

Θέμα 1°

1. Λάθος, π.χ. $f(x) = x^2$, $x \in [-1, 2]$ με $f'(0) = 0$ και $f(-1) \neq f(2)$
2. Σωστό, για $x \neq x_0$ ισχύει από Θ.Μ.Τ., ενώ για $x = x_0$ ισχύει για κάθε $\xi \in \mathbb{R}$
3. Λάθος, υπάρχει τουλάχιστον ένα ξ .
4. Σωστό, είναι η γραφική ερμηνεία του Θεωρήματος ROLLE
5. Σωστό, είναι η γραφική ερμηνεία του Θ.Μ.Τ
6. Σωστό, αν ρ_1, ρ_2 δύο ρίζες της f με $\rho_1 < \rho_2$ τότε αφού είναι πολυωνυμική θα είναι παραγωγίσιμη στο $[\rho_1, \rho_2]$ και από Θ.ROLLE υπάρχει $\xi \in (\rho_1, \rho_2)$ με $f'(\xi) = 0$
7. Σωστό, αφού αν υπήρχαν δύο ρίζες της f τότε με βάση το προηγούμενο ερώτημα θα υπήρχε τουλάχιστον και μία ρίζα της f' , πράγμα που θα σήμαινε ότι οι αρχικές ρίζες της f' , δεν θα ήταν διαδοχικές, πράγμα άτοπο.

Σημείωση : Αναλόγα συμπεράσματα με αυτά στα ερωτήματα 6 και 7 ισχύουν και για οποιαδήποτε συνάρτηση παραγωγίσιμη (κοίτα θέμα 5°)

8. Σωστό, είναι η γραφική ερμηνεία του Θ.Μ.Τ
9. Σωστό, αφού ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. : συνεχής στο $[a, b]$ και παραγωγίσιμη στο (a, b) , απλά η παραγωγισιμότητα στα άκρα a και b δεν είναι απαραίτητη, για αυτό και δεν αποτελεί προϋπόθεση.
10. Σωστό, όπως και στο παράδειγμα που δώσαμε στο ερώτημα 1
11. Λάθος, δεν υπάρχει γιατί στο ξ που 'πιθανόν' να υπήρχε η f δεν είναι παραγωγίσιμη και δεν ορίζεται αφαπτομένη. Αυτός είναι και ο λόγος που δεν ισχύει το συμπέρασμα του Θ.Μ.Τ
12. Σωστό, αφενός υπάρχει ρίζα της f' με εφαρμογή του Θ.ROLLE για την f στο $[a, b]$, αφετέρου αν υπήρχε και άλλη τότε από Θ.ROLLE για την f' στο διάστημα των ριζών της θα υπήρχε τουλάχιστον μία ρίζα της f'' πράγμα άτοπο αφού $f''(x) > 0$, για κάθε $x \in [a, b]$.
13. Λάθος, δεν εφαρμόζεται το αντίστοιχο πόρισμα διότι το $\mathbb{R}^* = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ αποτελεί ένωση διαστημάτων.

$$\text{Το σωστό είναι το εξής: } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} + c_1 & , x \in (-\infty, 0) \\ \frac{1}{x} + c_2 & , x \in (0, +\infty) \end{cases}$$

14. Σωστό, διότι αν η f είχε τρεις ρίζες τις ρ_1, ρ_2, ρ_3 με $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$ τότε από Θ.ROLLE σε καθένα από τα $[\rho_1, \rho_2]$, $[\rho_2, \rho_3]$ θα υπήρχαν $\xi_1 \in (\rho_1, \rho_2)$ και $\xi_2 \in (\rho_2, \rho_3)$ με $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = 0$. Τότε όμως από Θ.ROLLE για την f' στο $[\xi_1, \xi_2]$ θα υπήρχε $\xi \in [\xi_1, \xi_2] \subseteq \mathbb{R}$ με $f''(\xi) = 0$, άτοπο αφού $f''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Συνεπώς η εξίσωση $f(x) = 0$ αποκλείεται να έχει 3 ρίζες στο $\mathbb{R}$
15. Σωστό. Θεωρούμε $f(x) = x^3 + 2x^2 + 4x + a$. Αν ρ_1, ρ_2 δύο ρίζες της f με $\rho_1 < \rho_2$ τότε αφού είναι πολυωνυμική θα είναι παραγωγίσιμη στο $[\rho_1, \rho_2]$ και από Θ.ROLLE θα υπήρχε $\xi \in (\rho_1, \rho_2)$ με $f'(\xi) = 0$. Όμως $f'(x) = 3x^2 + 4x + 4 \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ αφού έχει $\Delta < 0$. Συνεπώς η f δεν μπορεί να έχει 2 ρίζες στο $\mathbb{R}$ για καμία τιμή του a .
16. Σωστό. Θεωρούμε $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + \gamma$. Αφού η f έχει τρεις ρίζες τις ρ_1, ρ_2, ρ_3 με $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$ τότε από Θ.ROLLE σε καθένα από τα $[\rho_1, \rho_2]$, $[\rho_2, \rho_3]$

θα υπήρχαν $\xi_1 \in (\rho_1, \rho_2)$ και $\xi_2 \in (\rho_2, \rho_3)$ με $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = 0$. Όμως
 $f'(x) = 3x^2 + 2ax + \beta$ και αφού έχει δύο ρίζες ως πολωνυμική θα πρέπει
 $\Delta > 0 \Rightarrow 4a^2 - 12\beta > 0 \Rightarrow a^2 > 3\beta$

Θέμα 2°

1 – β , 2 – Ε , 3 – Ε , 4 – Β , 5 – Β , 6 – Γ , 7 – Β , 8 – Γ

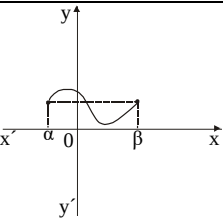
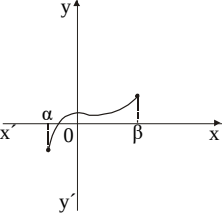
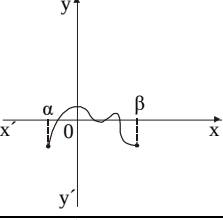
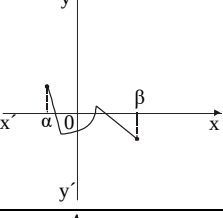
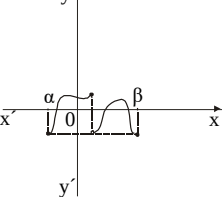
Αιτιολόγηση για το 4 : $f'(x) = 2x - 4$ οπότε

$$f'(\xi) = \frac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)} \Rightarrow 2\xi - 4 = \frac{-4 - 5}{3} \Rightarrow 2\xi - 4 = -3 \Rightarrow \xi = \frac{1}{2}$$

