

§2.1 ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΥΘΕΙΑΣ
§2.2 ΓΕΝΙΚΗ ΜΟΡΦΗ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΕΥΘΕΙΑΣ

1. Δίνονται τα σημεία $A(1,2)$ και $B(5,6)$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία A και B. **M.10**

β) Να αποδείξετε ότι η μεσοκάθετος ε του ευθυγράμμου τμήματος AB έχει εξίσωση την $y = -x + 7$ **M.15**

2. Δίνονται οι παράλληλες ευθείες $\varepsilon_1 : x - 2y - 8 = 0$, $\varepsilon_2 : 2x - 4y + 10 = 0$ και το σημείο A της ε_1 που έχει τετμημένη το 4.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου A. **M.5**

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε η οποία διέρχεται από το σημείο A και είναι κάθετη στην ευθεία ε_1 **M.10**

γ) Αν B είναι το σημείο τομής των ευθειών ε και ε_2 , τότε να βρείτε τις συντεταγμένες του B. **M.10**

3. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : x - 8y + 16 = 0$ και $\varepsilon_2 : 2x + y + 15 = 0$ οι οποίες τέμνονται στο σημείο M. Αν οι ευθείες ε_1 και ε_2 τέμνουν τον άξονα $y'y$ στα σημεία A και B αντίστοιχα, τότε:

α) να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων M, A και B **M.10**

β) αν K είναι το μέσο του τμήματος AB, να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης του διανύσματος $\overrightarrow{MK}$ **M.15**

4. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : 8x - y - 28 = 0$ και $\varepsilon_2 : x - y + 1 = 0$ οι οποίες τέμνονται στο σημείο M.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου M και, στη συνέχεια, να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το M και είναι κάθετη στον άξονα $x'x$

M.10

β) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες που διέρχονται από το M και έχουν συντελεστή διεύθυνσης λ έχουν εξίσωση την: $\lambda x - y - 3\lambda + 4 = 0$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$ **M.15**

5. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : x - 3y + 5 = 0$ και $\varepsilon_2 : 3x + y - 5 = 0$.

α) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι κάθετες μεταξύ τους. **M.9**

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής A των ευθειών ε_1 και ε_2 **M.9**

γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο A και την αρχή O των αξόνων. **M.7**

6. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : 3x + y + 3 = 0$ και $\varepsilon_2 : x + 2y - 4 = 0$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής A των ευθειών ε_1 και ε_2 **M.8**

β) Αν η ευθεία ε_1 τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο B και η ευθεία ε_2 τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο Γ , τότε:

i) να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων B και Γ . **M.8**

ii) να αποδείξετε ότι η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία B και Γ έχει εξίσωση την $3x - 4y - 12 = 0$ **M.9**

7. Θεωρούμε την ευθεία ε_1 που τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ στα σημεία $A(3,0)$ και $B(0,6)$ αντίστοιχα.

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε_1 **M.8**

β) Αν ε_2 είναι η ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και είναι κάθετη στην ε_1 , τότε να βρείτε:

i) την εξίσωση της ευθείας ε_2 **M.9**

ii) τις συντεταγμένες του σημείου τομής των ευθειών ε_1 και ε_2 **M.8**

8. Έστω $M(3,5)$ το μέσο ευθυγράμμου τμήματος AB με $A(1,1)$.

α) Να βρείτε:

i) τις συντεταγμένες του σημείου B . **M.6**

ii) την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία A και B . **M.7**

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες σημείου Κ του άξονα $x'x$ έτσι, ώστε να ισχύει $(KA) = (KB)$. **M.12**

9. Δίνεται η ευθεία $(\epsilon): y + x = 1$ και το σημείο $A(2, -4)$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το Α και είναι κάθετη στην (ϵ) . **M.10**

β) Να βρείτε την προβολή του σημείου Α πάνω στην ευθεία (ϵ) . **M.15**

10. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1, -1)$ και $\vec{\beta} = (3, 0)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{u} = 4\vec{\alpha} - \frac{1}{3}\vec{\beta}$ **M.10**

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που έχει συντελεστή διεύθυνσης $\frac{-2}{5}$ και διέρχεται από το σημείο $A(1, \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + 2)$ **M.15**

