

Εκφωνήσεις και απαντήσεις εργασίας :
Μονοτονία – Ακρότατα - Κοίλα – Σημεία Καμπής – Ασύμπτωτες - Χάραξη

Θέμα 1^ο Ερωτήσεις τύπου Σ – Λ

1. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και είναι γνησίως αύξουσα σε αυτό τότε $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \Delta$
2. Αν για μια συνάρτηση f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$, τότε f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}^*$
3. Αν μια συνάρτηση αλλάζει κοίλα εκατέρωθεν του x_0 , τότε σίγουρα η συνάρτηση παρουσιάζει καμπή στο x_0
4. Αν για μια συνάρτηση f ισχύει $f''(x_0) = 0$ τότε σίγουρα η συνάρτηση παρουσιάζει καμπή στο x_0
5. Αν μία συνάρτηση f είναι κοίλη στο Δ τότε $f''(x) < 0$ για κάθε $x \in \Delta$
6. Αν μια συνάρτηση f παρουσιάζει ακρότατο στο x_0 , τότε ισχύει $f'(x_0) = 0$.
7. Αν στο εσωτερικό σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της f ισχύει ότι $f'(x_0) = 0$, τότε το x_0 είναι τοπικό ακρότατο της f .
8. Αν για μια παραγωγίσιμη συνάρτηση f ισχύει ότι $f'(x_0) = 0$ τότε παρουσιάζει στο x_0 ακρότατο

Λύση

1. **Λάθος**, π.χ. $f(x) = x^3$ η οποία είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, όμως $f'(0) = 0$.
2. **Λάθος**, διότι $\mathbb{R}^* = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ και τη μονοτονία την εξετάζουμε σε διάστημα. Ισχύει ότι f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0)$ και f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$, αλλά όχι ότι f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}^*$
3. **Λάθος**, πρέπει να δέχεται και εφαπτομένη στο x_0
4. **Λάθος**, π.χ. $f(x) = x^4$ η οποία είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ και δεν έχει σημεία καμπής, όμως $f''(0) = 0$.
5. **Λάθος**, π.χ. $f(x) = -x^4$ η οποία είναι κοίλη στο $\mathbb{R}$ και δεν έχει σημεία καμπής, όμως $f''(0) = 0$.
6. **Λάθος**, πρέπει να είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και το x_0 να είναι εσωτερικό σημείο διαστήματος
7. **Λάθος**, π.χ. $f(x) = x^3$ η οποία είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και δεν έχει ακρότατα, όμως $f'(0) = 0$.
8. **Λάθος**, π.χ. $f(x) = x^3$ η οποία είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και δεν έχει ακρότατα, όμως $f'(0) = 0$.

Θέμα 2^ο

Α) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 2$.

α) Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Να βρεθεί το σύνολο τιμών της

γ) Να βρεθεί το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x)=0$

Λύση

α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ $f'(x)=4x^3-12x^2+8x=4x(x^2-3x+2)$

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$		
$4x$	-	○	+	+	+		
x^2-3x+2	+	+	○	-	○	+	
f'	-	○	+	○	-	○	+
f							

Συνεπώς η f είναι γνησίως αύξουσα στα $[0,1],[2,+\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στα $(-\infty,0],[1,2]$. Παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το $f(0)=-2$ και το $f(2)=-2$ και τοπικό μέγιστο το $f(1)=-1$

β) Αν $\Delta_1=(-\infty,0]$, $\Delta_2=[0,1]$, $\Delta_3=[1,2]$, $\Delta_4=[2,+\infty)$ τότε
 $f(\Delta_1)=[f(0), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x))=[-2,+\infty)$, $f(\Delta_2)=[f(0), f(1)]=[-2,-1]$,
 $f(\Delta_3)=[f(2), f(1)]=[-2,-1]$, $f(\Delta_4)=[f(2), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x))=[-2,+\infty)$

και το σύνολο τιμών της είναι το $f(\mathbb{R})=f(\Delta_1) \cup f(\Delta_2) \cup f(\Delta_3) \cup f(\Delta_4)=[-2,+\infty)$

γ) $0 \in f(\Delta_1)$ οπότε υπάρχει $x_1 \in \Delta_1$ με $f(x_1)=0$ και λόγω μονοτονίας εκεί μοναδικό

$0 \in f(\Delta_4)$ οπότε υπάρχει $x_2 \in \Delta_4$ με $f(x_2)=0$ και λόγω μονοτονίας εκεί μοναδικό

$0 \notin f(\Delta_2)$ και $0 \notin f(\Delta_3)$ οπότε η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες.