Αιτιολόγηση για το 5 : $f'(x) = \frac{1}{x}$ οπότε

$$f'(\xi) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \Rightarrow \frac{1}{\xi} = \frac{\ln x_1 - \ln x_2}{x_1 - x_2} \Rightarrow \frac{1}{\xi} = \frac{\ln \frac{x_1}{x_2}}{x_1 - x_2} \Rightarrow \frac{1}{\xi}(x_1 - x_2) = \ln \frac{x_1}{x_2}$$

Θέμα 3°

Γραφική παράσταση	Θεώρημα Bolzano	Θεώρημα Rolle	Θεώρημα μέσης τιμής
	οχι	ναι	ναι
	ναι	οχι	ναι
	οχι	ναι	ναι
	ναι	όχι	όχι
	οχι	όχι	όχι

Θέμα 4^ο

1. $1 - \beta$, $2 - \gamma$, δ , $3 - \gamma$, δ , ε .

2. $1 - \varepsilon$, $2 - \delta$, $3 - \gamma$, $4 - \theta$.

Δικαιολόγηση :

1. $f'(\xi) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} \Rightarrow 6\xi - 4 = \frac{0 - 1}{1} \Rightarrow 6\xi - 4 = -1 \Rightarrow \xi = \frac{1}{2}$

2. $f'(\xi) = \frac{f(-1) - f(-2)}{-1 - (-2)} \Rightarrow -\frac{1}{\xi^2} = \frac{-1 + \frac{1}{2}}{-1 + 2} \Rightarrow -\frac{1}{\xi^2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \xi^2 = 2 \stackrel{\xi \in (-2, -1)}{\Rightarrow} \xi = -\sqrt{2}$

3. $f'(\xi) = \frac{f(e) - f(1)}{e - 1} \Rightarrow \frac{1}{\xi} = \frac{1 - 0}{e - 1} \Rightarrow \xi = e - 1$

4. $f'(\xi) = \frac{f(0) - f(-1)}{0 - (-1)} \Rightarrow -\frac{2}{(\xi - 1)^2} = -1 \Rightarrow (\xi - 1)^2 = 2 \stackrel{\xi \in (-1, 0)}{\Rightarrow} \xi - 1 = -\sqrt{2} \Rightarrow \xi = 1 - \sqrt{2}$

Θέμα 5^ο

α) Έστω ρ_1, ρ_2 δύο ρίζες της f με $\rho_1 < \rho_2$ τότε αφού είναι παραγωγίσιμη στο $\mathfrak{R}$ άρα και στο $[\rho_1, \rho_2]$ από Θ.ROLLE υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\rho_1, \rho_2)$ με $f'(\xi) = 0$

β) Αν υπήρχαν δύο ρίζες της f μεταξύ δύο διαδοχικών ριζών της f' , τότε με βάση το προηγούμενο ερώτημα θα υπήρχε μεταξύ των δύο αυτών ριζών της f τουλάχιστον και μία ρίζα της f' , πράγμα που θα σήμαινε ότι οι αρχικές ρίζες της f' , δεν θα ήταν διαδοχικές, πράγμα άτοπο.

γ) Έστω ρ_1, ρ_2, ρ_3 δύο ρίζες της f με $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$ τότε αφού είναι παραγωγίσιμη στο $\mathfrak{R}$ άρα και στο $[\rho_1, \rho_2]$ και στο $[\rho_2, \rho_3]$ από Θ.ROLLE υπάρχουν $\xi_1 \in (\rho_1, \rho_2), \xi_2 \in (\rho_2, \rho_3)$ με $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = 0$ και από Θ.ROLLE υπάρχει $\xi \in (\xi_1, \xi_2)$ με $f''(\xi) = 0$ το οποίο είναι άτοπο αφού $f''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathfrak{R}$. Άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ αποκλείεται να έχει 3 ρίζες στο $\mathfrak{R}$.

Θέμα 6^ο

Θεωρούμε $f(x) = 2x^3 + 2x^2 + 6x + a$. Έστω ρ_1, ρ_2 δύο ρίζες της f με $\rho_1 < \rho_2$ τότε αφού είναι παραγωγίσιμη στο $\mathfrak{R}$ ως πολυωνυμική άρα και στο $[\rho_1, \rho_2]$ από Θ.ROLLE υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\rho_1, \rho_2)$ με $f'(\xi) = 0$. Όμως

$f'(x) = 6x^2 + 4x + 6$ που έχει αρνητική διακρίνουσα και άρα $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathfrak{R}$. Συνεπώς η εξίσωση $2x^3 + 2x^2 + 6x + a = 0$ δεν μπορεί να έχει 2 ρίζες στο $\mathfrak{R}$ για καμία τιμή του a .

Θέμα 7^ο

α) Για κάθε συνάρτηση f με $f(x) = x^3 + \frac{x^2}{2} + x + c$, $c \in \mathbb{R}$ ισχύει $f'(x) = g(x)$

β) Είναι $f(-2) = -2 \Rightarrow -8 + 2 - 2 + c = -2 \Rightarrow c = 6$, οπότε $f(x) = x^3 + \frac{x^2}{2} + x + 6$

γ) Πρέπει $f'(x) = 0 \Rightarrow g(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 + x + 1 = 0$ που είναι αδύνατο, αφού $\Delta < 0$.