11. Θεωρούμε το ευθύγραμμο τμήμα AB με μέσο Μ και $A(1, -2)$, $M(-2, 5)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Β. **M.10**

β) Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκαθέτου ϵ του ευθυγράμμου τμήματος AB, καθώς και τα κοινά σημεία αυτής με τους άξονες $x'x$ και $y'y$ **M.15**

12. Δίνεται η ευθεία $\epsilon: x + y + 2 = 0$ και το σημείο $A(5, 1)$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η_1 , η οποία διέρχεται από το Α και είναι κάθετη προς την ευθεία ϵ . **M.9**

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η_2 , η οποία διέρχεται από το Α και είναι παράλληλη προς τον άξονα $x'x$. **M.7**

γ) Να βρείτε το σημείο τομής των ευθειών η_1 και η_2 και την απόστασή του από την αρχή των αξόνων. **M.9**

13. Δίνεται τρίγωνο ABΓ με κορυφές τα σημεία $A(3, 1)$, $B(-1, 1)$ και $\Gamma(2, 4)$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της πλευράς ΑΓ. **M.7**

β) Να βρείτε τις εξισώσεις του ύψους ΒΔ και της διαμέσου ΑΜ.

M.18

14. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $A(-5,4)$, $B(-1,6)$, $\Gamma(4,1)$ και σημείο Μ της πλευράς ΑΒ για το οποίο ισχύει $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{4} \overrightarrow{AB}$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$.

M.6

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Μ.

M.9

γ) Αν το σημείο Μ έχει συντεταγμένες $\left(-4, \frac{9}{2}\right)$, να υπολογίσετε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία Γ, Μ.

M.10

15. Θεωρούμε μια ευθεία (ε) και ένα σημείο $A(6,-1)$ εκτός της (ε).

Έστω $M(2,1)$ η προβολή του Α στην (ε). Να βρείτε:

α) Την εξίσωση της ευθείας (ε).

M.13

β) Το συμμετρικό του Α ως προς την (ε).

M.12

16. Δίνονται τα σημεία $A(2,3)$, $B(-1,5)$ και $\Gamma(-2,-4)$.

α) Να αποδείξετε ότι σχηματίζουν τρίγωνο.

M.8

β) Να βρείτε το συμμετρικό Δ του Β ως προς το μέσο Μ της ΑΓ.

M.10

γ) Τι σχήμα είναι το ΑΒΓΔ; Να αιτιολογήσετε τον ισχυρισμό σας.

M.7

17. Θεωρούμε τα σημεία $A(6,\mu)$ και $B(\mu+2, \mu+1)$, $\mu \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\mu \in \mathbb{R}$, τα σημεία είναι διαφορετικά μεταξύ τους και να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα Α και Β.

M.15

β) Να βρείτε για ποια τιμή του μ, το σημείο $\Gamma(4,2)$ περιέχεται στην ευθεία ΑΒ.

M.10

18. Έστω $A(-1,1)$, $B(2,0)$ και $\Gamma(-1,3)$ τρία σημεία του επιπέδου.

α) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $M(x,y)$ ώστε:

$$3\overrightarrow{AM}^2 - 5\overrightarrow{BM}^2 + 2\overrightarrow{GM}^2 = 0 \text{ είναι η ευθεία } \varepsilon : 5x - 3y + 1 = 0 .$$

M.15

β) Να βρείτε ευθεία κάθετη στην (ε) που διέρχεται από το μέσο Κ του τμήματος ΑΓ.

M.10

19. Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ οι πλευρές του ΑΒ και ΑΔ βρίσκονται πάνω στις ευθείες με εξισώσεις $\varepsilon_1 : 2x + y + 2 = 0$ και $\varepsilon_2 : x - 2y + 6 = 0$ αντίστοιχα. Αν το κέντρο του είναι το σημείο Κ(-1,-2), τότε:

α) να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Α και να αποδείξετε ότι $\Gamma(0,-6)$. **M.10**

β) να βρείτε την εξίσωση της πλευράς ΓΔ και τις συντεταγμένες της κορυφής Δ. **M.15**