Θέμα 3^ο

α) Έστω ότι $x^a \geq a^x$ ($a > 0$) για κάθε $x > 0$. Να αποδείξετε ότι $a = e$.

β) Αν $0 < a \neq 1$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $a^x \geq x+1$ να δείξετε ότι $a = e$

γ) Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

$xf(x)+1 \leq e^x + \eta \mu 2x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι $f(0)=3$.

Λύση

α) Θεωρούμε $g(x)=x^a - a^x$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως άθροισμα παραγωγισίμων με $g'(x)=ax^{a-1} - a^x \ln a$. Η δοσμένη σχέση γίνεται

$x^a \geq a^x \Leftrightarrow x^a - a^x \geq 0 \Leftrightarrow g(x) \geq g(a)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, που σημαίνει ότι η g παρουσιάζει στο a ελάχιστο, οπότε από Fermat έχουμε ότι

$$g'(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha \cdot \alpha^{\alpha-1} - \alpha^\alpha \ln \alpha = 0 \Rightarrow \alpha^\alpha - \alpha^\alpha \ln \alpha = 0 \Rightarrow \alpha^\alpha (\ln \alpha - 1) = 0 \Rightarrow \ln \alpha = 1 \Rightarrow \alpha = e$$

β) Θεωρούμε $g(x) = \alpha^x - x - 1$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως άθροισμα παραγωγισίμων με $g'(x) = \alpha^x \ln \alpha - 1$.

Η δοσμένη σχέση γίνεται $\alpha^x \geq x+1 \Leftrightarrow \alpha^x - x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow g(x) \geq g(0)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, που σημαίνει ότι η g παρουσιάζει στο 0 ελάχιστο, οπότε από Fermat έχουμε ότι

$$g'(0) = 0 \Rightarrow \alpha^0 \ln \alpha - 1 = 0 \Rightarrow \ln \alpha = 1 \Rightarrow \alpha = e$$

γ) Θεωρούμε $g(x) = xf(x) + 1 - e^x - \eta\mu 2x$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως άθροισμα παραγωγισίμων με $g'(x) = f(x) + xf'(x) - e^x - 2\sigma\upsilon\nu 2x$.

Η δοσμένη σχέση γίνεται

$xf(x) + 1 \leq e^x + \eta\mu 2x \Leftrightarrow xf(x) + 1 - e^x - \eta\mu 2x \leq 0 \Leftrightarrow g(x) \leq g(0)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, που σημαίνει ότι η g παρουσιάζει στο 0 μέγιστο, οπότε από Fermat έχουμε ότι

$$g'(0) = 0 \Rightarrow f(0) + 0f'(0) - e^0 - 2\sigma\upsilon\nu 0 = 0 \Rightarrow f(0) - 1 - 2 = 0 \Rightarrow f(0) = 3$$

Θέμα 4°

Να αποδείξετε τις ανισότητες :

α) $e^x \geq x+1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

β) $\ln x \leq x-1$, για κάθε $x > 0$

γ) $\eta\mu x \geq x - \frac{x^3}{6}$ για κάθε $x \geq 0$

δ) $e^x \geq x^e$, για κάθε $x > 0$

Λύση

α) Θεωρούμε την $f(x) = e^x$ η οποία είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ αφού $f''(x) = e^x > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Η εφαπτομένη της στο 0 είναι $y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Leftrightarrow y = x + 1$ και αφού η f είναι κυρτή η C_f θα είναι πάνω από κάθε εφαπτομένη της με εξαίρεση το σημείο επαφής, δηλαδή $e^x \geq x+1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=0$.

β) Θεωρούμε την $f(x) = \ln x$ η οποία είναι κοίλη στο $(0, +\infty)$ αφού

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0 \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty). \text{ Η εφαπτομένη της στο 1 είναι}$$

$y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Leftrightarrow y = x - 1$ και αφού η f είναι κοίλη η C_f θα είναι κάτω από κάθε εφαπτομένη της με εξαίρεση το σημείο επαφής, δηλαδή $\ln x \leq x-1$, για κάθε $x > 0$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=1$.