Θέμα 8^ο

α) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β) ως πολυωνυμική με $f(\alpha) = f(\beta) = 0$, οπότε από Θ.ROLLE υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ με $f'(\xi) = 0$. Όμως

$$f'(x) = \mu(x-\alpha)^{\mu-1}(x-\beta)^{\nu} + (x-\alpha)^{\mu}\nu(x-\beta)^{\nu-1} = (x-\alpha)^{\mu-1}(x-\beta)^{\nu-1}[\mu(x-\alpha) + \nu(x-\beta)] = (x-\alpha)^{\mu-1}(x-\beta)^{\nu-1}[\mu(x-\alpha) + \nu(x-\beta)] = (x-\alpha)^{\mu-1}(x-\beta)^{\nu-1}[(\mu+\nu)x - (\mu\beta + \nu\alpha)]$$

οπότε

$$f'(\xi) = 0 \Rightarrow (\xi-\alpha)^{\mu-1}(\xi-\beta)^{\nu-1}[(\mu+\nu)\xi - (\mu\beta + \nu\alpha)] = 0 \xRightarrow{\xi \in (\alpha, \beta)} (\mu+\nu)\xi - (\mu\beta + \nu\alpha) = 0 \Rightarrow \xi = \frac{\mu\beta + \nu\alpha}{\mu + \nu}$$

β) Είναι

$$\xi = \frac{\mu\beta + \nu\alpha}{\mu + \nu} \Rightarrow \mu\xi + \nu\xi = \mu\beta + \nu\alpha \Rightarrow \nu\xi - \nu\alpha = \mu\beta - \mu\xi \Rightarrow \nu(\xi - \alpha) = \mu(\beta - \xi) \Rightarrow \frac{\mu}{\nu} = \frac{\xi - \alpha}{\beta - \xi}$$

Θέμα 9^ο

Έστω $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$, $\Gamma(x_3, f(x_3))$ τρία διαφορετικά σημεία της C_f , τα οποία αφού ανήκουν στην ίδια ευθεία θα πρέπει

$$\lambda_{\overline{AB}} = \lambda_{\overline{B\Gamma}} \Rightarrow \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} \quad (1)$$

Όμως η f είναι παραγωγίσιμη οπότε από Θ.Μ.Τ. σε καθένα από τα διαστήματα $[x_1, x_2]$, $[x_2, x_3]$ υπάρχουν $\xi_1 \in (x_1, x_2)$, $\xi_2 \in (x_2, x_3)$ με

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}, \quad f'(\xi_2) = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} \quad \text{οπότε από την (1) έχουμε ότι}$$

$$f'(\xi_1) = f'(\xi_2).$$

Όμως η f' είναι παραγωγίσιμη αφού η f είναι 2 φορές παραγωγίσιμη. Οπότε από οπότε από Θ.ROLLE για την f' στο $[\xi_1, \xi_2]$ υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\xi_1, \xi_2) \subseteq (x_1, x_3)$ με $f''(x_0) = 0$.

Θέμα 10^ο

Η δοσμένη σχέση γράφεται :

$$\ln \frac{f(\beta)}{f(\alpha)} = \alpha^2 - \beta^2 \Rightarrow \frac{f(\beta)}{f(\alpha)} = e^{\alpha^2 - \beta^2} \Rightarrow \frac{f(\beta)}{f(\alpha)} = \frac{e^{\alpha^2}}{e^{\beta^2}} \Rightarrow e^{\alpha^2} \cdot f(\alpha) = e^{\beta^2} \cdot f(\beta)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = e^{x^2} f(x)$ στο $[\alpha, \beta]$. Η h είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ ως πράξεις παραγωγισίμων με $h'(x) = 2xe^{x^2} f(x) + e^{x^2} f'(x)$ και είναι $h(\alpha) = e^{\alpha^2} f(\alpha)$, $h(\beta) = e^{\beta^2} f(\beta)$. Όμως $e^{\alpha^2} f(\alpha) = e^{\beta^2} f(\beta) \Rightarrow h(\alpha) = h(\beta)$. Συνεπώς για τη h πληρούνται οι προϋποθέσεις του θ. Rolle στο $[\alpha, \beta]$ οπότε υπάρχει $\xi_2 \in (\alpha, \beta)$

$$\text{με } h'(\xi_2) = 0 \Rightarrow 2\xi_2 e^{\xi_2^2} f(\xi_2) + e^{\xi_2^2} f'(\xi_2) = 0 \Rightarrow 2\xi_2 f(\xi_2) + f'(\xi_2) = 0$$

Θέμα 11^ο

Αναζητούμε $x_0 \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη στο σημείο $(x_0, f(x_0))$ δηλαδή η ευθεία με εξίσωση $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ να διέρχεται από το $(0, 0)$ δηλαδή να ισχύει: $0 - f(x_0) = f'(x_0)(0 - x_0) \Leftrightarrow x_0 f'(x_0) - f(x_0) = 0$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, $x \in [1, 2]$ η οποία είναι συνεχής και παραγωγίσιμη και $g(2) = \frac{f(2)}{2} = \frac{2f(1)}{2} = f(1) = g(1)$, οπότε από το Θ. Rolle υπάρχει $x_0 \in (1, 2)$ με $g'(x_0) = 0 \Rightarrow \frac{x_0 f'(x_0) - f(x_0)}{x_0^2} = 0 \Rightarrow x_0 f'(x_0) - f(x_0) = 0$.

Αν υπήρχε και άλλο σημείο $(x_1, f(x_1))$ με $x_1 \in (1, 2)$ (και έστω ότι $x_0 < x_1$) στο οποίο η εφαπτομένη να διέρχεται από το $(0, 0)$, τότε η εξίσωση $x f'(x) - f(x) = 0$, θα είχε δύο ρίζες.

Θεωρούμε $h(x) = x f'(x) - f(x)$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $(1, 2)$ άρα και στο $[x_0, x_1] \subseteq (1, 2)$ με $h(x_0) = h(x_1)$, οπότε από το Θ. Rolle θα υπήρχε $\xi \in (x_0, x_1) \subseteq (1, 2)$

με $h'(\xi) = 0 \Rightarrow \xi f''(\xi) + f'(\xi) - f'(\xi) = 0 \Rightarrow \xi f''(\xi) = 0 \Rightarrow f''(\xi) = 0$ άτοπο αφού $f''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (1, 2)$. Συνεπώς υπάρχει ακριβώς μια εφαπτομένη που να διέρχεται από το $(0, 0)$.

