2\mu), \mu \in \mathbb{R}$$

α) Να γράψετε το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ ως συνάρτηση του μ . **M.10**

β) Αν $\mu = 2$, τότε:

i. να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} = (3, -4)$ και ότι το $\vec{\alpha}$ είναι κάθετο στο $\vec{\alpha} + 7\vec{\beta}$. **M.10**

ii. να βρείτε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ **M.5**

26. Έστω $\vec{\alpha} = (2, -3)$ και $\vec{\beta} = (-5, 1)$ δύο διανύσματα.

α) Να βρείτε το $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ και να απλοποιήσετε την παράσταση $\frac{|\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|}{\sqrt{-\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}}$ **M.13**

β) Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}$

M.12

27. α) Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύει:

$$|\vec{\alpha} + \vec{\beta}|^2 + |\vec{\alpha} - \vec{\beta}|^2 = 2|\vec{\alpha}|^2 + 2|\vec{\beta}|^2$$

M.12

β) Δίνεται ρόμβος ΑΒΓΔ με πλευρά ίση με τη μονάδα και $\vec{AB} = \vec{\alpha}, \vec{AD} = \vec{\beta}$. Αν η διαγώνιος του ΑΓ έχει μήκος $\sqrt{3}$, να βρείτε το μήκος της διαγωνίου ΒΔ.

M.13

28. Θεωρούμε τα σημεία Α, Β, Γ ώστε $\vec{AB} = (-1, 4)$ και $\vec{AG} = (3, 6)$.

α) Να αποδείξετε ότι σχηματίζουν τρίγωνο και να βρείτε αν η γωνία Α του τριγώνου είναι οξεία, ορθή ή αμβλεία.

M.15

β) Να βρείτε το μήκος της διαμέσου ΑΜ του τριγώνου.

M.10

29. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{OA} = (4, -2)$ και $\vec{OB} = (1, 2)$, όπου Ο είναι η αρχή των αξόνων.

α) Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{OA}$ και $\vec{OB}$ είναι κάθετα.

M.4

β) Αν $\Gamma(\alpha, \beta)$ είναι σημείο της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία Α και Β, τότε:

i) να αποδείξετε ότι: $\vec{AB} = (-3, 4)$ και $\vec{AG} = (\alpha - 4, \beta + 2)$

M.5

ii) να αποδείξετε ότι: $4\alpha + 3\beta = 10$

M.6

iii) αν επιπλέον τα διανύσματα $\vec{OG}$ και $\vec{AB}$ είναι κάθετα, να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Γ.

M.10

30. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ για τα οποία ισχύουν: $|\vec{\alpha}| = 2, |\vec{\beta}| = 1, (\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 60^\circ$ και

$$\vec{\gamma} = \frac{\kappa}{2} \cdot \vec{\alpha} - \vec{\beta}, \text{ όπου } \kappa \in \mathbb{R}$$

α) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$

M.3

β) Αν ισχύει $\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} = \kappa$, τότε:

i) να αποδείξετε ότι: $\kappa = -2$

M.6

ii) να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma}$

M.8

iii) να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $3\vec{\alpha} + 2\vec{\gamma}$ και $\vec{\beta} - \vec{\gamma}$ είναι κάθετα.

M.8

31.α) Να εξετάσετε πότε ισχύει καθεμιά από τις ισότητες: $|\vec{u} + \vec{v}| = |\vec{u}| + |\vec{v}|$ και

$$|\vec{u} + \vec{v}| = ||\vec{u}| - |\vec{v}||$$

M.10

β) Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ για τα οποία ισχύουν: $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$ και $\frac{|\vec{\alpha}|}{3} = \frac{|\vec{\beta}|}{4} = \frac{|\vec{\gamma}|}{7}$

i) Να αποδείξετε ότι: $\vec{\alpha} \uparrow \uparrow \vec{\beta}$ και $\vec{\beta} \uparrow \downarrow \vec{\gamma}$

M.8

ii) Να αποδείξετε ότι: $7\vec{\alpha} + 3\vec{\gamma} = \vec{0}$

M.7