

Απαντήσεις εργασίας 1 – Συναρτήσεις

Θέμα 1° 1-γ , 2-δ , 3-ε , 4-α

Θέμα 2° 1-ζ , 2-γ , 3-α , 4-η

Θέμα 3° 1-α , 2-δ , 3-ε , 4-β

Θέμα 4°

α) Για να τέμνει η γραφική παράσταση της f τέμνει την ευθεία ε , σε ένα τουλάχιστον σημείο θα πρέπει η εξίσωση $f(x)=\kappa$ να έχει μια τουλάχιστον λύση στο $\mathbb{R}$. Είναι $f(x)=\kappa \Leftrightarrow x^2-4x+3=\kappa \Leftrightarrow x^2-4x+3-\kappa=0$

Η τελευταία εξίσωση είναι 2^{ου} βαθμού ως προς x και για να έχει μια τουλάχιστον λύση στο $\mathbb{R}$ πρέπει

$$\Delta \geq 0 \Rightarrow 16-4(3-\kappa) \geq 0 \Rightarrow 16-12+4\kappa \geq 0 \Rightarrow 4\kappa \geq -4 \Rightarrow \kappa \geq -1$$

2^{ος} τρόπος

Η γραφική παράσταση της f είναι μια παραβολή με κορυφή

$(-\frac{\beta}{2\alpha}, f(-\frac{\beta}{2\alpha}))$ $(2, f(2))$ δηλαδή $(2,-1)$ και $\alpha=1>0$. Η ευθεία $\psi=\kappa$ είναι

μια ευθεία παράλληλη στον $\chi\chi'$ που τέμνει το $\psi\psi'$ στο κ . Για να τέμνονται λοιπόν θα πρέπει η ευθεία να περνά από την κορυφή της παραβολής ή πάνω από αυτήν δηλαδή θα πρέπει $\kappa \geq -1$.

β) Αν η ευθεία τέμνει την παραβολή σε δύο σημεία τότε η παραπάνω εξίσωση θα έχει δύο ρίζες τις x_1, x_2 . Έστω ότι $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$. Τότε η

τετμημένη του μέσου του AB θα είναι $\frac{x_1+x_2}{2}$. όμως από τύπους *Vieta*

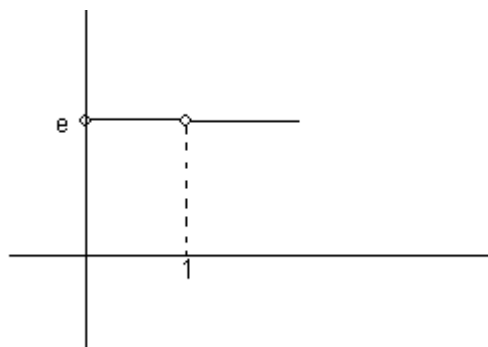
$$x_1+x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{-4}{1} = 4 \Rightarrow \frac{x_1+x_2}{2} = 2 .$$

Θέμα 5°

α) Πρέπει $x>0$ και $\ln x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$ οπότε $D_f = (0, 1) \cup (1, +\infty)$

$$\beta) y = x^{\frac{1}{\ln x}} \Leftrightarrow \ln y = \ln x^{\frac{1}{\ln x}} \Leftrightarrow \ell n y = \frac{1}{\ln x} \ln x = 1 \Leftrightarrow y = e \text{ για κάθε } x \in D_f$$

γ) Η γραφική παράσταση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα: .



Θέμα 6°

α) Πρέπει $\chi^2 - 3\chi + \alpha \neq 0$ για κάθε $\chi \in \mathbb{R}$, δηλαδή πρέπει $\Delta < 0$.

$$\text{Είναι } \Delta < 0 \Leftrightarrow 9 - 4\alpha < 0 \Leftrightarrow 4\alpha > 9 \Leftrightarrow \alpha > \frac{9}{4}$$

β) Πρέπει $\chi^2 + 3\alpha\chi + \alpha > 0$ για κάθε $\chi \in \mathbb{R}$, και επειδή ο συντελεστής του χ^2 είναι 1 δηλαδή θετικός πρέπει και αρκεί $\Delta < 0$.

$$\Delta < 0 \Leftrightarrow 9\alpha^2 - 4\alpha < 0 \Leftrightarrow \alpha(9\alpha - 4) < 0 \Leftrightarrow 0 < \alpha < \frac{4}{9}.$$

Τελικά για να έχει η συνάρτηση πεδίο ορισμού όλο το $\mathbb{R}$, πρέπει $\alpha \in \left(0, \frac{4}{9}\right)$.

γ) Πρέπει $(\alpha - 1)\chi^2 - 2\alpha\chi - \alpha + 6 > 0$ για κάθε $\chi \in \mathbb{R}$.

Δεν είμαστε σίγουροι αν είναι 1^{ου} ή 2^{ου} βαθμού για αυτό διακρίνουμε περιπτώσεις για το α .

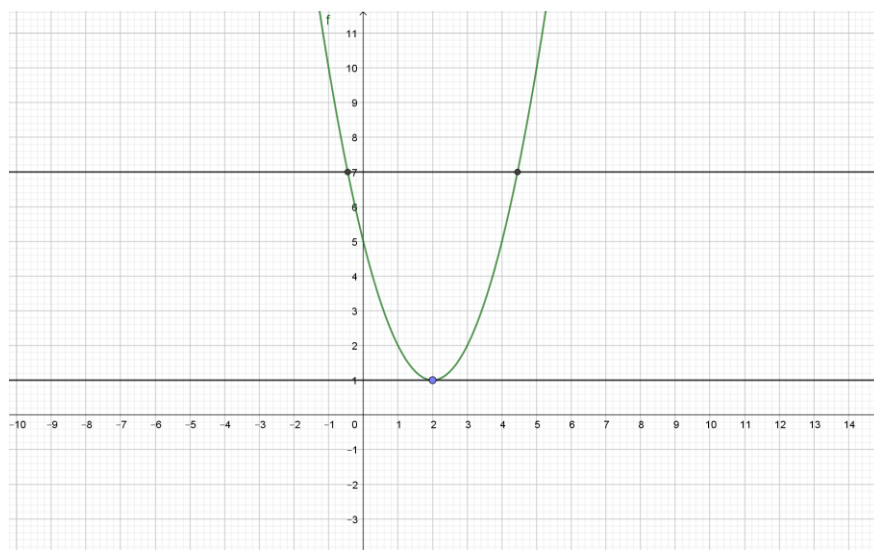
- Αν $\alpha = 1$ έχουμε $-2\chi - 1 + 6 > 0 \Leftrightarrow \chi < \frac{5}{2}$ πράγμα που σημαίνει ότι δεν έχει για πεδίο ορισμού όλο το $\mathbb{R}$ και άρα η τιμή $\alpha = 1$ απορρίπτεται.
- Αν $\alpha \neq 1$ τότε είναι 2^{ου} βαθμού και για να ισχύει $(\alpha - 1)\chi^2 - 2\alpha\chi - \alpha + 6 > 0$ για κάθε $\chi \in \mathbb{R}$ πρέπει $\Delta < 0$ και $\alpha - 1 > 0$.
Είναι $\alpha - 1 > 0 \Leftrightarrow \alpha > 1$ και

$$\begin{aligned} \Delta < 0 &\Leftrightarrow 4\alpha^2 - 4(\alpha - 1)(-\alpha + 6) < 0 \Leftrightarrow 4\alpha^2 - 4(-\alpha^2 + 6\alpha + \alpha - 6) < 0 \Leftrightarrow 4\alpha^2 + 4\alpha^2 - 24\alpha - 4\alpha + 24 < 0 \Leftrightarrow \\ 8\alpha^2 - 28\alpha + 24 < 0 &\Leftrightarrow 2\alpha^2 - 7\alpha + 6 < 0 \Leftrightarrow 2\alpha^2 - 4\alpha - 3\alpha + 6 < 0 \Leftrightarrow 2\alpha(\alpha - 2) - 3(\alpha - 2) < 0 \Leftrightarrow \\ (\alpha - 2)(2\alpha - 3) < 0 &\Leftrightarrow \frac{3}{2} < \alpha < 2 \end{aligned}$$

Συναληθεύοντας τις δύο απαιτήσεις έχουμε ότι $\frac{3}{2} < \alpha < 2$.

Τελικά για να έχει η συνάρτηση πεδίο ορισμού όλο το $\mathbb{R}$, πρέπει $\alpha \in \left(\frac{3}{2}, 2\right)$.

Θέμα 7°



β)

i. Η ευθεία $y = \lambda$ είναι παράλληλη στον x' και τέμνει τον $y'y$ στο σημείο $(0, \lambda)$.

Από το σχήμα βλέπουμε ότι το πλήθος των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία $y = \lambda$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, εξαρτάται από το αν η τιμή του λ είναι μεγαλύτερη, μικρότερη ή ίση με 1, διότι με βάση το σχήμα βλέπουμε ότι η μικρότερη τιμή της συνάρτησης είναι 1.