Θέμα 12°

Το ότι οι αριθμοί $f(\alpha)$, $f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$, $f(\beta)$ είναι, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί

όροι αριθμητικής προόδου, σημαίνει ότι $f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\alpha) = f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ και

$$\text{επειδή } \frac{\alpha+\beta}{2} - \alpha = \frac{\alpha+\beta-2\alpha}{2} = \frac{\alpha-\beta}{2} \text{ και } \frac{\alpha+\beta}{2} - \beta = \frac{\alpha+\beta-2\beta}{2} = -\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\text{είναι τελικά } \frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\alpha)}{\frac{\alpha+\beta}{2} - \alpha} = \frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\beta)}{\frac{\alpha+\beta}{2} - \beta} \quad (1)$$

Όμως η f είναι παραγωγίσιμη οπότε από Θ.Μ.Τ. σε καθένα από τα διαστήματα $\left[\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right]$, $\left[\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right]$ υπάρχουν $\xi_1 \in \left(\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right)$, $\xi_2 \in \left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right)$ με

$$f'(\xi_1) = \frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\alpha)}{\frac{\alpha+\beta}{2} - \alpha}, \quad f'(\xi_2) = \frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\beta)}{\frac{\alpha+\beta}{2} - \beta} \quad \text{οπότε από την (1)}$$

έχουμε ότι $f'(\xi_1) = f'(\xi_2)$. Όμως η f' είναι παραγωγίσιμη αφού η f είναι 2 φορές παραγωγίσιμη οπότε από Θ.ROLLE για την f' στο $[\xi_1, \xi_2]$ υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\xi_1, \xi_2) \subseteq (\alpha, \beta)$ με $f''(x_0) = 0$.

Θέμα 13°

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική με

$$f'(x) = (x-2)(x-3)(x-4) + x(x-3)(x-4) + x(x-2)(x-4) + x(x-2)(x-3)$$

Παρατηρούμε ότι $f(0) = f(2) = f(3) = f(4) = 0$. Συνεπώς από Θ.ROLLE

σε καθένα από τα $[0,2]$, $[2,3]$, $[3,4]$ υπάρχουν $\xi_1 \in (0,2)$, $\xi_2 \in (2,3)$, $\xi_3 \in (3,4)$

με $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = f'(\xi_3)$. Συνεπώς η f' έχει τουλάχιστον 3 ρίζες και λόγω του ότι η f' είναι πολυωνυμική 3^{ου} αποκλείεται να έχει περισσότερες από τρεις ρίζες, οπότε τελικά έχει ακριβώς τρεις ρίζες.

Θέμα 14°

Θεωρούμε $F(x) = \alpha x^4 + \beta x^3 + \gamma x^2 + \delta x$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική με $F'(x) = 4\alpha x^3 + 3\beta x^2 + 2\gamma x + \delta = f(x)$

Παρατηρούμε ότι $F(0) = 0$ και $F(1) = \alpha + \beta + \gamma + \delta = 0$, δηλαδή $F(0) = F(1)$

Συνεπώς από Θ.ROLLE για την F , υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0,1)$ με

$F'(\xi) = 0 \Rightarrow f(\xi) = 0$, που σημαίνει ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει μια τουλάχιστον φορά τον x στο διάστημα $(0,1)$.

Θέμα 15°Πρόχειρο

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)}{g'(x)} \Rightarrow f(x)g'(x) = f'(x)g(x) \Rightarrow f(x)g'(x) - f'(x)g(x) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{f(x)g'(x) - f'(x)g(x)}{g^2(x)} = 0 \Rightarrow \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = 0$$

Λύση

Θεωρούμε $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, στο $[a, \beta]$ (αφού $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$) η

οποία είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (a, β) ως πηλίκο συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων στα αντίστοιχα διαστήματα με

$$h(a) = \frac{f(a)}{g(a)} = \frac{f(\beta)}{g(\beta)} = h(\beta). \text{ Συνεπώς από Θ.ROLLE για την } h \text{ στο } [a, \beta], \text{ υπάρχει}$$

ένα τουλάχιστον $\xi \in (a, \beta)$ με $h'(\xi) = 0$. Όμως $h'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$,

$$h'(\xi) = 0 \Rightarrow \frac{f'(\xi)g(\xi) - f(\xi)g'(\xi)}{g^2(\xi)} = 0 \Rightarrow f'(\xi)g(\xi) = f(\xi)g'(\xi) \xrightarrow[g'(\xi) \neq 0]{g(\xi) \neq 0} \frac{f(\xi)}{g(\xi)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Θέμα 16°

Για την f πληρούνται οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο $[1, 3]$ οπότε υπάρχει

$$\xi \in (1, 3) \text{ με } f'(\xi) = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{6}{2} = 3$$

Θέμα 17°

A) Θεωρούμε ότι ισχύει η ζητούμενη σχέση και θα καταλήξουμε με ισοδυναμίες σε κάτι που αληθεύει. Είναι

$$\eta\mu(\alpha + h) < \eta\mu\alpha + h\sigma\nu\alpha \Leftrightarrow \eta\mu(\alpha + h) - \eta\mu\alpha < h\sigma\nu\alpha \Leftrightarrow \frac{\eta\mu(\alpha + h) - \eta\mu\alpha}{h} < \sigma\nu\alpha$$

Συνεπώς αρκεί να δείξουμε ότι : $\frac{\eta\mu(\alpha + h) - \eta\mu\alpha}{h} < \sigma\nu\alpha$

Θεωρούμε $f(x) = \eta\mu x$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $[a, a + h]$ με

$f'(x) = \sigma\nu x$, οπότε από Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi \in (a, a + h)$ με

$$f'(\xi) = \frac{f(a + h) - f(a)}{a + h - a} \Rightarrow \sigma\nu\xi = \frac{\eta\mu(\alpha + h) - \eta\mu\alpha}{h}.$$

Όμως $\xi \in (a, a + h) \Rightarrow a < \xi < a + h < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sigma\nu\xi < \sigma\nu\alpha \Rightarrow \frac{\eta\mu(\alpha + h) - \eta\mu\alpha}{h} < \sigma\nu\alpha$.