γ) Θεωρούμε την $f(x) = \eta\mu x - x + \frac{x^3}{6}$, $x \in [0, +\infty)$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ με $f'(x) = \sin x - 1 + \frac{x^2}{2}$.

Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ με $f''(x) = -\eta\mu x + x > 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$ αφού γνωρίζουμε ότι $\eta\mu x \leq |\eta\mu x| \leq |x| = x$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

Συνεπώς η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$, οπότε για κάθε $x > 0$ είναι $f'(x) > f'(0) \Rightarrow f'(x) > 0$

Συνεπώς η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$, οπότε για κάθε $x \geq 0$ είναι $f(x) \geq f(0) \Rightarrow \eta\mu x - x + \frac{x^3}{6} \geq 0$.

δ) Για κάθε $x > 0$ είναι $e^x \geq x^e \Leftrightarrow \ln e^x \geq \ln x^e \Leftrightarrow x \geq e \ln x \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} \leq \frac{1}{e}$.

Θεωρούμε τη $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ με $x > 0$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$ οπότε

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1 - \ln x}{x^2} = 0 \Rightarrow \ln x = 1 \Rightarrow x = e \text{ και}$$

$$f'(x) > 0 \Rightarrow \frac{1 - \ln x}{x^2} > 0 \Rightarrow \ln x < 1 \Rightarrow 0 < x < e$$

x	0	e	$+\infty$
$f''(x)$	+	○	-
$f(x)$	↗		↘

Συνεπώς f γνησίως αύξουσα στο $(0, e]$, γνησίως φθίνουσα στο $[e, +\infty)$ και παρουσιάζει μέγιστο για $x = e$ το $f(e) = \frac{\ln e}{e} = \frac{1}{e}$

Συνεπώς $f(x) \leq f(e) \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} \leq \frac{1}{e}$

Θέμα 5^ο

Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο $f(x) = x^3 + \kappa x^2 + x + \lambda$, με $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$. Αν x_1, x_2 θέσεις τοπικών ακροτάτων της f να δείξετε ότι $x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{3}$.

Λύση

Η f είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική με $f'(x) = 3x^2 + 2\kappa x + 3$, που είναι τριώνυμο ως προς x με $\Delta = 4\kappa^2 - 36$

Αφού x_1, x_2 θέσεις τοπικών ακροτάτων της f τότε από Fermat τα x_1, x_2 θα είναι ρίζες της f' , και από τύπους Vieta έχουμε $x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{3}{3} = 1$.

Θέμα 6°

Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις f και g με πεδίο ορισμού το ανοικτό Διάστημα Δ . Να δείξετε ότι αν η $h(x) = f(x) - g(x)$ έχει στο $x_0 \in \Delta$ μέγιστο, τότε η f και η g έχουν παράλληλες εφαπτομένες στο $x_0 \in \Delta$.

Λύση

Αφού η h παρουσιάζει μέγιστο στο x_0 που είναι εσωτερικό σημείο αφού Δ ανοικτό και είναι και παραγωγίσιμη ως διαφορά παραγωγισίμων, από Fermat έχουμε ότι $h'(x_0) = 0 \Rightarrow f'(x_0) - g'(x_0) = 0 \Rightarrow f'(x_0) = g'(x_0)$, οπότε οι f, g έχουν παράλληλες εφαπτομένες στο x_0 .

Θέμα 7°

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3x^3 + 3\mu x^2 + (3\mu + 4)x + 3$. Για ποιες τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Λύση

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική με $f'(x) = 9x^2 + 6\mu x + 3\mu + 4$

Αφού η f είναι γνησίως αύξουσα θα πρέπει $f'(x) \geq 0$ αρκεί η ισότητα να ισχύει για μεμονωμένα σημεία του πεδίου ορισμού και όχι για ολόκληρο διάστημα.

Έτσι αφού η f' είναι τριώνυμο ως προς x με $a=9>0$ θα πρέπει να έχει $\Delta \leq 0 \Rightarrow 36\mu^2 - 36(3\mu + 4) \leq 0 \Rightarrow \mu^2 - 3\mu - 4 \leq 0 \Rightarrow \mu \in [-1, 4]$

Θέμα 8°

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = e^x, x \in \mathbb{R}$ και $g(x) = \ln x, x > 0$.

α) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις τους δεν τέμνονται.

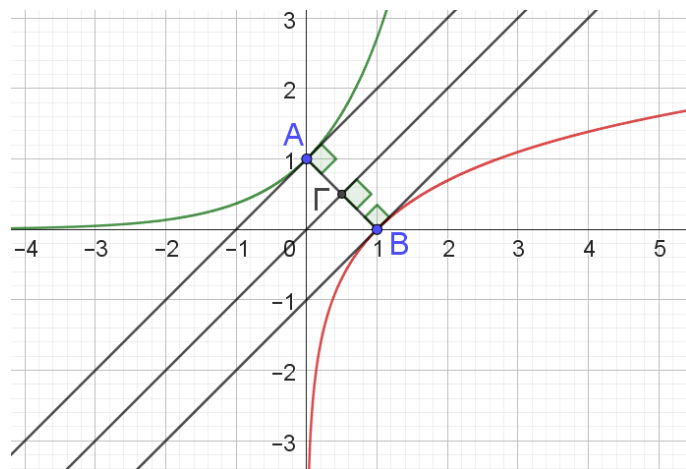
β) Να βρείτε τη μικρότερη απόσταση την οποία μπορεί να έχει ένα σημείο της C_f από την ευθεία $y = x$.

γ) Να βρείτε το σημείο της $y = e^x$, το οποίο απέχει τη μικρότερη απόσταση από την $y = x$.

δ) Ποια νομίζετε ότι είναι τα σημεία των C_f και C_g που να απέχουν την ελάχιστη απόσταση;

Λύση

α) Είναι $e^x \geq x+1 > x \geq x-1 \geq \ln x$ για κάθε $x > 0$ οπότε οι γραφικές παραστάσεις των f, g δεν τέμνονται .



β) , γ) Γνωρίζουμε ότι για κάθε $x \neq 0$ είναι $e^x > x+1$ και επειδή οι ευθείες $y = x+1, y = x$ είναι παράλληλες συμπεραίνουμε ότι η μικρότερη απόσταση την οποία μπορεί να έχει ένα σημείο της C_f από την ευθεία $y = x$, είναι η απόσταση του σημείου $A(0,1)$ από την ευθεία $y = x$.

$$\text{Η ελάχιστη αυτή απόσταση είναι } d(A, x-y=0) = \frac{|0-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Για οποιοδήποτε άλλο σημείο $M(x, e^x)$ η απόσταση του M από την ευθεία $y = x$

$$\text{είναι } d(M, x-y=0) = \frac{|x-e^x|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{e^x-x}{\sqrt{2}} > \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

γ) Με βάση τη $e^x \geq x+1 > x \geq x-1 \geq \ln x$ και το γεγονός ότι οι ευθείες $y = x+1, y = x, y = x-1$ είναι παράλληλες, συμπεραίνουμε ότι η μικρότερη απόσταση είναι η AB όπου $A(0,1)$ και $B(1,0)$ με την ελάχιστη απόσταση να είναι $\sqrt{2}$

Θέμα 9^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - \alpha x^2, \alpha \neq 0$.

α) Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα.

β) Να δείξετε ότι τα σημεία που αντιστοιχούν στα τοπικά ακρότατα της f ανήκουν στην καμπύλη με εξίσωση $y = -\frac{1}{2}x^3$.

Λύση

α) Η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = 3x^2 - 2\alpha x = x(3x - 2\alpha x)$ που έχει ρίζες τις $x = 0$ και $x = \frac{2\alpha}{3}$ στα οποία παρουσιάζει τοπικά ακρότατα αφού η f' είναι τριώνυμο με $\alpha = 3 > 0$ οπότε είναι αρνητική μεταξύ των ριζών και θετική εκτός αυτών.

β) Είναι $f(0) = 0$ οπότε το σημείο $(0,0)$ ανήκει στην καμπύλη με εξίσωση $y = -\frac{1}{2}x^3$

Είναι $f\left(\frac{2\alpha}{3}\right) = \frac{8\alpha^3}{27} - \alpha \cdot \frac{4\alpha^2}{9} = \frac{8\alpha^3}{27} - \frac{12\alpha^3}{27} = -\frac{4\alpha^3}{27} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{8\alpha^3}{27} = -\frac{1}{2} \left(\frac{2\alpha}{3}\right)^3$ οπότε το σημείο $\left(\frac{2\alpha}{3}, f\left(\frac{2\alpha}{3}\right)\right)$ ανήκει στην καμπύλη με εξίσωση $y = -\frac{1}{2}x^3$

Θέμα 10^ο

Να αποδειχθεί ότι :

α) $e^x > x-1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$

β) η εξίσωση $2e^x + 2x = x^2 + 2$ έχει μία ρίζα τη $x = 0$.