Συγκεκριμένα βλέπουμε από το σχήμα ότι:

- αν $\lambda < 1$ η ευθεία $y = \lambda$ δεν έχει κοινά σημεία με τη γραφική παράσταση της f ,
- αν $\lambda = 1$ η ευθεία $y = \lambda$ έχει ένα κοινό σημείο με τη γραφική παράσταση της f ,
- αν $\lambda > 1$ η ευθεία $y = \lambda$ έχει δύο κοινά σημεία με τη γραφική παράσταση της f .

ii. Το πλήθος των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία $y = \lambda$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, είναι το ίδιο με το πλήθος των διαφορετικών ριζών της εξίσωσης $f(x) = \lambda \Leftrightarrow x^2 - 4x + 5 - \lambda = 0$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.

Η εξίσωση αυτή είναι 2ου βαθμού ως προς x με διακρίνουσα

$$\Delta = (-4)^2 - 4(5 - \lambda) = 16 - 20 + 4\lambda = 4\lambda - 4 = 4(\lambda - 1).$$

Το πλήθος των ριζών της εξίσωσης εξαρτάται από το πρόσημο της διακρίνουσας.

Συγκεκριμένα :

- αν $\lambda < 1$ τότε $\Delta < 0$ οπότε η εξίσωση είναι αδύνατη και επομένως η ευθεία $y = \lambda$ δεν έχει κοινά σημεία με τη γραφική παράσταση της f ,
- αν $\lambda = 1$ τότε $\Delta = 0$ οπότε η εξίσωση έχει 1 διπλή ρίζα και επομένως η ευθεία $y = \lambda$ έχει ένα κοινό σημείο με τη γραφική παράσταση της f ,
- αν $\lambda > 1$ τότε $\Delta > 0$ οπότε η εξίσωση έχει 2 ρίζες άνισες και επομένως η ευθεία $y = \lambda$ έχει δύο κοινά σημεία με τη γραφική παράσταση της f .

γ) Αφού η ευθεία $y = \lambda$ τέμνει τη γραφική παράσταση της f σε δύο σημεία με τετμημένες x_1, x_2 με $x_1 < x_2$ συμπεραίνουμε αφενός ότι $\lambda > 1$ και αφετέρου ότι οι αριθμοί x_1, x_2 θα είναι οι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = \lambda \Leftrightarrow x^2 - 4x + 5 - \lambda = 0$.

Η εξίσωση αυτή για $\lambda > 1$ έχει δύο ρίζες άνισες και έχουμε ότι

$$x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{-4}{1} = 4.$$

Θέμα 8°

α) Για να ορίζεται η συνάρτηση f πρέπει και αρκεί

$$x^3 - x \neq 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 1) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ \text{και} \\ x^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x^2 \neq 1 \Leftrightarrow x \neq \pm 1 \end{cases}.$$

Συνεπώς το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο

$$A = \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty).$$

β) Επειδή το $0 \notin A$ η γραφική παράσταση της f δεν έχει κοινό σημείο με τον $y'y$.

Οι τετμημένες των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της f με τον $x'x$ είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x) = 0$ με $x \in A$.

$$\text{Είναι } f(x) = 0 \Leftrightarrow x^7 - x = 0 \Leftrightarrow x(x^6 - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{ή} \\ x^6 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^6 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1 \end{cases}.$$

Επειδή $0 \notin A$, $-1 \notin A$, $1 \notin A$ η εξίσωση $f(x) = 0$ είναι αδύνατη στο σύνολο A και επομένως η γραφική παράσταση της f δεν έχει κοινό σημείο με τον $x'x$.

$$\gamma) \text{ Είναι } f(x) = \frac{x^7 - x}{x^3 - x} = \frac{x(x^6 - 1)}{x(x^2 - 1)} = \frac{(x^2)^3 - 1}{x^2 - 1} = \frac{(x^2 - 1)(x^4 + x^2 + 1)}{x^2 - 1} = x^4 + x^2 + 1 \text{ για}$$

κάθε $x \in A$.

δ) Είναι $f(x) = 3 \Leftrightarrow x^4 + x^2 + 1 = 3 \Leftrightarrow x^4 + x^2 - 2 = 0$. Θέτουμε $x^2 = \omega$ και η εξίσωση γίνεται $\omega^2 + \omega - 2 = 0$ που έχει ρίζες τις $\omega = 1$, $\omega = -2$ αφού $S = -\frac{\beta}{\alpha} = -1$ και

$$P = \frac{\gamma}{\alpha} = -2.$$

Για $\omega = 1$ έχουμε $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$ που όμως δεν ανήκουν στο πεδίο ορισμού A .

Για $\omega = -2$ έχουμε $x^2 = -2$ που είναι αδύνατη.

Συνεπώς η εξίσωση $f(x) = 3$ δεν έχει λύση στο σύνολο A και επομένως το 3 δεν ανήκει στο σύνολο τιμών της f .

Θέμα 9°

α) Οι τετμημένες των σημείων A, B είναι οι λύσεις της εξίσωσης

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow |x| = 2 - x^2 \Leftrightarrow x^2 + |x| - 2 = 0 \Leftrightarrow |x|^2 + |x| - 2 = 0.$$

Θέτουμε $|x| = \omega$ και η εξίσωση γίνεται $\omega^2 + \omega - 2 = 0$ που έχει ρίζες τις $\omega = 1$ ή $\omega = -2$.

Για $\omega = -2$ έχουμε $|x| = -2$ που είναι αδύνατη.

Για $\omega = 1$ έχουμε $|x| = 1$ οπότε $x = 1$ ή $x = -1$.

Επειδή το σημείο A βρίσκεται πιο αριστερά από το B , το σημείο A θα έχει μικρότερη τετμημένη, οπότε η τετμημένη του σημείου A είναι -1 και η τετμημένη του σημείου B είναι 1 .

Για $x = -1$ είναι $f(-1) = 1$ οπότε $A(-1, 1)$.

Για $x = 1$ είναι $f(1) = 1$ οπότε $B(1, 1)$.

β)

i. Η ανίσωση $f(x) < g(x)$ αληθεύει για τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g . Με βάση το σχήμα η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g , για τις τιμές του x που είναι μεταξύ των τετμημένων των σημείων A, B δηλαδή για $x \in (-1, 1)$.

ii. Έχουμε ισοδύναμα:

$$f(x) < g(x) \Leftrightarrow |x| < 2 - x^2 \Leftrightarrow x^2 + |x| - 2 < 0 \Leftrightarrow |x|^2 + |x| - 2 < 0.$$

Θέτουμε $|x| = \omega$ και η εξίσωση γίνεται $\omega^2 + \omega - 2 < 0$. Το τριώνυμο $\omega^2 + \omega - 2$ έχει ρίζες τις $\omega = 1$ ή $\omega = -2$ και γίνεται αρνητικό για τις τιμές του ω που είναι μεταξύ των ριζών του, δηλαδή για $-2 < \omega < 1$, δηλαδή $-2 < |x| < 1$.

Όμως η ανίσωση $-2 < |x|$ ισχύει για κάθε πραγματική τιμή του x , οπότε πρέπει και αρκεί $|x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1 \Leftrightarrow x \in (-1, 1)$ που επαληθεύει την απάντηση στο βi) ερώτημα.

Θέμα 10°

α) Αφού $5 > 1$ έχουμε ότι $\log 5 > \log 1 \Leftrightarrow \log 5 > 0$.

Αν $\log 5 = \nu$ με $\nu \in \mathbb{N}^*$ τότε θα είχαμε ότι $10^\nu = 5$ το οποίο είναι άτοπο για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$.

Συνεπώς ο $\log 5$ δεν είναι ακέραιος.

β) Είναι $\log 5 \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$ και $\log 5 > 0$ οπότε για να ορίζεται η δύναμη $x^{\log 5}$ θα πρέπει $x \geq 0$. Συνεπώς το πεδίο ορισμού της f είναι το $[0, +\infty)$.

Είναι $\log \frac{1}{5} = -\log 5 \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$ και $\log \frac{1}{5} < 0$ οπότε για να ορίζεται η δύναμη $x^{\log 5}$ θα πρέπει $x > 0$. Συνεπώς το πεδίο ορισμού της f είναι το $(0, +\infty)$.

γ) Είναι $f(2022) \cdot g(2022) = 2022^{\log 5} \cdot 2022^{-\log 5} = 2022^0 = 1$.

δ) Είναι $\frac{f(10)}{g(10)} = \frac{10^{\log 5}}{10^{\log \frac{1}{5}}} = \frac{5}{\frac{1}{5}} = 25$.

Θέμα 11ο α) $f(x) = \frac{\sqrt{6-2x}}{\sqrt{-x^2+7x-10}}$

Πρέπει $6-2x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 3$ και $-x^2+7x-10 > 0 \Leftrightarrow 2 < x < 5$.

