

§3.1 Ο ΚΥΚΛΟΣ

1. Δίνεται η εξίσωση: $x^2 + y^2 + 10y + 16 = 0$ (1)

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο το σημείο $K(0,-5)$ και ακτίνα $\rho = 3$. **M.12**

β) Από τις ευθείες που διέρχονται από την αρχή των αξόνων να προσδιορίσετε εκείνες που εφάπτονται του παραπάνω κύκλου. **M.13**

2. Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy θεωρούμε κύκλο C που διέρχεται από το σημείο $A(3,10)$ και έχει κέντρο το $K(4,8)$.

α) Να αποδείξετε ότι $C: (x-4)^2 + (y-8)^2 = 5$, και έπειτα να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από τα σημεία O και K . **M.13**

β) Από τα σημεία του κύκλου C να βρείτε τις συντεταγμένες:

i. του σημείου που απέχει τη μικρότερη απόσταση από την αρχή των αξόνων. **M.6**

ii. του σημείου που απέχει τη μεγαλύτερη απόσταση από την αρχή των αξόνων. **M.6**

3. Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy θεωρούμε τα σημεία $A(x,y)$, $B(3,2)$ και $\Gamma(1,0)$.

Αν τα σημεία αυτά σχηματίζουν ορθογώνιο τρίγωνο με υποτείνουσα τη $B\Gamma$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι το A κινείται στον κύκλο $C: (x-2)^2 + (y-1)^2 = 2$. **M.13**

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του A , ώστε το τρίγωνο $AB\Gamma$ να είναι και ισοσκελές.

M.12

4. Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy θεωρούμε τα σημεία $K(2,-1)$ και $A(-6,5)$.

α) Να αποδείξετε ότι ο κύκλος με κέντρο K που διέρχεται από το A , έχει εξίσωση

$$C: (x-2)^2 + (y+1)^2 = 100 \quad \mathbf{M.12}$$

β) Να βρείτε την εξίσωση κύκλου που εφάπτεται εσωτερικά στον κύκλο C στο σημείο A και έχει ακτίνα ίση με το μισό της ακτίνας του C . **M.13**

5. Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy θεωρούμε τα σημεία $A(1,0)$, $B(3,-2)$ και την ευθεία $\varepsilon: x+y+1=0$. Να βρείτε:

α) Την εξίσωση της μεσοκάθετης του τμήματος AB . **M.10**

β) Την εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία A, B και έχει το κέντρο του στην ευθεία ε. **M.15**

6. Έστω η εξίσωση: $(x - \lambda + 6)^2 + (y - 2\lambda)^2 = -\lambda^2 + 8\lambda - 12$ (1), όπου $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Τι παριστάνει γεωμετρικά σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy η εξίσωση (1) όταν $\lambda = 2$ και τι όταν $\lambda = 6$; **M.8**

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή του λ από το διάστημα (2,6) η εξίσωση (1) στο καρτεσιανό επίπεδο Oxy παριστάνει κύκλο. **M.8**

γ) Καθώς το λ μεταβάλλεται στο διάστημα (2,6), να αποδείξετε ότι τα κέντρα των κύκλων οι οποίοι προκύπτουν από την εξίσωση (1) ανήκουν σε ένα ευθύγραμμο τμήμα από το οποίο εξαιρούνται τα άκρα του. **M.9**

7. Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy θεωρούμε τον κύκλο $C_1: x^2 + y^2 = 4$ και μία τυχούσα διάμετρό του AB με $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$.