Λύση

α) Θεωρούμε την $f(x) = e^x$ η οποία είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ αφού $f''(x) = e^x > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Η εφαπτομένη της στο 0 είναι $y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Leftrightarrow y = x + 1$ και αφού η f είναι κυρτή η C_f θα είναι πάνω από κάθε εφαπτομένη της με εξαίρεση το σημείο επαφής, δηλαδή $e^x \geq x + 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 0$.

Οπότε $e^x > x - 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$.

β) Η εξίσωση $2e^x + 2x = x^2 + 2$ έχει ρίζα τη $x = 0$ αφού την επαληθεύει.

Θεωρούμε $g(x) = 2e^x + 2x - x^2 - 2$ η οποία είναι παραγωγίσιμη με

$g'(x) = 2e^x + 2 - 2x = 2(e^x + 1 - x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ και $g'(0) = 0$

που σημαίνει ότι η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και άρα η ρίζα $x = 0$ είναι μοναδική.

Θέμα 11

Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f'(x) > 2f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 1$. Να δείξετε ότι $f(x) > e^{2x}$, για κάθε $x > 0$.

Λύση

Θεωρούμε τη $g(x) = \frac{f(x)}{e^{2x}}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$g'(x) = \frac{f'(x) \cdot e^{2x} - 2e^{2x} \cdot f(x)}{e^{4x}} = \frac{e^{2x} \cdot (f'(x) - 2f(x))}{e^{4x}} = \frac{f'(x) - 2f(x)}{e^{2x}} > 0 \text{ για κάθε}$$

$x \in \mathbb{R}$ οπότε η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Συνεπώς για κάθε $x > 0$ είναι $g(x) > g(0) \Rightarrow \frac{f(x)}{e^{2x}} > 1 \Rightarrow f(x) > e^{2x}$.

Θέμα 12^ο

Δίνεται μια συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f(\alpha) = f(\beta) = 0$ και $f''(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι $f(x) < 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$.

Λύση

Αφού $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ η f είναι 2 φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και μάλιστα η f' θα είναι γνησίως αύξουσα εκεί .

Για τη συνάρτηση f πληρούνται οι προϋποθέσεις του Θ.Rolle στο $[\alpha, \beta]$ οπότε υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ με $f'(\xi) = 0$

Για κάθε $x \in (\alpha, \xi) \Rightarrow f'(x) < f'(\xi) \Rightarrow f'(x) < 0$ οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[\alpha, \xi]$ και άρα για κάθε $x \in (\alpha, \xi) \Rightarrow f(x) < f(\alpha) \Rightarrow f(x) < 0$

Για κάθε $x \in (\xi, \beta) \Rightarrow f'(x) > f'(\xi) \Rightarrow f'(x) > 0$ οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[\xi, \beta]$ και άρα για κάθε $x \in (\xi, \beta) \Rightarrow f(x) < f(\beta) \Rightarrow f(x) < 0$

Συνεπώς για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$ είναι $f(x) < 0$

Θέμα 13^ο

Έστω f παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν

$$f(-1) = -3, \quad f(1) = 5, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty.$$

Το πρόσημο της f' φαίνεται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
f'	-	0	+	0	-

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f

γ) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = \lambda$, για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Η f είναι γνησίως αύξουσα στα $[-1, 1]$ και γνησίως φθίνουσα στα

$(-\infty, -1], [1, +\infty)$. Παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το $f(-1) = -3$ και τοπικό μέγιστο το $f(1) = 5$

β) Αν $\Delta_1 = (-\infty, -1]$, $\Delta_2 = (-1, 1]$, $\Delta_3 = (1, +\infty)$ τότε

$$f(\Delta_1) = [f(-1), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)) = [-3, +\infty),$$

$$f(\Delta_2) = (\lim_{x \rightarrow -1} f(x), f(1)] = (-3, 5],$$

$$f(\Delta_3) = (\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 1} f(x)) = (-\infty, 5)$$