Τελικά $x \in (2, 3]$.

β) $f(x) = \sqrt{\frac{x-2}{1-2x}}$

Πρέπει $\frac{x-2}{1-2x} \geq 0$ και $1-2x \neq 0$ οπότε $x \in (\frac{1}{2}, 2]$.

γ) $f(x) = \frac{2-3\ln(1-x)}{e^x-1}$

Πρέπει $1-x > 0$ και $e^x-1 \neq 0$ οπότε $x \in (-\infty, 0) \cup (0, 1)$.

Θέμα 12°

α) Οι τετμημένες των κοινών σημείων είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x) = g(x)$ με

$$x \neq 1 \text{ και } x \neq 0 \quad f(x) = g(x) \Leftrightarrow \frac{x+2}{x-1} = \frac{8}{x} \Leftrightarrow x^2 + 2x = 8x - 8 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 = 0$$

Οπότε $x = 2$ ή $x = 4$. Για $x = 2$ είναι $g(2) = 4$ και για $x = 4$ είναι $g(4) = 2$ οπότε τα κοινά σημεία είναι τα $(2, 4)$ και $(4, 2)$.

$$f(x) - g(x) = \frac{x+2}{x-1} - \frac{8}{x} = \frac{x^2 + 2x - 8x + 8}{x(x-1)} = \frac{x^2 - 6x + 8}{x(x-1)}$$

Η C_f είναι πάνω από τη C_g όταν

$$f(x) - g(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 6x + 8}{x(x-1)} > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0) \cup (1, 2) \cup (4, +\infty)$$

Η C_f είναι κάτω από τη C_g όταν

$$f(x) - g(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 6x + 8}{x(x-1)} < 0 \Leftrightarrow x \in (0, 1) \cup (2, 4)$$

β) Οι τετμημένες των κοινών σημείων είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x) = g(x)$ με $x \neq 0$

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = \frac{6}{x} \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 2x - 6 = 0 \Leftrightarrow (x-3)(x^2 + 2) = 0$$

Οπότε $x = 3$.

Για $x = 3$ είναι $g(3) = 2$ οπότε το κοινό σημείο είναι το $(3, 2)$.

$$f(x) - g(x) = x^2 - 3x + 2 - \frac{6}{x} = \frac{x^3 - 3x^2 + 2x - 6}{x} = \frac{(x-3)(x^2 + 2)}{x}$$

Η C_f είναι πάνω από τη C_g όταν

$$f(x) - g(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{(x-3)(x^2 + 2)}{x} > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$$

Η C_f είναι κάτω από τη C_g όταν

$$f(x) - g(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{(x-3)(x^2 + 2)}{x} < 0 \Leftrightarrow x \in (0, 3)$$

Θέμα 13°

α) Η συνάρτηση f ορίζεται για τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει

$$\frac{e^{3x} - 8}{e^{2x} + 4e^x - 12} > 0. \text{ Αν θέσουμε } e^x = \omega \text{ η τελευταία ανίσωση γίνεται}$$

$$\frac{\omega^3 - 8}{\omega^2 + 4\omega - 12} > 0. \text{ Το τριώνυμο } \omega^2 + 4\omega - 12 \text{ έχει ρίζες τις } \omega = 2 \text{ και } \omega = -6. \text{ Για}$$

$\omega \neq 2$ και $\omega \neq -6$ έχουμε ισοδύναμα

$$\frac{\omega^3 - 8}{\omega^2 + 4\omega - 12} > 0 \Leftrightarrow \frac{(\omega - 2)(\omega^2 + 2\omega + 4)}{(\omega - 2)(\omega + 6)} > 0 \Leftrightarrow (\omega^2 + 2\omega + 4)(\omega + 6) > 0 \text{ και επειδή}$$

το τριώνυμο $\omega^2 + 2\omega + 4$ έχει αρνητική διακρίνουσα θα είναι για κάθε $\omega \in \mathbb{R}$ ομόσημο του συντελεστή του ω^2 , δηλαδή θετικό, έχουμε τελικά ότι

$\omega + 6 > 0 \Leftrightarrow \omega > -6$. Το σύνολο των λύσεων της ανίσωσης $\frac{\omega^3 - 8}{\omega^2 + 4\omega - 12} > 0$ είναι το

$(-6, 2) \cup (2, +\infty)$. Συνεπώς θα πρέπει $e^x \neq 2 \Leftrightarrow x \neq \ln 2$ και $e^x > -6$ που ισχύει.

Τελικά το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R} - \{\ln 2\}$.

β) Οι τετμημένες των σημείων τομής της γραφική παράσταση της f με τον άξονα $x\chi'$ είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x) = 0$ με $x \neq \ln 2$. Είναι

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \ln \frac{e^{3x} - 8}{e^{2x} + 4e^x - 12} = \ln 1 \Leftrightarrow \frac{e^{3x} - 8}{e^{2x} + 4e^x - 12} = 1 \Leftrightarrow e^{3x} - 8 = e^{2x} + 4e^x - 12 \Leftrightarrow e^{3x} - e^{2x} - 4e^x + 4 = 0 \Leftrightarrow e^{2x}(e^x - 1) - 4(e^x - 1) = 0 \Leftrightarrow (e^x - 1)(e^{2x} - 4) = 0 \Leftrightarrow (e^x - 1)(e^x - 2)(e^x + 2) = 0$$

Συνεπώς θα πρέπει $e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$ που είναι δεκτή ή

$e^x - 2 = 0 \Leftrightarrow e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln 2$ που απορρίπτεται ή $e^x + 2 = 0 \Leftrightarrow e^x = -2$ που είναι αδύνατη. Τελικά το μοναδικό σημείο τομής της γραφική παράσταση της f με τον άξονα $x\chi'$ είναι το $(0, 0)$.

γ) Για $x \neq \ln 2$ έχουμε

$$f(x) \geq 1 \Leftrightarrow \frac{e^{3x} - 8}{e^{2x} + 4e^x - 12} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{e^{3x} - 8}{e^{2x} + 4e^x - 12} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{e^{3x} - 8 - e^{2x} - 4e^x + 12}{e^{2x} + 4e^x - 12} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{e^{3x} - e^{2x} - 4e^x + 4}{e^{2x} + 4e^x - 12} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{e^{2x}(e^x - 1) - 4(e^x - 1)}{e^{2x} + 4e^x - 12} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(e^x - 1)(e^{2x} - 4)}{e^{2x} + 4e^x - 12} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(e^x - 1)(e^x - 2)(e^x + 2)}{(e^x - 2)(e^x + 6)} \geq 0 \Leftrightarrow e^x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 0$$

Τελικά $x \in [0, \ln 2) \cup (\ln 2, +\infty)$.

Θέμα 14°

α) Αν υπήρχε γωνία x τέτοια ώστε $\eta\mu x = \sigma\upsilon\nu x = 0$, τότε από τη βασική τριγωνομετρική ταυτότητα $\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1$ θα είχαμε $0 + 0 = 1$, το οποίο είναι άτοπο. Συνεπώς δεν υπάρχει γωνία x τέτοια ώστε $\eta\mu x = \sigma\upsilon\nu x = 0$.

β) Αν $\sigma\upsilon\nu x = 0$ τότε από την εξίσωση $\sqrt{3} \cdot \eta\mu x = 3 \cdot \sigma\upsilon\nu x$ θα είχαμε και $\eta\mu x = 0$, το οποίο όμως όπως δείξαμε στο α) είναι άτοπο. Συνεπώς $\sigma\upsilon\nu x \neq 0$.