α) Να δικαιολογήσετε γιατί ισχύει $x_2 = -x_1$ και $y_2 = -y_1$; **M.5**

β) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $N(\kappa, \lambda)$ για τα οποία ισχύει $\overrightarrow{NA} \cdot \overrightarrow{NB} = 5$ είναι ο κύκλος $C_2: x^2 + y^2 = 9$. **M.12**

γ) Στο καρτεσιανό επίπεδο να προσδιορίσετε τη θέση των σημείων $M(x, y)$ για τα οποία ισχύει: $4 \leq x^2 + y^2 \leq 9$. **M.8**

8. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 4$. Να αποδείξετε ότι:

α) Η εξίσωση παριστάνει κύκλο C του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα. **M.8**

β) Ο κύκλος C εφάπτεται στον άξονα $x'x$ και να προσδιορίσετε το σημείο επαφής τους. **M.8**

γ) Το σημείο $M(2, -1)$ βρίσκεται στο εσωτερικό του κύκλου. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που τέμνει τον κύκλο σε δυο σημεία A, B ώστε η χορδή AB του κύκλου να έχει μέσο το M. **M.10**

9. Δίνονται οι εξισώσεις

$$(x + y - 1)(x + y + 1) = 2xy \quad (1) \text{ και } (\lambda - 1)x + (2\lambda + 3)y + 2\lambda - 5 = 0 \quad (2), \lambda \in \mathbb{R}$$

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο C με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho = 1$. **M.8**

- β)** Να αποδείξετε ότι, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση (2) παριστάνει ευθεία. Κατόπιν να αποδείξετε ότι οι ευθείες που προκύπτουν από την (2) για τις διάφορες τιμές του λ διέρχονται από το ίδιο σημείο, το οποίο να προσδιορίσετε. **M.10**
- γ)** Έστω A και B τα σημεία τομής του κύκλου C με τους θετικούς ημιάξονες O α και O γ αντίστοιχα. Να εξετάσετε αν υπάρχει τιμή του λ , ώστε η ευθεία AB να προκύπτει από την εξίσωση (2). **M.7**
- 10.** Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy θεωρούμε την εξίσωση $x^2 + y^2 - (3\alpha + 2)x + \alpha^2 - 4 = 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
- α)** Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$, η εξίσωση παριστάνει κύκλο. Κατόπιν, να βρείτε για ποιες τιμές του α , ο κύκλος διέρχεται από την αρχή O. **M.10**
- β)** Έστω C ο κύκλος που προκύπτει από την παραπάνω εξίσωση όταν $\alpha = 2$ και $y = \lambda x$, $\lambda \in \mathbb{R}$ μια ευθεία που τέμνει τον κύκλο C σε σημείο A διαφορετικό από το O.
- i.** Να βρείτε τις συντεταγμένες του A συναρτήσει του λ . **M.10**
- ii.** Να αποδείξετε ότι το μέσο M του τμήματος OA κινείται σε κύκλο σταθερής ακτίνας ο οποίος διέρχεται από το O. **M.5**
- 11.** Σε καρτεσιανό σύστημα Oxy, θεωρούμε τα σημεία M(x,y), A(-25,0) και B(-1,0) για τα οποία ισχύει $|\overline{AM}| = 5|\overline{BM}|$.
- α)** Να αποδείξετε ότι το σημείο M ανήκει στον κύκλο $C: x^2 + y^2 = 25$. **M.10**
- β)** Θεωρούμε το σημείο Σ(7,1).
- i.** Να εξετάσετε αν το σημείο Σ βρίσκεται στο εσωτερικό ή το εξωτερικό του κύκλου C. **M.5**
- ii.** Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες, από το σημείο Σ προς τον κύκλο, είναι μεταξύ τους κάθετες. **M.10**
- 12.** Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy θεωρούμε τα σημεία M(x,y), A(-2,0) και B(2,0) ώστε να ισχύει $\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2 = 3\overline{AM} \cdot \overline{BM}$
- α)** Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M είναι ο κύκλος $C: x^2 + y^2 = 20$ **M.10**
- β)** Έστω Γ, Δ σημεία του κύκλου C ώστε $\left(\frac{\Gamma\Delta}{4}\right)^2 = 5$
- i.** Να αποδείξετε ότι τα σημεία Γ, Δ και η αρχή των αξόνων O, είναι συνευθειακά. **M.10**

ii. Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\overline{MG} \cdot \overline{MD}$ όταν το M κινείται στον κύκλο.