και το σύνολο τιμών της είναι το $f(\mathbb{R}) = f(\Delta_1) \cup f(\Delta_2) \cup f(\Delta_3) = \mathbb{R}$

γ) Αν $\lambda < -3$ τότε $\lambda \in f(\Delta_3)$ οπότε υπάρχει $x_1 \in \Delta_3$ με $f(x_1) = \lambda$ και λόγω μονοτονίας εκεί μοναδικό και $\lambda \notin f(\Delta_2)$ και $\lambda \notin f(\Delta_1)$ οπότε η εξίσωση $f(x) = \lambda$ έχει ακριβώς μία ρίζα .

Αν $\lambda = -3$ τότε $\lambda \in f(\Delta_3)$ οπότε υπάρχει $x_1 \in \Delta_3$ με $f(x_1) = \lambda$ και λόγω μονοτονίας εκεί μοναδικό και $\lambda \in f(\Delta_1)$ οπότε υπάρχει $x_2 \in \Delta_1$ με $f(x_2) = \lambda$ και λόγω μονοτονίας εκεί μοναδικό, και $\lambda \notin f(\Delta_2)$ οπότε έχει ακριβώς δύο ρίζες .

Αν $-3 < \lambda < 5$ τότε $\lambda \in f(\Delta_1)$ οπότε υπάρχει $x_1 \in \Delta_1$ με $f(x_1) = \lambda$ και λόγω μονοτονίας εκεί μοναδικό και $\lambda \in f(\Delta_2)$ οπότε υπάρχει $x_2 \in \Delta_2$ με $f(x_2) = \lambda$ και λόγω μονοτονίας εκεί μοναδικό, και $\lambda \in f(\Delta_3)$ οπότε υπάρχει $x_3 \in \Delta_3$ με $f(x_3) = \lambda$ και λόγω μονοτονίας εκεί μοναδικό, οπότε έχει ακριβώς τρεις ρίζες .

Αν $\lambda = 5$ τότε $\lambda \in f(\Delta_1)$ οπότε υπάρχει $x_1 \in \Delta_1$ με $f(x_1) = \lambda$ και λόγω μονοτονίας εκεί μοναδικό και $\lambda \in f(\Delta_2)$ οπότε υπάρχει $x_2 \in \Delta_2$ με $f(x_2) = \lambda$ και λόγω μονοτονίας εκεί μοναδικό, και $\lambda \notin f(\Delta_3)$ οπότε έχει ακριβώς δύο ρίζες .

Αν $\lambda > 5$ τότε $\lambda \in f(\Delta_1)$ οπότε υπάρχει $x_1 \in \Delta_3$ με $f(x_1) = \lambda$ και λόγω μονοτονίας εκεί μοναδικό και $\lambda \notin f(\Delta_2)$ και $\lambda \notin f(\Delta_3)$ οπότε η εξίσωση $f(x) = \lambda$ έχει ακριβώς μία ρίζα .