$$B) \frac{\beta - \alpha}{\sigma\nu^2\alpha} < \varepsilon\phi\beta - \varepsilon\phi\alpha < \frac{\beta - \alpha}{\sigma\nu^2\beta} \Leftrightarrow \frac{1}{\sigma\nu^2\alpha} < \frac{\varepsilon\phi\beta - \varepsilon\phi\alpha}{\beta - \alpha} < \frac{1}{\sigma\nu^2\beta}$$

Θεωρούμε $f(x) = \varepsilon\phi x$ στο $[a, \beta] \subseteq [0, \frac{\pi}{2})$ η οποία είναι συνεχής και

παραγωγίσιμη σε αυτό οπότε υπάρχει $\xi \in (a, \beta)$ με

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = \frac{\varepsilon\phi\beta - \varepsilon\phi\alpha}{\beta - \alpha} . \text{ Όμως } f'(x) = \frac{1}{\sin^2 x} \text{ οπότε έχουμε ότι}$$

$$\frac{1}{\sin^2 \xi} = \frac{\varepsilon\phi\beta - \varepsilon\phi\alpha}{\beta - \alpha} . \text{ Είναι } \xi \in (\alpha, \beta) \text{ οπότε } \alpha < \xi < \beta \text{ κι επειδή η συνάρτηση}$$

$\sin x$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, \frac{\pi}{2})$ είναι $\sin \alpha > \sin \xi > \sin \beta$ και

επειδή $\sin x > 0$ για κάθε $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ είναι $\sin^2 \alpha > \sin^2 \xi > \sin^2 \beta$ και

$$\text{τελικά } \frac{1}{\sin^2 \alpha} < \frac{1}{\sin^2 \xi} < \frac{1}{\sin^2 \beta} \Leftrightarrow \frac{1}{\sin^2 \alpha} < \frac{\varepsilon\phi\beta - \varepsilon\phi\alpha}{\beta - \alpha} < \frac{1}{\sin^2 \beta} .$$

Θέμα 18°

Πρόχειρο $xf'(x) + f(x) = (xf(x))'$

Λύση Θεωρούμε $h(x) = xf(x)$, στο $[a, b]$ η οποία είναι συνεχής στο $[a, b]$ και παραγωγίσιμη στο (a, b) ως γινόμενο συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων στα αντίστοιχα διαστήματα με $h'(x) = xf'(x) + f(x)$.

Για την h πληρούνται οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο $[a, b]$ οπότε υπάρχει

$$\xi \in (a, b) \text{ με } h'(\xi) = \frac{h(b) - h(a)}{b - a} \Rightarrow \xi f'(\xi) + f(\xi) = \frac{bf(b) - af(a)}{b - a}$$

Θέμα 19°

$$f'(x) = 2f(x) \Leftrightarrow f'(x) - 2f(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-2x} f'(x) - 2e^{-2x} f(x) = 0 \Leftrightarrow (e^{-2x} f(x))' = 0 \Leftrightarrow e^{-2x} f(x) = c$$

$$\text{Για } x = 1 \text{ έχουμε } e^{-2} f(1) = c \Rightarrow \frac{2}{e^2} = c .$$

$$\text{Τελικά } e^{-2x} f(x) = \frac{2}{e^2} \Rightarrow f(x) = \frac{2e^{2x}}{e^2} \Rightarrow f(x) = 2e^{2x-2}, x \in \mathbb{R}$$

Θέμα 20°

α) Θεωρούμε $h(x) = f(x) - \kappa x$, στο $[1, 2]$ η οποία είναι συνεχής στο $[1, 2]$ ως διαφορά συνεχών με $h(1) = f(1) - \kappa = 2\kappa - \kappa = \kappa > 0$ και

$$h(2) = f(2) - 2\kappa = \kappa - 2\kappa = -\kappa < 0 \text{ οπότε } h(1) \cdot h(2) < 0 \text{ και άρα από}$$

Θ. Bolzano $x_0 \in (1, 2)$ με $f(x_0) = \kappa x_0$

β) Για την f πληρούνται οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. σε καθένα από τα

διαστήματα $[1, x_0]$, $[x_0, 2]$ οπότε υπάρχουν $\xi_1 \in (1, x_0)$, $\xi_2 \in (x_0, 2)$ με

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x_0) - f(1)}{x_0 - 1} = \frac{\kappa x_0 - 2\kappa}{x_0 - 1} = \frac{\kappa(x_0 - 2)}{x_0 - 1} \text{ και}$$

$$f'(\xi_2) = \frac{f(x_0) - f(2)}{x_0 - 2} = \frac{\kappa x_0 - \kappa}{x_0 - 2} = \frac{\kappa(x_0 - 1)}{x_0 - 2} \text{ οπότε}$$

$$f'(\xi_1) \cdot f'(\xi_2) = \frac{\kappa(x_0 - 2)}{x_0 - 1} \cdot \frac{\kappa(x_0 - 1)}{x_0 - 2} = \kappa^2$$

Θέμα 21°

Η συνάρτηση h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις παραγωγισίμων με $h'(x) = 3f^2(x)f'(x) + 3g^2(x)g'(x) = 3g'(x)f'(x) - 3g'(x)f'(x) = 0$ που σημαίνει ότι η συνάρτηση $h(x) = f^3(x) + g^3(x)$ είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.