M.5

13. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - (\lambda - 1)x - (\lambda - 7)y + \lambda = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε τιμή του λ , με $\lambda \neq 5$, παριστάνει κύκλο.

Κατόπιν να βρείτε τι παριστάνει η εξίσωση, όταν $\lambda = 5$.

M.12

β) Έστω C_1 , C_2 οι κύκλοι που προκύπτουν από την παραπάνω εξίσωση όταν $\lambda = 3$ και $\lambda = 9$ αντίστοιχα.

i. Να αποδείξετε ότι οι κύκλοι C_1 και C_2 εφάπτονται εξωτερικά.

M.6

ii. Να βρείτε το σημείο επαφής των κύκλων.

M.7

§3.2 Η ΠΑΡΑΒΟΛΗ

14. Θεωρούμε την παραβολή $C: y^2 = 4x$ και την κατακόρυφη ευθεία $\varepsilon: x = \frac{p}{2}$, όπου p είναι η παράμετρος της παραβολής C .

α) Να βρείτε την εστία και τη διευθετούσα της παραβολής.

M.10

β) Αν η ευθεία ε τέμνει την παραβολή C στα σημεία της B και Γ , τότε:

i. να βρείτε τις συντεταγμένες των B και Γ , καθώς και τις εξισώσεις των εφαπτομένων ε_1 και ε_2 της παραβολής C στα σημεία της αυτά αντίστοιχα.

M.10

ii. να αποδείξετε ότι το σημείο τομής των ε_1 και ε_2 ανήκει στη διευθετούσα της C .

M.5

15. Δίνεται η εξίσωση: $y^4 - 16x^2 = 0$ (1)

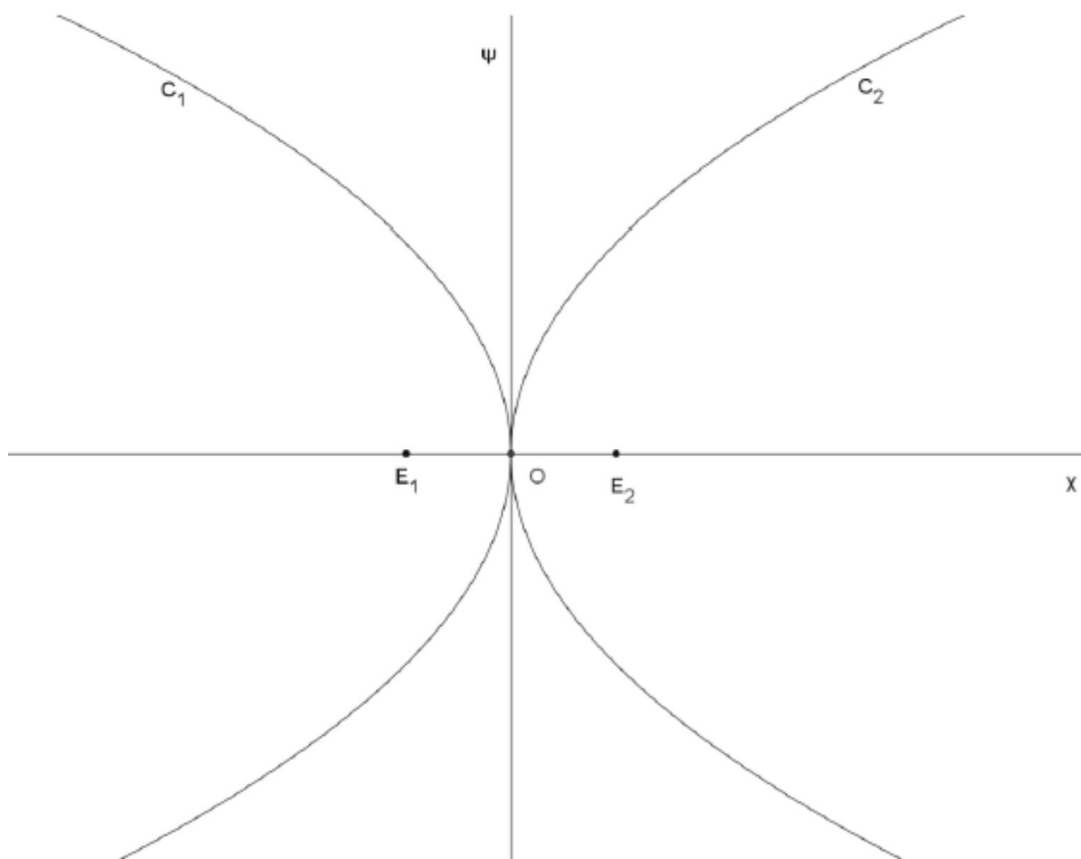
α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει δύο παραβολές $C_1: y^2 = 4x$ και $C_2: y^2 = -4x$ και να βρείτε για καθεμιά από αυτές την εστία και τη διευθετούσα της.