20. Θεωρούμε την εξίσωση $(2\lambda - 1)x + (18 - 11\lambda)y + 9\lambda - 17 = 0, \lambda \in \mathbb{R}, (1)$

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, παριστάνει ευθεία. **M.10**

β) Αν $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ είναι οι ευθείες που προκύπτουν από την (1) για $\lambda = 1, \lambda = 2$ αντίστοιχα, να βρείτε την οξεία γωνία που σχηματίζουν. **M.15**

21. Δίνεται η εξίσωση: $x^2 + 2xy + y^2 - 6x - 6y + 8 = 0$

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση παριστάνει γεωμετρικά δύο ευθείες γραμμές ε_1 και ε_2 οι οποίες είναι παράλληλες μεταξύ τους. **M.7**

β) Αν $\varepsilon_1 : x + y - 2 = 0$ και $\varepsilon_2 : x + y - 4 = 0$, να βρείτε την εξίσωση της μεσοπαράλληλης των ε_1 και ε_2 **M.8**

γ) Αν Α είναι σημείο της ευθείας ε_1 με τεταγμένη το 2 και Β σημείο της ευθείας ε_2 με τετμημένη το 1, τότε:

i) να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Α και Β **M.2**

ii) να βρείτε τις συντεταγμένες δύο σημείων Γ και Δ της ευθείας ε έτσι, ώστε το τετράπλευρο ΑΓΒΔ να είναι τετράγωνο. **M.8**

22. Δίνονται τα σημεία $A(\lambda+1, \lambda-1), B(2,2)$ και $\Gamma(4,6), \lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την μεσοκάθετο του τμήματος ΒΓ. **M.7**

β) Αν το σημείο Α ισαπέχει από τα σημεία Β και Γ, να βρείτε την τιμή του λ **M.8**

γ) Για $\lambda = 4$, να βρείτε σημείο Δ ώστε το τετράπλευρο ΑΒΔΓ να είναι ρόμβος. **M.10**

23. Θεωρούμε τα σημεία $A(-2t+6, 0), B(0, 4t-2), t \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου Μ του ΑΒ. **M.5**

β) Να δείξετε ότι το M κινείται σε ευθεία την οποία να προσδιορίσετε. **M.10**

γ) Αν $(AB) = d$, να αποδείξετε ότι $d^2 \geq 20$ και κατόπιν να βρείτε τα A, B ώστε η απόσταση (AB) να είναι ελάχιστη. **M.10**

24. Θεωρούμε το σημείο $M(-3, -2)$ και ευθεία που διέρχεται από το M και τέμνει τους αρνητικούς ημιάξονες στα σημεία A, B.

α) Να αποδείξετε ότι ο συντελεστής διεύθυνσης λ της ευθείας είναι αρνητικός. **M.10**

β) Έστω $E(\lambda)$ το εμβαδόν του τριγώνου OAB.

i. Να αποδείξετε ότι $E(\lambda) \geq 12$ για κάθε $\lambda < 0$ **M.10**

ii. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που σχηματίζει με τους ημιάξονες τρίγωνο με ελάχιστο εμβαδόν. **M.5**

25. Θεωρούμε τις εξισώσεις $\varepsilon_\lambda : (\lambda - 1)x + (\lambda - 2)y - \lambda + 3 = 0, \lambda \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι καθεμιά από τις (ε_λ) παριστάνει ευθεία και κατόπιν ότι όλες οι ευθείες διέρχονται από σταθερό σημείο. **M.10**

β) Έστω $\lambda \neq 1$ και $\lambda \neq 2$. Αν η (ε_λ) τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ στα σημεία $A(a, 0)$ και $B(0, \beta)$ αντίστοιχα, τότε:

i. να εκφράσετε τα a, β συναρτήσει του λ . **M.5**

ii. να βρείτε την ευθεία της παραπάνω μορφής ώστε να ισχύει $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{\beta^2} = 2$. **M.10**

26. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + 2(xy - 2x - 2y) + 3 = 0$.

α) Να αποδείξετε ότι παριστάνει δυο ευθείες παράλληλες μεταξύ τους. **M.8**

Έστω $\varepsilon_1 : x + y = 1$ και $\varepsilon_2 : x + y = 3$ οι δυο ευθείες.