Με $\sigma\upsilon\nu x \neq 0$ έχουμε ισοδύναμα

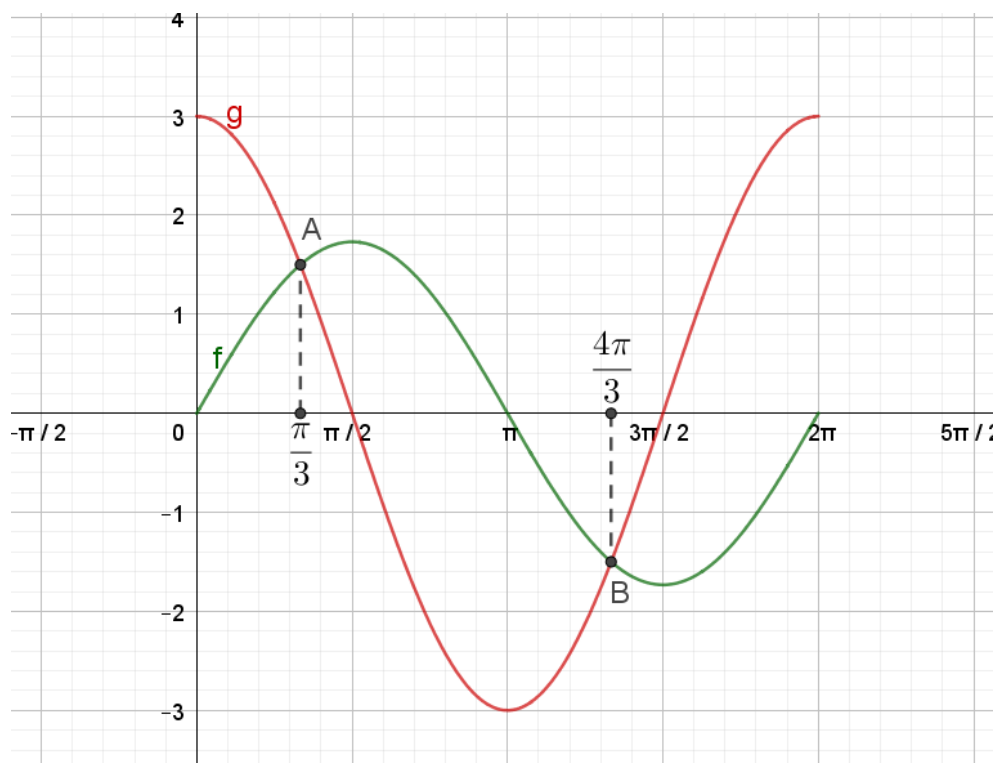
$$\sqrt{3} \cdot \eta\mu x = 3 \cdot \sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = \frac{3}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \epsilon\phi x = \sqrt{3} \Leftrightarrow \epsilon\phi x = \epsilon\phi \frac{\pi}{3}$$

η οποία στο διάστημα $[0, 2\pi]$ έχει λύσεις τις $x = \frac{\pi}{3}$ και $x = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$.

γ) Με βάση τον παρακάτω πίνακα τιμών

x	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$f(x) = \sqrt{3} \cdot \eta\mu x$	0	$\sqrt{3}$	0	$-\sqrt{3}$	0
$g(x) = 3 \cdot \sigma\upsilon\nu x$	3	0	-3	0	3

οι ζητούμενες γραφικές παραστάσεις φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.



Όπως βλέπουμε στο παραπάνω σχήμα οι γραφικές παραστάσεις των f, g τέμνονται στα σημεία A και B οι τετμημένες των οποίων είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x) = g(x) \Leftrightarrow \sqrt{3} \cdot \eta\mu x = 3 \cdot \sigma\upsilon\nu x$, που όπως βρήκαμε στο ερώτημα β) είναι $\frac{\pi}{3}$ και $\frac{4\pi}{3}$ αντίστοιχα. Αυτή είναι η ζητούμενη γραφική ερμηνεία.

δ) Η ανίσωση $\sqrt{3} \cdot \eta\mu x < 3 \cdot \sigma\upsilon\nu x$ στο διάστημα $[0, 2\pi]$, γραφικά σημαίνει να βρούμε για ποιες τιμές του x στο διάστημα $[0, 2\pi]$, η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της g . Από το παραπάνω σχήμα βλέπουμε ότι αυτό συμβαίνει για $x \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{4\pi}{3}, 2\pi\right)$.

Θέμα 15°

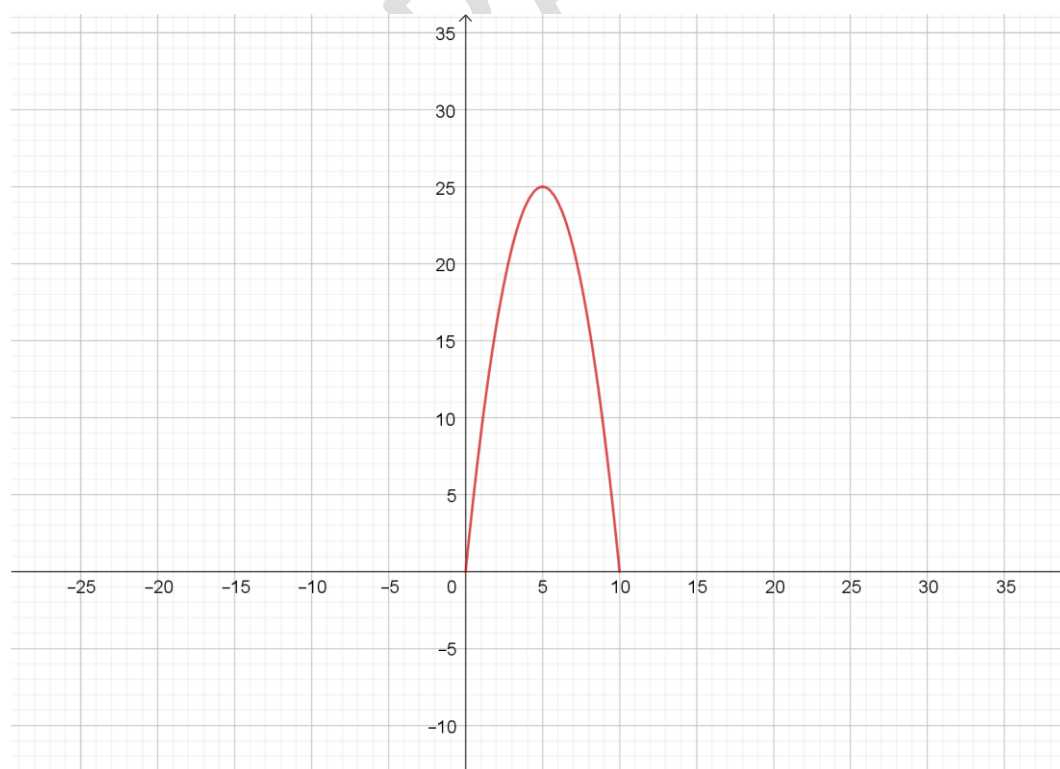
α) Η περίμετρος του ορθογωνίου, ισούται αφενός με $2x + 2y$ και αφετέρου με 20 m που είναι το μήκος του συρματοπλέγματος με το οποίο κατασκευάστηκε. Συνεπώς είναι $2x + 2y = 20 \Leftrightarrow x + y = 10 \Leftrightarrow y = 10 - x$. Επίσης πρέπει $x > 0$ και $y > 0 \Leftrightarrow 10 - x > 0 \Leftrightarrow x < 10$ ως μήκη πλευρών, οπότε συναληθεύοντας έχουμε τελικά ότι $0 < x < 10$.

β) Το ζητούμενο εμβαδόν είναι $x \cdot y = x \cdot (10 - x) = 10x - x^2$ οπότε

$$\begin{aligned} E(x) &= 10x - x^2 = \\ &= -x^2 + 10x - 25 + 25 = \\ &= -(x^2 - 10x + 25) + 25 = \\ &= -(x - 5)^2 + 25 \end{aligned}$$

με πεδίο ορισμού της το $(0,10)$ αφού όπως δείξαμε παραπάνω είναι $0 < x < 10$.

γ) Η γραφική παράσταση της $E(x)$ θα προκύψει από τη γραφική παράσταση της $g(x) = -x^2$, με μια οριζόντια μετατόπιση 5 μονάδες δεξιά και στη συνέχεια με μία κατακόρυφη μετατόπιση 25 μονάδων προς τα πάνω. Η γραφική παράσταση της $E(x)$ στο $(0,10)$ φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Από τη γραφική παράσταση συμπεραίνουμε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου γίνεται μέγιστο όταν $x = 5$. Μάλιστα η μέγιστη τιμή του είναι 25 m^2 .

δ) Για $x = 5$ έχουμε ότι $y = 10 - 5 = 5$, δηλαδή το εμβαδόν του ορθογωνίου γίνεται μέγιστο όταν γίνεται τετράγωνο.