M.13

β) Αν E_1 και E_2 είναι οι εστίες των παραβολών C_1 και C_2 αντίστοιχα, να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα E_1E_2 .

M.12

- 16.** Στο παρακάτω σχήμα απεικονίζονται οι παραβολές $C_1 : y^2 = -2px$ και $C_2 : y^2 = 2px$ οι οποίες έχουν εστίες τα σημεία E_1 και E_2 αντίστοιχα. Η απόσταση των σημείων E_1 και E_2 είναι ίση με 4 μονάδες.



- α)** Να βρείτε την εστία, τη διευθετούσα και την εξίσωση καθεμιάς από τις παραβολές C_1 και C_2 . **M.15**
- β)** Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα E_1E_2 . **M.10**
- 17.** Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy θεωρούμε κύκλο C_1 ο οποίος έχει το κέντρο του στην ευθεία $\varepsilon : x - y - 1 = 0$. Έστω επίσης $A(5,3)$ και $B(1,5)$ δύο σημεία του κύκλου C_1 .
- α)** Να αποδείξετε ότι $C_1 : (x-1)^2 + y^2 = 25$ **M.9**
- β)** Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής C_2 που έχει κορυφή την αρχή των αξόνων και εστία το κέντρο του κύκλου C_1 . **M.7**
- γ)** Αν M_1 και M_2 είναι τα σημεία τομής των C_1 και C_2 , τότε:
- i.** να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων ε_1 και ε_2 της παραβολής C_2 στα σημεία αυτά. **M.5**

ii. να αποδείξετε ότι οι ε_1 και ε_2 τέμνονται σε σημείο που ανήκει στον κύκλο C_1

M.4

18. Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy θεωρούμε κύκλο C που διέρχεται από τα σημεία $A(0,2)$, $B(-2,4)$ και $\Gamma(0,6)$.

α) Να αποδείξετε ότι $C : x^2 + (y - 4)^2 = 4$

M.10

β) Από τις ευθείες που διέρχονται από την αρχή των αξόνων να προσδιορίσετε εκείνες που εφάπτονται του κύκλου C .

M.9

γ) Αν M_1 και M_2 είναι τα σημεία επαφής του κύκλου C με τις εφαπτόμενες του ερωτήματος β), να βρείτε την εξίσωση της παραβολής που έχει κορυφή την αρχή των αξόνων και διέρχεται από τα σημεία M_1 και M_2

M.6

19. Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy θεωρούμε τα σημεία $A(-2,-2)$, $B(0,-4)$, την παραβολή $y^2 = 4x$ και έστω $M(x,y)$ τυχαίο σημείο της παραβολής.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $(MAB) = \frac{1}{4}(y^2 + 4y + 16)$

ii. $(MAB) \geq 3$

M.10

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του M ώστε το εμβαδόν (MAB) του τριγώνου MAB να γίνεται ελάχιστο.