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τραπεζίου που σχηματίζεται από τους άξονες και τις ευθείες. **M.7**

γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από την αρχή O και τέμνει τις ε_1 και ε_2 στα σημεία A, B ώστε $(AB) = 2$. **M.10**

27. Θεωρούμε σημεία $M(a, a+1)$, $a \in \mathbb{R}$

α) Να δείξετε ότι κινούνται στην ευθεία $y = x + 1$. **M.5**

β) Να βρείτε το συμμετρικό $M'(a', b')$ του M ως προς την ευθεία $x - 2y = 2$. **M.10**

γ) Να δείξετε ότι το M' κινείται, για τις διάφορες τιμές του a , στην ευθεία $x - 7y - 17 = 0$ **M.5**

δ) Να εξετάσετε αν οι τρεις ευθείες συντρέχουν και κατόπιν να αιτιολογήσετε το αποτέλεσμα, αφού πρώτα σχεδιάσετε τις τρεις ευθείες. **M.5**

§2.3 ΕΜΒΑΔΟΝ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

ΘΕΜΑ 2ο

28. Δίνονται τα σημεία $A(1, -2)$ και $B(2, 3)$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από τα σημεία A, B . **M.10**

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $OK\Lambda$, όπου O είναι η αρχή των αξόνων και K, Λ είναι τα σημεία τομής της ε με τους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα. **M.15**

29. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφές τα σημεία $A(3, 2)$, $B(-3, 1)$ και $\Gamma(4, 0)$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της πλευράς AB . **M.10**

β) Να υπολογίσετε το μήκος του ύψους $\Gamma\Delta$ καθώς και την εξίσωση της ευθείας πάνω στην οποία βρίσκεται αυτό. **M.15**

30. Θεωρούμε τα σημεία $A(a, 0)$ και $B(0, \beta)$, όπου $\alpha \cdot \beta > 0$ και $\alpha \neq \beta$

α) Να αποδείξετε ότι $AB: y = -\frac{\beta}{\alpha}x + \beta$ **M.7**

β) Αν ε είναι η ευθεία που διέρχεται από το σημείο $M(a, \beta)$ και είναι κάθετη προς την ευθεία AB , τότε:

i) να βρείτε την εξίσωση της ε . **M.9**

ii) αν η ευθεία ε τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο K και τον άξονα $y'y$ στο σημείο L ,

να αποδείξετε ότι $(OKL) = \frac{(\alpha^2 - \beta^2)^2}{2\alpha\beta}$, όπου O είναι η αρχή των αξόνων. **M.9**

31. Θεωρούμε τα σημεία $A(\lambda+1, 2\lambda)$, $B(2-\lambda, 4)$ και $\Gamma(-1, 2)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό λ , τα σημεία σχηματίζουν τρίγωνο. **M.10**

β) Έστω ότι για το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ ισχύει $(AB\Gamma) = 3$.

i. Να αποδείξετε ότι $\lambda = 1$ ή $\lambda = 2$. **M.10**

ii. Να βρείτε τη γωνία των διανυσμάτων $\overrightarrow{GA}$, $\overrightarrow{GB}$ όταν $\lambda = 1$. **M.5**

32. Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Oxy θεωρούμε την ευθεία $\varepsilon : y = x + 1$ και τα σημεία $A(2,0)$ και $B(6,-3)$.

α) Να προσδιορίσετε σημείο Γ της ευθείας ε ώστε το τρίγωνο $AB\Gamma$ να είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα τη $B\Gamma$. **M.15**

β) Έστω $\Gamma(1,12)$. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$. **M.10**

33. Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Oxy θεωρούμε την ευθεία $\varepsilon : y = x + \kappa - 1$, όπου κ θετικός ακέραιος μεγαλύτερος της μονάδας.

α) Να βρείτε με τη βοήθεια του κ , τα σημεία τομής A , B της ευθείας με τους άξονες $x'x$, $y'y$ και το εμβαδόν του τριγώνου OAB . **M.13**

β) Αν ισχύει $(OAB) < 2$ να αποδείξετε ότι $\kappa = 2$. **M.12**

34. Θεωρούμε την ευθεία $\varepsilon : 3x - 4y + 2 = 0$ και το σημείο $A(-2,1)$.