Θέμα 16°

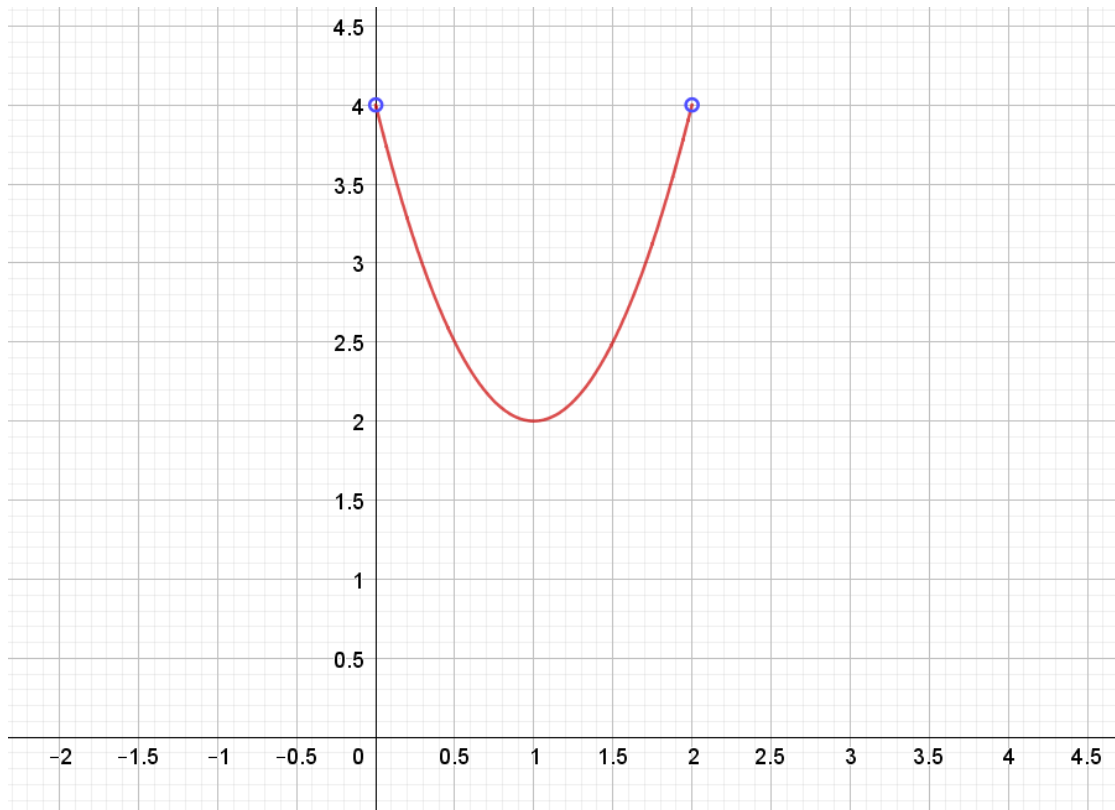
α) Αφού $Z\Gamma = x$ και $B\Gamma = 2$ έχουμε ότι $BZ = 2 - x$. Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο $\triangle EBZ$ έχουμε : $EZ^2 = BZ^2 + EB^2 = (2 - x)^2 + x^2$ οπότε $EZ = \sqrt{(2 - x)^2 + x^2}$. Τέλος αφού το τμήμα $Z\Gamma = x$ είναι μέρος της πλευράς $B\Gamma = 2$, έχουμε ότι $0 < x < 2$.

β) Το εμβαδόν του τετραγώνου $EZH\Theta$ είναι ίσο με EZ^2 . Είναι

$$\begin{aligned}EZ^2 &= (2 - x)^2 + x^2 = \\4 - 4x + x^2 + x^2 &= \\2x^2 - 4x + 4 &= \\2x^2 - 4x + 2 + 2 &= \\2(x^2 - 2x + 1) + 2 &= \\2(x - 1)^2 + 2 &\end{aligned}$$

οπότε η ζητούμενη συνάρτηση είναι $E(x) = 2(x - 1)^2 + 2$ με πεδίο ορισμού το $(0, 2)$ αφού όπως δείξαμε παραπάνω είναι $0 < x < 2$.

γ) Η γραφική παράσταση της $E(x)$ θα προκύψει από τη γραφική παράσταση της $g(x) = 2x^2$, με μια οριζόντια μετατόπιση 1 μονάδα δεξιά και στη συνέχεια με μία κατακόρυφη μετατόπιση 2 μονάδων προς τα πάνω. Η γραφική παράσταση της $E(x)$ στο $(0, 2)$ φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Από τη γραφική παράσταση συμπεραίνουμε ότι το εμβαδόν του τετραγώνου ΕΖΗΘ γίνεται ελάχιστο όταν $x = 1$. Μάλιστα η ελάχιστη τιμή του είναι 2 cm^2 .

δ) Για $x = 1$ έχουμε ότι $EB = Z\Gamma = H\Delta = \Theta A = 1$, δηλαδή το εμβαδόν του τετραγώνου ΕΖΗΘ γίνεται ελάχιστο όταν οι κορυφές του είναι τα μέσα των πλευρών του ΑΒΓΔ.

Θέμα 17°

1. **Σωστό** αν $D_f \cap D_g = \emptyset$ δεν ορίζεται το άθροισμα ή το γινόμενο των f, g
2. **Λάθος** με την έννοια ότι γενικά δεν ισχύει. Μπορεί όμως σε ειδικές περιπτώσεις να ισχύει
3. **Λάθος** αφού μπορεί π.χ $f(x) = \begin{cases} 0, & x \geq 0 \\ 1, & x < 0 \end{cases}$ και $g(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$
4. **Λάθος** $D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \in D_g / g(x) = 0\}$
5. **Λάθος** διότι $R_f \subseteq D_g$ οπότε $f(x) \in D_g$ για κάθε $x \in D_f$ και άρα $D_{g \circ f} = \{x \in D_f / f(x) \in D_g\} = D_f$
6. **Λάθος** αφού μπορεί π.χ $f(x) = \begin{cases} g(x), & x \geq 0 \\ -g(x), & x < 0 \end{cases}$
7. **Σωστό**
8. **Σωστό** αφού $f(1) = g(1)$ και $f(-1) = g(-1)$ και $f(0) = g(0)$

Θέμα 18°

Γενικά ισχύουν $f(-x) = f(x)$, $g(-x) = -g(x)$

$$h(-x) = (g \circ f)(-x) = g(f(-x)) = g(f(x)) = (g \circ f)(x) = h(x)$$

$$\varphi(-x) = (f \circ g)(-x) = f(g(-x)) = f(-g(x)) = f(g(x)) = (f \circ g)(x) = \varphi(x)$$

x	f (x)	g (x)	h (x)	φ (x)
- 3	0	0	0	0
- 2	2	2	-2	2
- 1	2	2	-2	2
0	0	0	0	0
1	2	-2	-2	2
2	2	-2	-2	2
3	0	0	0	0

Θέμα 19°

Α) Η σχέση $f(f(x)) = 2x - 1$ ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ οπότε θα ισχύει και αν βάλουμε όπου x το $f(x)$ και έχουμε :

$$f(f(f(x))) = 2f(x) - 1 \Rightarrow f(2x - 1) = 2f(x) - 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

Β) Η σχέση $f(2x - 1) = 2f(x) - 1$ ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ οπότε θα ισχύει και για $x=1$ έχουμε : $f(2 \cdot 1 - 1) = 2f(1) - 1 \Rightarrow f(1) = 2f(1) - 1 \Rightarrow f(1) = 1$

Θέμα 20°

$$D_f = \mathbb{R}, \quad D_g = (0, +\infty), \quad D_{f \circ g} = \{x \in D_g / g(x) \in D_f\} = \{x > 0 / g(x) \in \mathbb{R}\} = (0, +\infty)$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \begin{cases} g(x) + 2 & , \quad g(x) \leq 2 \\ 1 - g^2(x) & , \quad g(x) > 2 \end{cases} = \begin{cases} 1 + \ln x + 2 & , \quad 1 + \ln x \leq 2 \\ 1 - (1 + \ln x)^2 & , \quad 1 + \ln x > 2 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 3 + \ln x & , \quad \ln x \leq 1 \\ 1 - 1 - 2 \ln x - \ln^2 x & , \quad \ln x > 1 \end{cases} = \begin{cases} 3 + \ln x & , \quad 0 < x \leq e \\ -2 \ln x - \ln^2 x & , \quad x > e \end{cases}$$

Θέμα 21°

1. Σωστό
2. Σωστό αφού για κάθε $x_1, x_2 \in D_f$ με $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow \frac{1}{f(x_1)} > \frac{1}{f(x_2)} \Rightarrow (\frac{1}{f})(x_1) > (\frac{1}{f})(x_2)$ και άρα $\frac{1}{f}$ γνησίως φθίνουσα.
3. Σωστό αφού τότε οι αριθμοί $x_1 - x_2$ και $f(x_1) - f(x_2)$ είναι ομόσημοι για κάθε $x_1, x_2 \in D_f$ με $x_1 \neq x_2$
4. Σωστό αφού για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow -f(x_1) > -f(x_2) \Rightarrow (-f)(x_1) > (-f)(x_2)$ και άρα $-f$ γνησίως φθίνουσα
5. Λάθος είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$ αλλά όχι και στην ένωσή τους αφού π.χ. $-2 < 3$ και $f(-2) < f(3)$
6. Σωστό αφού για κάθε $x \in D_f$ είναι

$$f(x) < f(x_0) \Rightarrow -f(x) > -f(x_0) \xrightarrow{f \text{ περιττή}} f(-x) > f(-x_0)$$
 και επειδή ισχύει για κάθε x θα ισχύει και για $-x$ οπότε τελικά $f(x) > f(-x_0)$ για κάθε $x \in D_f$ δηλαδή παρουσιάζει ελάχιστο στο $-x_0$.
7. Σωστό όπως και πριν
8. Σωστό π.χ. αν f, g είναι γνησίως αύξουσες για κάθε $x_1, x_2 \in D_f$ με $x_1 < x_2$ είναι $f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) < g(f(x_2)) \Rightarrow (g \circ f)(x_1) < (g \circ f)(x_2)$ και άρα $g \circ f$ γνησίως αύξουσα.
 Ενώ αν f είναι γνησίως φθίνουσα και g γνησίως αύξουσα τότε για κάθε $x_1, x_2 \in D_f$ με $x_1 < x_2$ είναι