M.5

γ) Έστω ότι το εμβαδόν του τριγώνου γίνεται ελάχιστο όταν $M(1,-2)$. Να εξετάσετε αν η εφαπτομένη της παραβολής στο M είναι παράλληλη στην πλευρά AB του τριγώνου MAB .

M.10

§3.3 Η ΕΛΛΕΙΨΗ

20. Δίνονται οι ελλείψεις $C_1 : x^2 + 4y^2 = 20$ και $C_2 : 4x^2 + y^2 = 20$

α) Να αποδείξετε ότι οι ελλείψεις C_1 και C_2 έχουν την ίδια εκκεντρότητα.

M.12

β) Να αποδείξετε ότι τα σημεία τομής των ελλείψεων C_1 και C_2 ανήκουν στον κύκλο

$C : x^2 + y^2 = 8$

M.13

21. Δίνονται ο κύκλος $C_1: x^2 + y^2 = 20$, η έλλειψη $C_2: \frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1$ και η κατακόρυφη

ευθεία $\varepsilon: x = 4$. Αν Γ και Δ είναι τα σημεία του πρώτου τεταρτημορίου στα οποία η ευθεία ε τέμνει τον κύκλο C_1 και την έλλειψη C_2 αντίστοιχα, τότε:

α) να βρείτε τις συντεταγμένες των Γ και Δ . **M.11**

β) να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου C_1 στο σημείο του Γ και της έλλειψης C_2 στο σημείο της Δ , καθώς και το σημείο τομής των εφαπτομένων αυτών.

M.14

22. Θεωρούμε την έλλειψη με εστίες τα σημεία $E'(-\sqrt{5}, 0)$, $E(\sqrt{5}, 0)$ και μεγάλο άξονα μήκους 6 μονάδων.

α) Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης. **M.10**

β) Αν είναι σημείο της έλλειψης για το οποίο ισχύει $ME' = 2 \cdot ME$, τότε:

i. να βρείτε τα μήκη των ευθυγράμμων τμημάτων και ME' και ME . **M.9**

ii. να αποδείξετε ότι η γωνία $E'ME$ είναι ορθή. **M.6**

23. Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy θεωρούμε τα σημεία $M(x, y)$ για τα οποία ισχύει η ισότητα $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} + \frac{16}{9}(\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}) = 0$, όπου $A(-3, 0)$ και $B(3, 0)$.

α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία M ανήκουν στον κύκλο $C_1: x^2 + y^2 = 25$ **M.11**

β) Αν Γ και Δ είναι τα σημεία τομής του κύκλου C_1 με τον άξονα $x'x$, τότε:

i. να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης C_2 η οποία έχει μεγάλο άξονα το ευθύγραμμο τμήμα $\Gamma\Delta$ και εστίες τα σημεία A και B . **M.10**

ii. να παραστήσετε γραφικά τον κύκλο C_1 και την έλλειψη C_2 . **M.4**

§3.4 Η ΥΠΕΡΒΟΛΗ

24. Μια έλλειψη C_1 έχει εκκεντρότητα ίση με $\frac{4}{5}$ και τις ίδιες εστίες με την υπερβολή

$$C_2: \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$$

α) Να αποδείξετε ότι $C_1 : \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ **M.15**

β) Να παραστήσετε γραφικά την έλλειψη C_1 και την υπερβολή C_2 σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy . **M.10**

25. α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της υπερβολής που τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία

$A'(-2,0)$, $A(2,0)$ και διέρχεται από το σημείο $\Gamma(2\sqrt{5},2)$ είναι η $C_1 : \frac{x^2}{4} - y^2 = 1$. **M.10**

β) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου C_2 με διάμετρο το τμήμα $A'A$. **M.5**

γ) Να αποδείξετε ότι οι μοναδικές κοινές εφαπτόμενες της υπερβολής C_1 και του κύκλου C_2 είναι οι ευθείες $\varepsilon_1 : x = -2$ και $\varepsilon_2 : x = 2$. **M.10**