α) Να αποδείξετε ότι το A δεν ανήκει στην (ε) και να βρείτε την απόστασή του από αυτή. **M.10**

β) Να βρείτε όλες τις ευθείες που είναι παράλληλες στην (ε) και απέχουν από το A απόσταση ίση με 3 μονάδες. **M.15**

35. Θεωρούμε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων στο οποίο απεικονίζεται ο χάρτης του νομού Αρκαδίας. Τα χωριά Δόξα (Δ), Λευκοχώρι (Λ) και Κακουρέϊκα ($\Κ$) έχουν αντίστοιχες συντεταγμένες $\Delta(-2,2)$, $\Lambda(2,-1)$ και $\Κ(-1,-10)$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ϵ) που διέρχεται από τα χωριά Δόξα (Δ) και Λευκοχώρι (Λ). **M.8**

β) Να βρείτε την απόσταση του $\Κ$ από την ευθεία (ϵ). **M.8**

γ) Να εξετάσετε, με βάση τα δεδομένα του προβλήματος, ποιο από τα χωριά Δόξα και Λευκοχώρι απέχει τη μικρότερη απόσταση από τα Κακουρέϊκα. **M.9**

36. Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Oxy θεωρούμε τα σημεία $A(\lambda-1, \lambda+2)$ και $B(\mu+3, \mu)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία A, B κινούνται στις ευθείες $\epsilon_1 : y = x + 3$ και $\epsilon_2 : y = x - 3$ αντίστοιχα. **M.12**

β) Να βρεθεί η εξίσωση της μεσοπαράλληλης των ευθειών ϵ_1, ϵ_2 . **M.13**

37. Δίνονται τα σημεία $A(0,2)$, $B(1,5)$ και $\Gamma(t-1, 3t-2)$, $t \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας AB . **M.7**

β) Να δείξετε ότι η απόσταση του σημείου Γ από την ευθεία AB καθώς και το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι ανεξάρτητα του t . **M.18**

38. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\overrightarrow{AB} = (\lambda, \lambda+1)$, $\overrightarrow{A\Gamma} = (3\lambda, \lambda-1)$, όπου $\lambda \neq 0$ και $\lambda \neq -2$, και M είναι το μέσο της πλευράς $B\Gamma$

α) Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AM} = (2\lambda, \lambda)$ **M.7**

β) Να βρείτε την τιμή του λ για την οποία το διάνυσμα $\overrightarrow{AM}$ είναι κάθετο στο διάνυσμα $\vec{\alpha} = \left(\frac{2}{\lambda}, -\lambda \right)$ **M.8**

γ) Για την τιμή του λ που βρήκατε στο ερώτημα β), να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$. **M.10**

39. Δίνονται οι ευθείες $\epsilon_1 : 2x - y - 10\lambda + 16 = 0$ και $\epsilon_2 : 10x + y - 2\lambda - 4 = 0$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή της παραμέτρου λ οι ευθείες ε_1 και ε_2 τέμνονται, και να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής τους M **M.7**

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή της παραμέτρου λ το σημείο M ανήκει στην ευθεία $\varepsilon : 8x + y - 6 = 0$ **M.7**

γ) Αν η ευθεία ε τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ στα σημεία A και B αντίστοιχα, τότε:

i) να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ζ που διέρχεται από την αρχή O των αξόνων και είναι παράλληλη προς την ευθεία AB **M.6**

ii) αν K είναι τυχαίο σημείο της ευθείας ζ , να αποδείξετε ότι $(KAB) = \frac{9}{4}$ **M.5**

40. Δίνεται η ευθεία $\varepsilon : x - 4y - 7 = 0$ και τα σημεία $A(-2,4)$ και $B(2,6)$

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες σημείου M της ευθείας ε το οποίο ισαπέχει από τα σημεία A και B **M.7**

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου MAB **M.8**

γ) Να αποδείξετε ότι τα σημεία $K(x,y)$ για τα οποία ισχύει $(KAB) = (MAB)$ ανήκουν στις ευθείες με εξισώσεις τις: $x - 2y - 5 = 0$ και $x - 2y + 25 = 0$ **M.10**

41. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2xy - 3\lambda x + 3\lambda y + 2\lambda^2 = 0$, με λ διαφορετικό του 0.

α) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει στο επίπεδο, δύο ευθείες παράλληλες μεταξύ τους, καθεμιά από τις οποίες έχει κλίση ίση με 1. **M.12**

β) Αν το εμβαδόν του τετραγώνου του οποίου οι δύο πλευρές βρίσκονται πάνω στις ευθείες του ερωτήματος α) είναι ίσο με 2, να βρείτε την τιμή του λ . **M.13**

42. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : 3x + y + 3 = 0$ και $\varepsilon_2 : x + 2y - 4 = 0$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής A των ευθειών ε_1 και ε_2 **M.5**

β) Αν η ευθεία ε_1 τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο B και η ευθεία ε_2 τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο Γ , τότε:

i) να βρείτε εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία B και Γ **M.5**

ii) να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ **M.5**

γ) Να αποδείξετε ότι τα σημεία $K(x,y)$ για τα οποία ισχύει $(KB\Gamma) = (AB\Gamma)$ ανήκουν σε δύο παράλληλες ευθείες, των οποίων να βρείτε τις εξισώσεις. **M.10**

43. Θεωρούμε ευθύγραμμο τμήμα AB που είναι παράλληλο προς την ευθεία $\varepsilon: y=x$ με $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ και $x_1 < x_2$. Αν το σημείο $M(3,5)$ είναι το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος AB και το γινόμενο των τετμημένων των σημείων A και B ισούται με 5, τότε:

α) να υπολογίσετε τις συντεταγμένες των σημείων A και B . **M.13**

β) να αποδείξετε ότι $(OAB) = 4$, όπου O είναι η αρχή των αξόνων. **M.5**

γ) να αποδείξετε ότι τα σημεία $K(x,y)$ για τα οποία ισχύει $(KAB) = 2(OAB)$ ανήκουν στις ευθείες με εξισώσεις τις: $x - y - 2 = 0$ και $x - y + 6 = 0$ **M.7**

44. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ με μέτρα 2, 6 αντίστοιχα και $\varphi \in [0, \pi]$ η μεταξύ τους γωνία. Επίσης δίνεται η εξίσωση $(\vec{\alpha}\vec{\beta} + 12)x + (\vec{\alpha}\vec{\beta} - 12)y - 5 = 0$ (1)

α) Να αποδείξετε ότι η (1) παριστάνει ευθεία για κάθε $\varphi \in [0, \pi]$. **M.3**

β) Αν η παραπάνω ευθεία είναι παράλληλη στον άξονα $y'y$, να αποδείξετε ότι $\vec{\beta} = 3\vec{\alpha}$ **M.7**

γ) Αν η παραπάνω ευθεία είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, να αποδείξετε ότι $\vec{\beta} = -3\vec{\alpha}$. **M.7**

δ) Αν η παραπάνω ευθεία είναι παράλληλη στην διχοτόμο πρώτης και τρίτης γωνίας των αξόνων, να αποδείξετε ότι $\vec{\beta} \perp \vec{\alpha}$ **M.8**

45. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: (2\lambda - 1)x + y - 5 = 0$, $\varepsilon_2: (\lambda^2 + 3)x - y - 15 = 0$ με $\lambda \in \mathbb{R}$ και το σημείο $A(2, -1)$.

α) Να αποδείξετε ότι, για κάθε τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ οι ευθείες τέμνονται. **M.7**

β) Αν οι ευθείες τέμνονται στο σημείο A , να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$. **M.10**

γ) Έστω $\lambda = 2$ και B, Γ τα σημεία που οι ε_1 και ε_2 τέμνουν τον άξονα $y'y$. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$. **M.8**

46. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon: 2κx - (1+κ)y + 1 - 3κ = 0$ και $\zeta: (1+3κ)x + (κ-1)y + 2 - 6κ = 0$, όπου $κ \in \mathbb{R}$

α) Να εξετάσετε αν υπάρχει τιμή του $κ$, ώστε οι ευθείες να είναι παράλληλες. **M.10**

β) Να βρείτε την αμβλεία γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες (ε) και (ζ). **M.15**