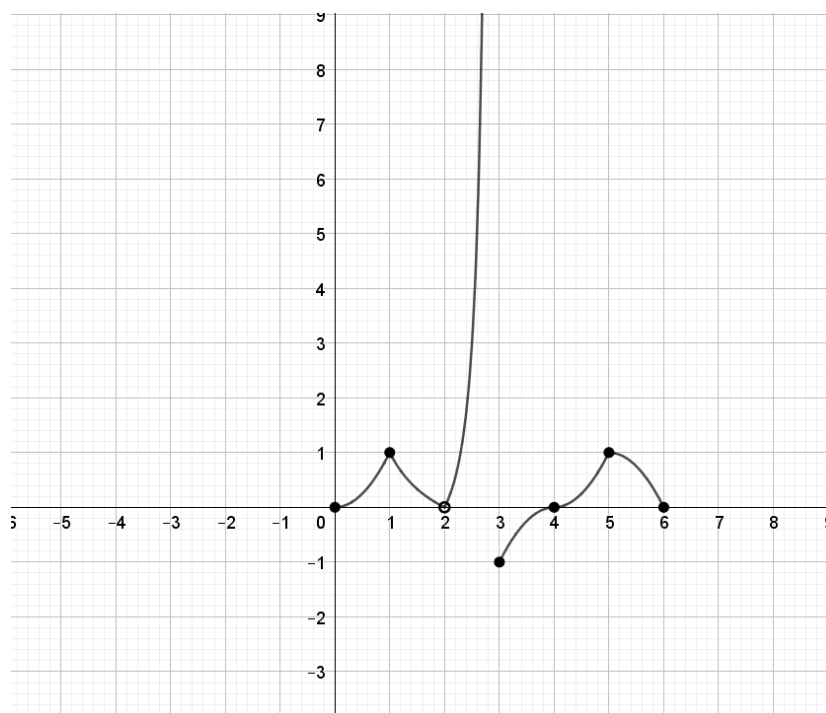
Θέμα 14^ο

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f . Με βάση το παρακάτω σχήμα, να βρείτε

α) το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f .

β) τα διαστήματα μονοτονίας και τα τοπικά ακρότατα της f .

γ) τα διαστήματα που είναι κυρτή ή κοίλη και τα σημεία καμπής της f αν είναι γνωστό ότι ο xx' εφάπτεται της C_f στο $(4,0)$.



α) το πεδίο ορισμού της f είναι το $[0,2) \cup (2,6]$ και το σύνολο τιμών της f είναι το $[-1,+\infty)$.

β) η f είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $[0,1], (2,3), [3,5]$ και γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα $[1,2), [5,6]$. Παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο 1 και στο 5 και τοπικό ελάχιστο στο 0, στο 3 και στο 6.

γ) η f είναι κυρτή σε καθένα από τα διαστήματα $[0,1], [1,2), (2,3), [3,4], [4,5]$ και κοίλη σε καθένα από τα διαστήματα $[3,4], [5,6]$ και παρουσιάζει καμπή στο 4 αφού αλλάζει εκατέρωθεν του 4 κοίλα και ο x' εφάπτεται της C_f στο $(4,0)$. Στο 5 δεν παρουσιάζει καμπή διότι ναι μεν αλλάζει εκατέρωθεν του 5 κοίλα αλλά στο 5 δεν δέχεται εφαπτομένη.

Θέμα 15°

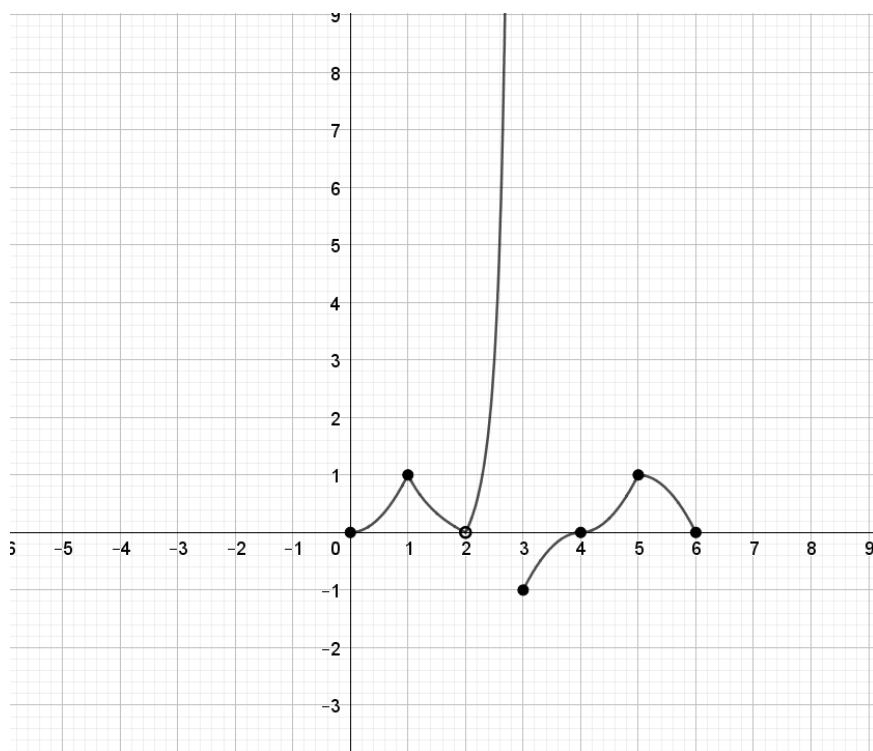
Έστω συνάρτηση $f : [0,6] \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της f' . Με βάση το παρακάτω σχήμα, να βρείτε

α) τα διαστήματα μονοτονίας της f .