$$f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) > g(f(x_2)) \Rightarrow (g \circ f)(x_1) > (g \circ f)(x_2)$$
 και άρα $g \circ f$ γνησίως αύξουσα
9. Σωστό αφού για κάθε $x_1, x_2 \in D_f$ με $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \xrightarrow{f \uparrow} f^2(x_1) > f^2(x_2) \Rightarrow (f^2)(x_1) > (f^2)(x_2)$ και άρα f^2 γνησίως φθίνουσα.
10. Σωστό π.χ. αν f είναι γνησίως αύξουσα για κάθε $x_1, x_2 \in D_f$ με $x_1 < x_2$ είναι $f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f(f(x_1)) < f(f(x_2)) \Rightarrow (f \circ f)(x_1) < (f \circ f)(x_2)$ και άρα $f \circ f$ γνησίως αύξουσα.
 Ενώ αν f είναι γνησίως φθίνουσα τότε για κάθε $x_1, x_2 \in D_f$ με $x_1 < x_2$ είναι $f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow f(f(x_1)) < f(f(x_2)) \Rightarrow (f \circ f)(x_1) < (f \circ f)(x_2)$ και άρα $f \circ f$ γνησίως αύξουσα
11. Λάθος αφού $0 < 1 \xrightarrow{f \downarrow} f(0) > f(1) \Rightarrow f(0) > 1$
12. Σωστό αφού δεδομένου ότι είναι γνησίως μονότονη θα είναι ή γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα και αφού $f(1)=2, f(2)=5$ δηλαδή $f(1) < f(2)$ δεν μπορεί να είναι γνησίως φθίνουσα οπότε είναι γνησίως αύξουσα
13. Σωστό αφού $f(-1) = -f(1) = -3$
14. Σωστό αφού $1 \in D_f$ ενώ $-1 \notin D_f$

Θέμα 22°

- A) ι) f γνησίως φθίνουσα στο $[0,5]$ οπότε αφού $2 > 1$ είναι $f(2) < f(1)$
ιι) f γνησίως αύξουσα στο $[-5,0]$ οπότε αφού $-2 < -1$ είναι $f(-2) < f(-1)$
ιιι) f άρτια συνάρτηση στο $[-5,5]$ οπότε $f(-4) = f(4)$
ιiv) f γνησίως αύξουσα στο $[-5,0]$ οπότε αφού $-3 < -2$ είναι $f(-3) < f(-2)$
και επειδή f άρτια οπότε $f(-2) = f(2)$ είναι τελικά και $f(-3) < f(2)$
v) f γνησίως αύξουσα στο $[-5,0]$ οπότε αφού $-3 < -2$ είναι $f(-3) < f(-2)$
και επειδή f άρτια οπότε $f(-3) = f(3)$ είναι τελικά και $f(3) < f(-2)$
vi) f γνησίως φθίνουσα στο $[0,5]$ οπότε για κάθε $\alpha \in [0,5]$ είναι $f(\alpha) \leq f(0)$
 f γνησίως αύξουσα στο $[-5,0]$ οπότε για κάθε $\alpha \in [-5,0]$ είναι $f(\alpha) \leq f(0)$ και
τελικά $f(\alpha) \leq f(0)$ για κάθε $\alpha \in [-5,5]$

Θέμα 23°

A) Η f είναι γνησίως μονότονη οπότε ή γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα
Επειδή $f(1) = 5, f(5) = -2$ δηλαδή $1 < 5$ και $f(1) > f(5)$ αποκλείεται να είναι
γνησίως αύξουσα, οπότε είναι γνησίως φθίνουσα.

B) Η f είναι γνησίως φθίνουσα οπότε για κάθε $x_1, x_2 \in D_f$ με $x_1 < x_2$ είναι
 $f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow f(f(x_1)) < f(f(x_2)) \Rightarrow (f \circ f)(x_1) < (f \circ f)(x_2)$ και άρα $f \circ f$
γνησίως αύξουσα.

$$\Gamma) f(f(\ln x)) < 8 \Leftrightarrow f(f(\ln x)) < f(5) \stackrel{f \downarrow}{\Leftrightarrow} f(\ln x) > 5 \Leftrightarrow f(\ln x) > f(1) \stackrel{f \downarrow}{\Leftrightarrow} \ln x < 1 \stackrel{\ln \uparrow}{\Leftrightarrow} 0 < x < e$$

Θέμα 24°

α) Η f είναι γνησίως μονότονη οπότε ή γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα
Επειδή $f(2) = 0, f(3) = 1$ δηλαδή $2 < 3$ και $f(2) < f(3)$ αποκλείεται να είναι
γνησίως φθίνουσα, οπότε είναι γνησίως αύξουσα.

β) Για κάθε $x < 2 \stackrel{f \uparrow}{\Rightarrow} f(x) < f(2) \Rightarrow f(x) < 0$ ενώ για κάθε $x > 2$ είναι $f(x) > 0$

$$\gamma) f(1 + f(x)) < 0 \Leftrightarrow f(1 + f(x)) < f(2) \stackrel{f \uparrow}{\Leftrightarrow} 1 + f(x) < 2 \Leftrightarrow f(x) < 1 \Leftrightarrow f(x) < f(3) \stackrel{f \uparrow}{\Leftrightarrow} x < 3$$

Θέμα 25°

Έστω ότι η f ήταν γνησίως αύξουσα. Τότε για κάθε $x_1, x_2 \in D_f$ με $x_1 < x_2$ (1)
είναι $f(x_1) < f(x_2)$ (2) και επειδή η συνάρτηση e^x είναι γνησίως αύξουσα θα
είναι και $e^{f(x_1)} < e^{f(x_2)}$ (3). Από (1) + (2) + (3) έχουμε ότι
 $f(x_1) + e^{f(x_1)} + x_1 < f(x_2) + e^{f(x_2)} + x_2 \Rightarrow 1 < 1$ άτοπο, οπότε η f δεν είναι γνησίως
αύξουσα

2ος τρόπος: Θεωρούμε $g(x) = x + e^x$ η οποία είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Είναι
 $g(f(x)) = f(x) + e^{f(x)} = 1 - x$ η οποία είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$. Για κάθε
 $x_1, x_2 \in D_f$ με $x_1 < x_2$ είναι $g(f(x_1)) > g(f(x_2))$ και αφού g γνησίως αύξουσα είναι
 $f(x_1) > f(x_2)$ οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Θέμα 26°

Έστω ότι η f δεν ήταν γνησίως αύξουσα. Τότε θα υπήρχαν $x_1, x_2 \in D_f$ με $x_1 < x_2$ και $f(x_1) \geq f(x_2)$ (1) και επειδή η συνάρτηση e^x είναι γνησίως αύξουσα θα ήταν και $e^{f(x_1)} \geq e^{f(x_2)}$ (2). Από (1) + (2) θα είχαμε ότι $f(x_1) + e^{f(x_1)} \geq f(x_2) + e^{f(x_2)} \Rightarrow x_1^3 \geq x_2^3 \Rightarrow x_1 \geq x_2$ άτοπο αφού $x_1 < x_2$ οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

2ος τρόπος : Θεωρούμε $g(x) = x + e^x$ η οποία είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Είναι $g(f(x)) = f(x) + e^{f(x)} = x^3$ η οποία είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$. Για κάθε $x_1, x_2 \in D_f$ με $x_1 < x_2$ είναι $g(f(x_1)) < g(f(x_2))$ και αφού g γνησίως αύξουσα είναι $f(x_1) < f(x_2)$ οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Θέμα 27°

Η σχέση $f(x-2) + f(6-x) = 0$ ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ άρα και για $x = 4$ οπότε $f(4-2) + f(6-4) = 0 \Rightarrow f(2) + f(2) = 0 \Rightarrow 2f(2) = 0 \Rightarrow f(2) = 0$. Συνεπώς η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ρίζα τη $x = 2$ και λόγω μονοτονίας μοναδική. Συνεπώς η C_f τέμνει το $\chi\chi'$ στο σημείο $(2, 0)$.

Για κάθε $x < 2 \xrightarrow{f\downarrow} f(x) > f(2) \Rightarrow f(x) > 0$ ενώ για κάθε $x > 2$ είναι $f(x) < 0$. Συνεπώς η C_f είναι κάτω από τον $\chi\chi'$ στο $(2, +\infty)$ και πάνω από το $\chi\chi'$ στο $(-\infty, 2)$.