47. Δίνονται τα σημεία $A\left(1, \frac{-3}{2}\right)$, $B(2, -1)$ και $\Gamma\left(\mu, \frac{\mu-4}{2}\right)$, όπου $\mu \in \mathbb{R}$

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}$ **M.8**

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\mu \in \mathbb{R}$ το σημείο Γ ανήκει στην ευθεία που διέρχεται από τα σημεία A και B . **M.8**

γ) Να βρείτε την τιμή του μ έτσι, ώστε $\mu \cdot \overrightarrow{B\Gamma} = -\overrightarrow{AB}$ **M.6**

δ) Για την τιμή του μ που βρήκατε στο ερώτημα γ), να αποδείξετε ότι $(O\Gamma) = 1$, όπου O είναι η αρχή των αξόνων. **M.3**

48. Δίνονται τα σημεία $A(3,4)$, $B(5,7)$ και $\Gamma(2\mu+1, 3\mu-2)$, όπου $\mu \in \mathbb{R}$

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$ και, στη συνέχεια, να αποδείξετε ότι τα σημεία A , B και Γ δεν είναι συνευθειακά για κάθε τιμή του μ . **M.8**

β) Να αποδείξετε ότι:

i) το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ δεν εξαρτάται από το μ . **M.5**

ii) για κάθε τιμή του μ το σημείο Γ ανήκει σε ευθεία ε , της οποίας να βρείτε την εξίσωση. **M.7**

γ) Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά γιατί το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ παραμένει σταθερό, ανεξάρτητα από την τιμή του μ ; **M.5**

49. Σε καρτεσιανό σύστημα αξόνων Oxy θεωρούμε τα σημεία $M(x,y)$, $A(-1,3)$ και $B(2,-1)$ ώστε να σχηματίζουν τρίγωνο με εμβαδόν $(MAB) = 4$.

α) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος του M είναι δυο ευθείες ε_1 , ε_2 παράλληλες μεταξύ τους. **M.8**

β) Να βρείτε την απόσταση των ε_1 , ε_2 . **M.5**

γ) Να αποδείξετε ότι η ευθεία που διέρχεται από τα A, B είναι η μεσοπαράλληλη των $\varepsilon_1, \varepsilon_2$. Πως αιτιολογείται γεωμετρικά το συμπέρασμα αυτό; **M.12**

50. Δίνονται τα σημεία A(1,2), B(-3,4) και $\Gamma(2\lambda+1, 1-\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι, για οποιαδήποτε τιμή του λ , τα A, B, Γ σχηματίζουν τρίγωνο και το εμβαδόν του τριγώνου AB Γ είναι σταθερό. **M.12**

β) Να αποδείξετε ότι η κορυφή Γ κινείται σε ευθεία παράλληλη στην AB. **M.8**

γ) Να βρείτε τις συντεταγμένες του Γ ώστε το τρίγωνο AB Γ να είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την B Γ . **M.7**

51. Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Oxy θεωρούμε τις ευθείες

$$\varepsilon_\lambda : x + (\lambda + 2)y - \lambda + 1 = 0, \lambda \in \mathbb{R}$$

α) Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες διέρχονται από σταθερό σημείο M. **M.7**

β) Να αποδείξετε ότι $d(O, \varepsilon_\lambda) \leq \sqrt{10}$ **M.8**

γ) Να βρείτε ποια από τις ευθείες της παραπάνω μορφής απέχει την μέγιστη απόσταση από το O. **M.10**

52. Θεωρούμε τα σημεία A(2,2), B(-1,0) και $\Gamma(0,2)$.

α) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M(x,y) ώστε

$$\overrightarrow{AM}^2 + \overrightarrow{BM}^2 - 2\overrightarrow{GM}^2 = 3 \text{ είναι η ευθεία } \varepsilon : x - 2y + 1 = 0. \quad \mathbf{M.10}$$

β) Να βρείτε:

i. Σημείο K στον άξονα $x'x$ ώστε το συμμετρικό του ως προς την ευθεία του ερωτήματος α) να είναι σημείο Λ του άξονα $y'y$. **M.10**

ii. Το εμβαδόν του τριγώνου ΚΛΣ όπου Σ είναι το σημείο τομής της ευθείας ε με τον άξονα $y'y$. **M.5**