Θέμα 22°

α) $f'(x) = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ οπότε $f(x) = c$ και αφού $f(5) = 7$, είναι τελικά $f(x) = 7$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

$$\beta) f'(x) = \frac{3}{2}x^2 \Rightarrow f'(x) = \left(\frac{1}{2}x^3\right)' \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}x^3 + c$$

$$\text{Για } x = 1 \text{ είναι } f(1) = \frac{1}{2} \cdot 1^3 + c \Rightarrow -\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + c \Rightarrow c = -1. \text{ Τελικά } f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 1$$

$$\gamma) f''(x) = e^x + \sin x \Rightarrow (f'(x))' = (e^x + \eta\mu x)' \Rightarrow f'(x) = e^x + \eta\mu x + c$$

$$\text{Για } x = 0 \text{ είναι } f'(0) = e^0 + \eta\mu 0 + c \Rightarrow 2 = 1 + c \Rightarrow c = 1, \text{ οπότε}$$

$$f'(x) = e^x + \eta\mu x + 1 \Rightarrow f'(x) = (e^x - \sin x + x)' \Rightarrow f(x) = e^x - \sin x + x + c_1$$

$$\text{Για } x = 0 \text{ είναι } f(0) = e^0 - \sin 0 + 0 + c_1 \Rightarrow 0 = 1 - 1 + c_1 \Rightarrow c_1 = 0, \text{ οπότε}$$

$$f(x) = e^x - \sin x + x.$$

$$\delta) \text{ Η δοσμένη σχέση γίνεται } f'(x) = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow f'(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' \text{ για κάθε}$$

$$x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \text{ οπότε } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} + c_1, & x < 0 \\ \frac{1}{x} + c_2, & x > 0 \end{cases}$$

$$\text{Για } x = 1 \text{ έχουμε : } f(1) = 1 + c_2 \Rightarrow 2 = 1 + c_2 \Rightarrow c_2 = 1$$

$$\text{Για } x = -1 \text{ έχουμε : } f(-1) = -1 + c_2 \Rightarrow 2 = -1 + c_2 \Rightarrow c_2 = 3$$

$$\text{Τελικά } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} + 3, & x < 0 \\ \frac{1}{x} + 1, & x > 0 \end{cases}.$$

Θέμα 23°

$$\alpha) f'(x) \cdot e^{f(x)} = \sigma\upsilon\nu x \Rightarrow (e^{f(x)})' = (\eta\mu x)' \Rightarrow e^{f(x)} = \eta\mu x + c$$

$$\text{Για } \chi = \frac{\pi}{2} \text{ είναι } e^{f(\frac{\pi}{2})} = \eta\mu \frac{\pi}{2} + c \Rightarrow e^0 = 0 + c \Rightarrow c = 1, \text{ οπότε}$$

$$e^{f(x)} = \eta\mu x + 1 \Rightarrow f(x) = \ln(\eta\mu x + 1), \text{ αφού } \eta\mu x + 1 > 0 \text{ για κάθε } x \in (0, \pi)$$

$$\beta) x f'(x) + f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow (x f(x))' = (\ln x)' \Rightarrow x f(x) = \ln x + c \text{ για κάθε } \chi > 0$$

$$\text{Για } \chi = 1 \text{ είναι } 1 f(1) = \ln 1 + c \Rightarrow c = 5. \text{ Τελικά } x f(x) = \ln x + 5 \Rightarrow f(x) = \frac{\ln x + x}{5}$$

γ) Για κάθε $x \in (0, \pi)$ είναι $\eta\mu x \neq 0$ οπότε έχουμε

$$f'(x) \cdot \eta\mu x - f(x) \cdot \sigma\upsilon\nu x = \eta\mu^2 x \Rightarrow \frac{f'(x) \cdot \eta\mu x - f(x) \cdot \sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x} = 1 \Rightarrow \left(\frac{f(x)}{\eta\mu x}\right)' = (x)' \Rightarrow \frac{f(x)}{\eta\mu x} = x + c$$

$$\text{Για } \chi = \frac{\pi}{2} \text{ είναι } \frac{f(\frac{\pi}{2})}{\eta\mu \frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} + c \Rightarrow \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + c \Rightarrow c = 0.$$

$$\text{Τελικά } \frac{f(x)}{\eta\mu x} = x \Rightarrow f(x) = x \cdot \eta\mu x, \quad x \in (0, \pi)$$

Θέμα 24°

α) Για κάθε $x \in \Re$ έχουμε

$$f'(x) + 5f(x) = 1 \Leftrightarrow e^{5x} f'(x) + e^{5x} f(x) = e^{5x} \Leftrightarrow (e^{5x} f(x))' = (e^{5x})' \Leftrightarrow e^{5x} f(x) = e^{5x} + c$$

$$\text{Για } \chi = 0 \text{ είναι } e^0 f(0) = e^0 + c \Rightarrow c + 1 = \frac{6}{5} \Rightarrow c = \frac{1}{5} \text{ οπότε}$$

$$e^{5x} f(x) = e^{5x} + \frac{1}{5} \Rightarrow f(x) = 1 + \frac{e^{-5x}}{5}, \quad x \in \Re$$

β) Για κάθε $x \in \Re$ έχουμε

$$f'(x) = 2f(x) \Leftrightarrow f'(x) - 2f(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-2x} f'(x) - 2e^{-2x} f(x) = 0 \Leftrightarrow (e^{-2x} f(x))' = 0 \Leftrightarrow e^{-2x} f(x) = c$$

$$\text{Για } \chi = 0 \text{ έχουμε } e^0 f(0) = c \Rightarrow 3 = c.$$

$$\text{Τελικά } e^{-2x} f(x) = 3 \Rightarrow f(x) = 3e^{2x}, \quad x \in \Re$$

γ) Για κάθε $x \in \Re$ έχουμε

$$f'(x) + f(x) \cdot \sigma\upsilon\nu x = -\sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow e^{\eta\mu x} f'(x) + e^{\eta\mu x} \cdot \sigma\upsilon\nu x \cdot f(x) = -\sigma\upsilon\nu x \cdot e^{\eta\mu x} \Leftrightarrow$$

$$(e^{\eta\mu x} f(x))' = (-e^{\eta\mu x})' \Leftrightarrow e^{\eta\mu x} f(x) = -e^{\eta\mu x} + c$$

$$\text{Για } \chi = 0 \text{ έχουμε } e^{\eta\mu 0} f(0) = -e^{\eta\mu 0} + c \Rightarrow 1 = -1 + c \Rightarrow c = 2.$$

$$\text{Τελικά } e^{\eta\mu x} f(x) = -e^{\eta\mu x} + 2 \Rightarrow f(x) = -1 + 2e^{-\eta\mu x}, \quad x \in \Re$$