Θέμα 28°

Α) Για κάθε $x_1, x_2 \in D_f = \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ είναι $e^{x_1} < e^{x_2}$, $x_1^3 < x_2^3$, $2x_1 < 2x_2$ και με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε: $e^{x_1} + x_1^3 + 2x_1 < e^{x_2} + x_2^3 + 2x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ οπότε f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Β) Παρατηρούμε ότι $f(0) = 1$ που σημαίνει ότι η εξίσωση $f(x) = 1$ έχει ρίζα τη $x = 0$ και λόγω μονοτονίας μοναδική.

Γ) $g(e^x + x^3) < g(1-2x) \xrightarrow{g\downarrow} e^x + x^3 > 1-2x \Leftrightarrow e^x + x^3 + 2x > 1 \Leftrightarrow f(x) > f(0) \xrightarrow{f\uparrow} x > 0$

Θέμα 29°

$|2f(x) - 7| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq 2f(x) - 7 \leq 1 \Rightarrow 6 \leq 2f(x) \leq 8 \Rightarrow 3 \leq f(x) \leq 4 \Rightarrow f(1) \leq f(x) \leq f(0)$ για κάθε $x \in D_f$ οπότε η f έχει μέγιστο το 4 και ελάχιστο το 3.

Θέμα 30°

- α) Αν η $f(x)=0$ έχει 2 διαφορετικές ρίζες στο Δ έστω τις x_1, x_2 τότε υπάρχουν $x_1, x_2 \in D_f$ με $x_1 < x_2$ ή $x_1 > x_2$ και $f(x_1)=f(x_2)=0$, πράγμα που σημαίνει ότι δεν είναι ούτε γνησίως αύξουσα ούτε γνησίως φθίνουσα.
- β) Παρατηρούμε ότι $f(1)=0$ και $f(2)=0$ οπότε με βάση το α) η f δεν είναι γνησίως μονότονη

Θέμα 31° 1 - Λ , 2 - Λ , 3α - Σ , 3β - Σ , 4 - Σ , 5 - Σ , 6 - Σ**Θέμα 32°**

A) Για κάθε $x_1, x_2 \in D_f = \mathbb{R}$ με $f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow \frac{5e^{x_1}-1}{e^{x_1}+1} = \frac{5e^{x_2}-1}{e^{x_2}+1} \Rightarrow$
 $5e^{x_1}e^{x_2} + 5e^{x_1} - e^{x_2} - 1 = 5e^{x_1}e^{x_2} + 5e^{x_2} - e^{x_1} - 1 \Rightarrow 6e^{x_1} = 6e^{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$ οπότε f 1-1 και άρα αντιστρέφεται. Έστω

$$f(x)=y \Rightarrow \frac{5e^x-1}{e^x+1} = y \Rightarrow 5e^x - 1 = ye^x + y \Rightarrow 5e^x - ye^x = 1+y \Rightarrow e^x(5-y) = 1+y \quad (1)$$

Αν $y=5$ τότε η (1) γίνεται $0=6$ άτοπο, οπότε $y \neq 5$ και η (1) γίνεται

$$e^x = \frac{y+1}{5-y}. \text{ Επειδή } e^x > 0 \Rightarrow \frac{y+1}{5-y} > 0 \Rightarrow y \in (-1, 5) \text{ και έτσι έχουμε}$$

$$x = \ln \frac{y+1}{5-y} \Rightarrow f^{-1}(y) = \ln \frac{y+1}{5-y}, y \in (-1, 5) \text{ ή } f^{-1}(x) = \ln \frac{x+1}{5-x}, x \in (-1, 5)$$

B) Για κάθε $x_1, x_2 \in D_f = (-\infty, 1]$ με

$$f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow -\sqrt{1-x_1} = -\sqrt{1-x_2} \Rightarrow \sqrt{1-x_1} = \sqrt{1-x_2} \Rightarrow 1-x_1 = 1-x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

οπότε f 1-1 και άρα αντιστρέφεται. Έστω

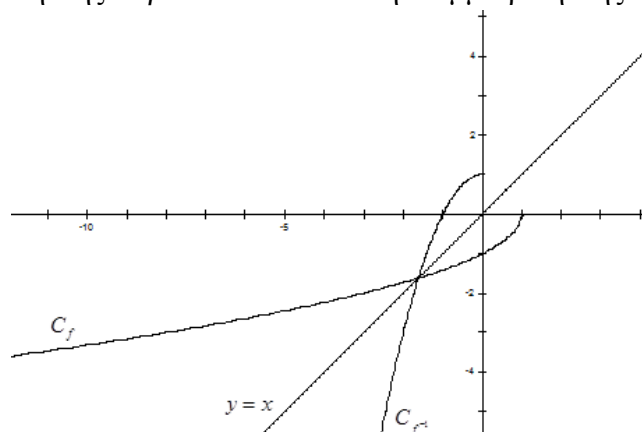
$$f(x)=y \Rightarrow -\sqrt{1-x} = y \Rightarrow \sqrt{1-x} = -y \quad (1)$$

$$\text{Επειδή } \sqrt{1-x} \geq 0 \Rightarrow -y \geq 0 \Rightarrow y \leq 0 \text{ και η (1) γίνεται } 1-x = (-y)^2 \Rightarrow x = 1-y^2 \quad (2)$$

Τέλος πρέπει $x \leq 1 \Rightarrow 1-y^2 \leq 1 \Rightarrow -y^2 \leq 0 \Rightarrow y^2 \geq 0$ που ισχύει. Τελικά

$$f^{-1}(y) = 1-y^2, y \in (-\infty, 0) \text{ ή } f^{-1}(x) = 1-x^2, x \in (-\infty, 0)$$

Για να σχεδιάσουμε τη γραφική παράσταση της f σχεδιάζουμε πρώτα τη γραφική παράσταση της f^{-1} και κατόπιν τη συμμετρική της ως προς τη $\psi = \chi$



Θέμα 33°

α) Για κάθε $x_1, x_2 \in D_f = \mathbb{R}$ με $f(x_1) = f(x_2)$ είναι και $f(f(x_1)) = f(f(x_2))$ οπότε με αφαίρεση κατά μέλη έχουμε $f(f(x_1)) - f(x_1) = f(f(x_2)) - f(x_2)$ και από τη δοσμένη σχέση προκύπτει ότι $2x_1 = 2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$ οπότε η f είναι 1-1

β) Για $x = 0$ στην αρχική σχέση έχουμε

$$(f \circ f)(0) - f(0) = 2 \cdot 0 \Rightarrow (f(f(0))) = f(0) \stackrel{f:1-1}{\Rightarrow} f(0) = 0$$

γ) Αν βάλουμε στη θέση του x το f^{-1} στην αρχική σχέση έχουμε

$$f(f(f^{-1}(x))) - f(f^{-1}(x)) = 2f^{-1}(x) \Rightarrow f(x) - x = 2f^{-1}(x) \Rightarrow f(x) - 2f^{-1}(x) = x$$

για κάθε $x \in D_{f^{-1}} = R_f$

Θέμα 34°

Για κάθε $x_1, x_2 \in D_f = \mathbb{R}$ με $f(x_1) = f(x_2)$ είναι

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \Rightarrow x_1^3 + 1 = x_2^3 + 1 \Rightarrow x_1^3 = x_2^3 \Rightarrow x_1 = x_2 \text{ άρα } f \text{ 1-1}$$

Οπότε

$$f(x^2 + 8x + 7) = f(3x + 1) \stackrel{f:1-1}{\Leftrightarrow} x^2 + 8x + 7 = 3x + 1 \Leftrightarrow x^2 + 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \quad \eta' \quad x = -3$$

Θέμα 35°

Για κάθε $x_1, x_2 \in D_f = \mathbb{R}$ με $f(x_1) = f(x_2)$ είναι και $f^3(x_1) = f^3(x_2)$ οπότε με

πρόσθεση κατά μέλη έχουμε $f^3(x_1) + f(x_1) = f^3(x_2) + f(x_2)$ και από τη

δοσμένη σχέση προκύπτει ότι $x_1 + 1 = x_2 + 1 \Rightarrow x_1 = x_2$ οπότε η f είναι 1-1

και άρα αντιστρέφεται και μάλιστα αφού $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ δηλαδή $\mathbb{R}_f = \mathbb{R} \Rightarrow D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$

Η σχέση $f(f(x)) + f(x) = x$ ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ άρα και αν βάλουμε όπου x το $f^{-1}(x)$. Είναι λοιπόν

$$(f(f^{-1}(x)))^3 + f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(x) + 1 \Rightarrow x^3 + x = f^{-1}(x) + 1 \Rightarrow f^{-1}(x) = x^3 + x - 1, D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$$

Θέμα 36°

Για κάθε $x_1, x_2 \in D_f = \mathbb{R}$ με $f(x_1) = f(x_2)$ είναι

$$-x_1^3 - 2x_1 + 4 = -x_2^3 - 2x_2 + 4 \Rightarrow x_2^3 - x_1^3 + 2x_2 - 2x_1 = 0 \Rightarrow$$

$$(x_2 - x_1)(x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2) + 2(x_2 - x_1) = 0 \Rightarrow (x_2 - x_1)(x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2 + 2) = 0 \Rightarrow x_2 - x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = x_1$$

διότι $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + 2 \neq 0$ για κάθε $x_1, x_2 \in D_f = \mathbb{R}$ αφού θεωρούμενο ως

τριώνυμο ως προς x_1 έχει $\Delta < 0$

Η εξίσωση $f^{-1}(x) = x$ είναι ισοδύναμη με την $f(x) = x$. Είναι

$$f(x) = x \Leftrightarrow -x^3 - 2x + 4 = x \Leftrightarrow x^3 + 3x - 4 = 0 \stackrel{\text{Horner για } x=1}{\Leftrightarrow} (x-1)(x^2 + x + 4) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

αφού η εξίσωση $x^2 + 2x + 7 = 0$ είναι αδύνατη.

Θέμα 37°

α) Η σχέση $f(x) - f(y) = f(x - y)$ ισχύει για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ οπότε και για $x = y = 0$ και έχουμε $f(0) - f(0) = f(0) \Rightarrow 0 = f(0)$. Άρα $f(0) = 0$.

β) Αφού η γραφική παράσταση της f τέμνει το $\chi\chi'$ σε ένα ακριβώς σημείο συμπεραίνουμε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μία λύση και αφού δείξαμε ότι $f(0) = 0$ έχουμε τελικά ότι $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (*).

Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) = f(x_2)$ είναι

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow f(x_1) - f(x_2) = 0 \Rightarrow f(x_1 - x_2) = 0 \stackrel{*}{\Rightarrow} x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$$

Συνεπώς η f είναι 1-1 και άρα αντιστρέφεται

$$\begin{aligned} f(2x-2) + f(x^2+1) &= f(x+1) \Rightarrow f(x^2+1) = f(x+1) - f(2x-2) \Rightarrow f(x^2+1) = f(x+1-2x+2) \Rightarrow \\ f(x^2+1) &= f(3-x) \stackrel{f:1-1}{\Rightarrow} x^2+1 = 3-x \Rightarrow x^2+x-2=0 \Rightarrow x=1 \quad \eta' \quad x=-2 \end{aligned}$$

Θέμα 38°

Α) Η σχέση $f(x) - f(y) = f\left(\frac{x}{y}\right)$ ισχύει για κάθε $x, y > 0$ οπότε και για

$x = y = 1$ και έχουμε $f(1) - f(1) = f\left(\frac{1}{1}\right) \Rightarrow 0 = f(1)$. Άρα $f(1) = 0$.

Β) Δείξαμε ότι $f(1) = 0$ και ξέρουμε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική λύση στο $(0, +\infty)$. Συνεπώς $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ (*).

Για κάθε $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ με $f(x_1) = f(x_2)$ είναι

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow f(x_1) - f(x_2) = 0 \Rightarrow f\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = 0 \stackrel{*}{\Rightarrow} \frac{x_1}{x_2} = 1 \Rightarrow x_1 = x_2$$

Συνεπώς η f είναι 1-1 και άρα αντιστρέφεται

Γ) Κατ' αρχήν αφού $D_f = (0, +\infty)$ πρέπει για να έχει νόημα η εξίσωση

$$\begin{aligned} x-2 > 0 \quad \text{και} \quad 2x > 0 \quad \text{και} \quad x-1 > 0 \\ x > 2 \quad \quad \quad x > 0 \quad \quad \quad x > 1 \end{aligned}$$

Τελικά πρέπει $x > 2$. Η εξίσωση γίνεται :

$$f(x-2) + f(2x) = 2f(x-1) \Rightarrow f(x-2) - f(x-1) = f(x-1) - f(2x) \Rightarrow$$

$$f\left(\frac{x-2}{x-1}\right) = f\left(\frac{x-1}{2x}\right) \stackrel{f:1-1}{\Rightarrow} \frac{x-2}{x-1} = \frac{x-1}{2x} \Rightarrow 2x^2 - 4x = x^2 - 2x + 1 \Rightarrow x^2 - 2x - 1 = 0 \Rightarrow$$

$x = 1 + \sqrt{2}$ δεκτή ή $x = 1 - \sqrt{2}$ απορρίπτεται

Θέμα 39°

A) Η f είναι γνησίως μονότονη οπότε ή γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα. Επειδή $f(1)=5, f(5)=-3$ δηλαδή $1 < 5$ και $f(1) > f(5)$ αποκλείεται να είναι γνησίως αύξουσα, οπότε είναι γνησίως φθίνουσα.

Επίσης αφού f είναι γνησίως μονότονη θα είναι και $1-1$ και άρα αντιστρέφεται και μάλιστα αφού $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$ δηλαδή $\mathbb{R}_f=\mathbb{R} \Rightarrow D_{f^{-1}}=\mathbb{R}$

B) Για κάθε $y_1, y_2 \in D_{f^{-1}}=\mathbb{R}$ με $y_1 < y_2$ είναι

$f(f^{-1}(y_1)) < f(f^{-1}(y_2)) \xRightarrow{f \downarrow} f^{-1}(y_1) > f^{-1}(y_2)$ οπότε f^{-1} γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$

Γ) $f(f(e^x)) < -3 \Rightarrow f(f(e^x)) < f(5) \xRightarrow{f \downarrow} f(e^x) > 5 \Rightarrow f(e^x) > f(1) \xRightarrow{f \downarrow} e^x < 1 \Rightarrow x < 0$

$f^{-1}(f^{-1}(x^2-4)) < 1 \Rightarrow f^{-1}(f^{-1}(x^2-4)) < f^{-1}(5) \xRightarrow{f^{-1} \downarrow} f^{-1}(x^2-4) > 5 \Rightarrow$

$f^{-1}(x^2-4) > f^{-1}(-3) \xRightarrow{f^{-1} \downarrow} x^2-4 < -3 \Rightarrow x^2 < 1 \Rightarrow \sqrt{x^2} < \sqrt{2} \Rightarrow |x| < 1 \Rightarrow -1 < x < 1$

Δ) $f(2x^3-x) = f^{-1}(-3) \Rightarrow f(2x^3-x) = 5 \Rightarrow f(2x^3-x) = f(1) \xRightarrow{f:1-1} 2x^3-x=1 \Rightarrow$

$$2x^3-x-1=0 \xRightarrow{\text{Horner για } x=1} (x-1)(2x^2+2x+1)=0 \Rightarrow x=1$$

αφού $2x^2+2x+1=0$ αδύνατη διότι $\Delta < 0$

Θέμα 40°

A) Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1)=f(x_2)$ είναι

$$f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow f(f(x_1))=f(f(x_2)) \Rightarrow 9x_1+8=9x_2+8 \Rightarrow x_1=x_2$$

Συνεπώς η f είναι $1-1$ και άρα αντιστρέφεται

B) Για το τυχαίο $y_0 \in \mathbb{R}$ αναζητούμε $x_0 \in \mathbb{R}$ με $f(x_0)=y_0$. Είναι

$$f(x_0)=y_0 \Leftrightarrow f(f(x_0))=f(y_0) \Leftrightarrow 9x_0+8=f(y_0) \Leftrightarrow x_0=\frac{f(y_0)-8}{9}. \text{ Συνεπώς το}$$

τυχαίο $x_0 \in \mathbb{R}$ που αναζητούσαμε είναι το $\frac{f(y_0)-8}{9}$. Έτσι το τυχαίο $y_0 \in \mathbb{R}$

ανήκει στο σύνολο τιμών της f οπότε $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$.

Γ) Αν βάλουμε όπου x στην αρχική σχέση το $f^{-1}(x)$ έχουμε

$$f(f(f^{-1}(x)))=9f^{-1}(x)+8 \Rightarrow f(x)=9f^{-1}(x)+8 \Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{1}{9}(f(x)-8). \text{ Η σχέση που}$$

δείξαμε ισχύει για κάθε $x \in D_{f^{-1}}$. Όμως $D_{f^{-1}}=R_f=\mathbb{R}$ οπότε τελικά ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Δ) Αν βάλουμε όπου x στην αρχική σχέση το $f(x)$ έχουμε

$$f(f(f(x)))=9f(x)+8 \Rightarrow f(9x+8)=9f(x)+8 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Ε) Για $x=-1$ στην τελευταία σχέση έχουμε

$$f(-9+8)=9f(-1)+8 \Rightarrow f(-1)=9f(-1)+8 \Rightarrow -8f(-1)=8 \Rightarrow f(-1)=-1 \text{ που σημαίνει}$$

ότι η C_f τέμνει την ευθεία $\psi=x$ σε ένα τουλάχιστον σημείο το $(-1,-1)$

(Παρατήρηση : το -1 βρέθηκε από την απαίτηση να είναι $9x+8=x$)