δ) Η δοσμένη σχέση γίνεται

$$(1+x^2)f'(x) + 2xf^3(x) = 0 \Rightarrow (1+x^2)f'(x) = -2xf^3(x) \Rightarrow \frac{f'(x)}{f^3(x)} = \frac{-2x}{1+x^2} \Rightarrow$$

$$-\frac{2f(x)f'(x)}{f^4(x)} = \frac{4x}{1+x^2} \Rightarrow \left(\frac{1}{f^2(x)}\right)' = (2\ln(1+x^2))' \Rightarrow \frac{1}{f^2(x)} = 2\ln(1+x^2) + c$$

Για $x=0$ έχουμε $\frac{1}{f^2(0)} = 2\ln 1 + c \Rightarrow c=1$ οπότε

$$\frac{1}{f^2(x)} = 2\ln(1+x^2) + 1 \Rightarrow f^2(x) = \frac{1}{2\ln(1+x^2) + 1}$$

Όμως $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και αφού είναι συνεχής, η f διατηρεί πρόσημο και αφού $f(0)=1$ είναι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε είναι

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\ln(1+x^2) + 1}}.$$

Θέμα 25^ο

α) Από τη δοσμένη σχέση έχουμε :

$$f''(x) + f(x) = 0 \Leftrightarrow 2f'(x)f''(x) + 2f(x)f'(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$((f'(x))^2 + f^2(x))' = 0 \Leftrightarrow (f'(x))^2 + f^2(x) = c$$

β) Θεωρούμε $g(x) = f(x) - \eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x$ παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$g'(x) = f'(x) - \sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x \quad \text{και}$$

$$g''(x) = f''(x) + \eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x \Rightarrow g''(x) = -f(x) + \eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x \Rightarrow$$

$$g''(x) = -g(x) \Rightarrow g''(x) + g(x) = 0 \stackrel{a)}{\Rightarrow} (g'(x))^2 + g^2(x) = c$$

Για $x=0$ έχουμε $(g'(0))^2 + g^2(0) = c \Rightarrow 0 + 0 = c \Rightarrow c=0$ αφού

$$g(0) = f(0) - \eta\mu 0 - \sigma\upsilon\nu 0 = 1 - 0 - 1 = 0 \quad \text{και}$$

$$g'(0) = f'(0) - \sigma\upsilon\nu 0 + \eta\mu 0 = 1 - 1 = 0$$

Τελικά $(g'(x))^2 + g^2(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ οπότε

$$g(x) = 0 \Rightarrow f(x) - \eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x = 0 \quad \text{και άρα}$$

$$f(x) = \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Θέμα 26°

α) Αφού $f(\alpha) \neq f(\beta)$, χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε ότι $f(\alpha) < f(\beta)$ (Αντίστοιχα λύνεται αν θεωρήσουμε $f(\alpha) > f(\beta)$)

Είναι $f(\alpha) < f(\beta) \Rightarrow f(\alpha) + 3f(\beta) < 4f(\beta) \Rightarrow \frac{f(\alpha) + 3f(\beta)}{4} < f(\beta)$ Επίσης

$$f(\alpha) < f(\beta) \Rightarrow 3f(\alpha) < 3f(\beta) \Rightarrow 4f(\alpha) < f(\alpha) + 3f(\beta) \Rightarrow f(\alpha) < \frac{f(\alpha) + 3f(\beta)}{4}$$

Τελικά $f(\alpha) < \frac{f(\alpha) + 3f(\beta)}{4} < f(\beta)$ και επειδή f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ από

Θ. ενδιάμεσων τιμών, έχουμε ότι υπάρχει $\chi_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε

$$f(\chi_0) = \frac{f(\alpha) + 3f(\beta)}{4}$$

β) Για την f πληρούνται οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. σε καθένα από τα διαστήματα $[\alpha, \chi_0]$, $[\chi_0, \beta]$, $[\alpha, \beta]$ οπότε υπάρχουν $\xi_1 \in (\alpha, \chi_0)$, $\xi_2 \in (\chi_0, \beta)$, $\xi \in (\alpha, \beta)$

$$\text{με } f'(\xi_1) = \frac{f(\chi_0) - f(\alpha)}{\chi_0 - \alpha} = \frac{\frac{f(\alpha) + 3f(\beta)}{4} - f(\alpha)}{\chi_0 - \alpha} = \frac{3(f(\beta) - f(\alpha))}{4(\chi_0 - \alpha)} \quad \text{οπότε}$$

$$\frac{3}{f'(\xi_1)} = \frac{4(\chi_0 - \alpha)}{f(\beta) - f(\alpha)} \quad (1) \quad \text{και}$$

$$f'(\xi_2) = \frac{f(\chi_0) - f(\beta)}{\chi_0 - \beta} = \frac{\frac{f(\alpha) + 3f(\beta)}{4} - f(\beta)}{\chi_0 - \beta} = \frac{(f(\beta) - f(\alpha))}{4(\beta - \chi_0)} \quad \text{οπότε}$$

$$\frac{1}{f'(\xi_2)} = \frac{4(\beta - \chi_0)}{f(\beta) - f(\alpha)} \quad (2) \quad \text{και}$$

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \quad \text{οπότε} \quad \frac{1}{f'(\xi)} = \frac{\beta - \alpha}{f(\beta) - f(\alpha)} \quad (3)$$

$$(1) + (2) \Rightarrow \frac{3}{f'(\xi_1)} + \frac{1}{f'(\xi_2)} = \frac{4(\chi_0 - \alpha)}{f(\beta) - f(\alpha)} + \frac{4(\beta - \chi_0)}{f(\beta) - f(\alpha)} = \frac{4(\beta - \alpha)}{f(\beta) - f(\alpha)} \stackrel{(3)}{=} \frac{4}{f'(\xi)}$$

Θέμα 27°

α) Αφού τα σημεία $A(\alpha, f(\alpha))$, $B(\beta, f(\beta))$, $\Gamma(\gamma, f(\gamma))$ με $\alpha < \beta < \gamma$ είναι

συνευθειακά, έχουμε ότι $\lambda_{AB} = \lambda_{BF} \Rightarrow \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = \frac{f(\gamma) - f(\beta)}{\gamma - \beta} \quad (1).$

Για την f πληρούνται οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. σε καθένα από τα διαστήματα $[\alpha, \beta]$, $[\beta, \gamma]$, οπότε υπάρχουν $\xi_1 \in (\alpha, \beta)$, $\xi_2 \in (\beta, \gamma)$, με

$$f'(\xi_1) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}, \quad f'(\xi_2) = \frac{f(\gamma) - f(\beta)}{\gamma - \beta}. \text{ Συνεπώς βάση της (1) έχουμε}$$

ότι $f'(\xi_1) = f'(\xi_2)$. Για την f' πληρούνται οι προϋποθέσεις του Θ.ROLLE στο $[\xi_1, \xi_2]$ οπότε υπάρχει $\xi \in (\xi_1, \xi_2) \subseteq (\alpha, \gamma)$ με $f''(\xi) = 0$

β) Πρόχειρο

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \Rightarrow (x - \alpha)f'(x) = f(x) - f(\alpha) \Rightarrow (x - \alpha)f'(x) - (f(x) - f(\alpha)) = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{(x - \alpha)f'(x) - (f(x) - f(\alpha))}{(x - \alpha)^2} = 0 \Rightarrow \left(\frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \right)' = 0 \end{aligned}$$

Λύση

Θεωρούμε $g(x) = \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}$, στο $[\beta, \gamma]$ παραγωγίσιμη σε αυτό ως πηλίκο

παραγωγισίμων με $g(\beta) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$, $g(\gamma) = \frac{f(\gamma) - f(\alpha)}{\gamma - \alpha}$.

Αφού τα σημεία $A(\alpha, f(\alpha))$, $B(\beta, f(\beta))$, $\Gamma(\gamma, f(\gamma))$ με $\alpha < \beta < \gamma$ είναι

συνευθειακά, έχουμε ότι $\lambda_{\overline{AB}} = \lambda_{\overline{A\Gamma}} \Rightarrow \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = \frac{f(\gamma) - f(\alpha)}{\gamma - \alpha} \Rightarrow g(\beta) = g(\gamma)$

Συνεπώς για τη g πληρούνται οι προϋποθέσεις του Θ.ROLLE στο $[\beta, \gamma]$ οπότε υπάρχει $\chi_0 \in (\beta, \gamma) \subseteq (\alpha, \gamma)$ με

$$g'(x_0) = 0 \Rightarrow \frac{(x_0 - \alpha)f'(x_0) - (f(x_0) - f(\alpha))}{(x_0 - \alpha)^2} = 0 \Rightarrow (x_0 - \alpha)f'(x_0) - (f(x_0) - f(\alpha)) \Rightarrow$$

$$(x_0 - \alpha)f'(x_0) = f(x_0) - f(\alpha) \Rightarrow f'(x_0) = \frac{f(x_0) - f(\alpha)}{x_0 - \alpha}$$

Θέμα 28^ο

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$, οπότε από Θ.Μ.Τ. υπάρχει με $\chi_0 \in (\alpha, \beta)$ με

$$f'(x_0) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = \frac{-f(\alpha)}{\beta - \alpha} > 0 \text{ αφού } f(\alpha) < 0 \text{ και } \beta > \alpha$$

Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ άρα και στο $[\chi_0, \beta]$, οπότε από Θ.Μ.Τ.

υπάρχει με $\xi \in (\chi_0, \beta) \subseteq (\alpha, \beta)$ με

$$f''(\xi) = \frac{f'(\beta) - f'(x_0)}{\beta - x_0} = \frac{-f'(x_0)}{\beta - x_0} < 0 \text{ αφού } f'(x_0) > 0 \text{ και } \beta > \chi_0.$$

Θέμα 29°

Αναζητούμε $\xi \in (1,2)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $M(\xi, f(\xi))$, δηλαδή η ευθεία με εξίσωση $y - f(\xi) = f'(\xi)(x - \xi)$, να διέρχεται από το $A(0, \xi^2)$ δηλαδή να ισχύει ότι

$$\xi^2 - f(\xi) = f'(\xi)(0 - \xi) \Leftrightarrow \xi^2 - f(\xi) = -\xi f'(\xi) \Leftrightarrow \xi^2 + \xi f'(\xi) - f(\xi) = 0 \Leftrightarrow 1 + \frac{\xi f'(\xi) - f(\xi)}{\xi^2} = 0$$

Θεωρούμε $g(x) = \frac{f(x)}{x} + x$, στο $[1,2]$, η οποία είναι συνεχής στο $[1,2]$,

παραγωγίσιμη στο $(1,2)$ με

$$g(2) = \frac{f(2)}{2} + 2 = \frac{2f(1) - 2}{2} + 2 = \frac{2(f(1) - 1)}{2} + 2 = f(1) + 1 = g(1)$$

οπότε για την g πληρούνται οι προϋποθέσεις του Θ.ROLLE στο $[1,2]$ και

$$\text{άρα υπάρχει } \xi \in (1,2) \text{ με } g'(\xi) = 0 \Rightarrow 1 + \frac{\xi f'(\xi) - f(\xi)}{\xi^2} = 0$$

Θέμα 30°

Για το τυχαίο $x \in (0,1)$ έχουμε ότι η f συνεχής σε καθένα από τα διαστήματα $[0, x]$ και $[x, 1]$, παραγωγίσιμη σε καθένα από τα $(0, x)$ και $(x, 1)$ οπότε από Θ.Μ.Τ σε καθένα από τα διαστήματα αυτά υπάρχουν $\xi_1 \in (0, x)$, $\xi_2 \in (x, 1)$ με

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x}, \quad f'(\xi_2) = \frac{f(1) - f(x)}{1 - x} = \frac{1 - f(x)}{1 - x}.$$

Όμως $0 < \xi_1 < \xi_2 < 1$ και f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,1)$ οπότε είναι

$$f'(\xi_1) < f'(\xi_2) \Rightarrow \frac{f(x)}{x} < \frac{1 - f(x)}{1 - x} \stackrel{0 < x < 1}{\Rightarrow} (1 - x)f(x) < x(1 - f(x)) \Rightarrow$$

$$f(x) - xf(x) < x - xf(x) \Rightarrow f(x) < x, \quad \forall x \in (0,1)$$