β) τις θέσεις τοπικών ακροτάτων της f .

γ) τα διαστήματα που η f είναι κυρτή ή κοίλη.

δ) τις θέσεις των σημείων καμπής της f αν είναι γνωστό ότι η C_f δέχεται σε κάθε σημείο της εφαπτομένη.



- α) η f είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $[0,3]$, $[4,6]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[3,4]$.
 β) Παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο 3 και στο 6, τοπικό ελάχιστο στο 0 και στο 4 .
 γ) η f είναι κυρτή σε καθένα από τα διαστήματα $[0,1]$, $[2,3]$, $[3,5]$ και κοίλη σε καθένα από τα διαστήματα $[1,2]$, $[5,6]$
 δ) παρουσιάζει καμπή στο 1, στο 2 και στο 5.

Θέμα 16ο

Έστω συνάρτηση $f:[0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής με $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (0,1)$ και $f(0) < f(1)$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1.

β) Να αποδείξετε ότι $D_{f^{-1}} = [f(0), f(1)]$.

γ) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow \alpha} ((x-\alpha) \cdot f^{-1}(x))$ όπου $\alpha \in D_{f^{-1}}$.

Λύση

α) Έστω ότι η f δεν ήταν 1-1. Τότε θα υπήρχαν $x_1, x_2 \in [0,1]$ με $x_1 \neq x_2$ και $f(x_1) = f(x_2)$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε ότι $x_1 < x_2$. Η f είναι συνεχής στο $[0,1]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ με $f(x_1) = f(x_2)$ οπότε από θεώρημα Rolle θα υπήρχε $\xi \in (x_1, x_2) \subset (0,1)$ με $f'(\xi) = 0$. Αυτό όμως είναι άτοπο διότι $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (0,1)$. Συνεπώς η f είναι 1-1.

β) Αφού η f είναι 1-1, αντιστρέφεται με $D_{f^{-1}} = R_f$. Η f είναι συνεχής στο $[0,1]$ οπότε από θεώρημα μεγίστης – ελαχίστης παίρνει στο $[0,1]$ και ελάχιστη και μέγιστη τιμή. Αν έπαιρνε κάποια από αυτές σε κάποιο $x_0 \in (0,1)$ τότε από θεώρημα Fermat θα έπρεπε $f'(x_0) = 0$. Αυτό όμως είναι άτοπο διότι $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (0,1)$. Συνεπώς η f παίρνει την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή στα άκρα του $[0,1]$, δηλαδή στο 0 και στο 1. Αφού $f(0) < f(1)$, παίρνει την ελάχιστη τιμή στο 0 και τη μέγιστη τιμή στο 1, οπότε $D_{f^{-1}} = R_f = [f(0), f(1)]$.

γ) Αφού $R_{f^{-1}} = D_f = [0,1]$ είναι $0 \leq f^{-1}(x) \leq 1$ για κάθε $x \in D_{f^{-1}}$ οπότε $|f^{-1}(x)| \leq 1 \Rightarrow |x - \alpha| |f^{-1}(x)| \leq |x - \alpha| \Rightarrow -|x - \alpha| \leq (x - \alpha) \cdot f^{-1}(x) \leq |x - \alpha|$ και επειδή $\lim_{x \rightarrow \alpha} |x - \alpha| = 0$ από κριτήριο παρεμβολής είναι και $\lim_{x \rightarrow \alpha} ((x - \alpha) \cdot f^{-1}(x)) = 0$.

Θέμα 17°

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu x}{x} & , x \in [-\pi, 0) \cup (0, \pi] \\ 1 & , x = 0 \end{cases}$

και $\phi(x) = x \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x$, $x \in [-\pi, \pi]$.

α) Να αποδείξετε ότι ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle για την f στο $[-\pi, \pi]$.

β) Να αποδείξετε ότι η ϕ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-\pi, \pi]$ και να βρείτε το πρόσημό της.

γ) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Λύση

α) Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη σε καθένα από τα διαστήματα $[-\pi, 0), (0, \pi]$ ως πηλίκο παραγωγισίμων.

Επίσης $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1 = f(0)$ οπότε η f είναι συνεχής στο 0.

Επιπλέον $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\eta\mu x}{x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x - x}{x^2} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{2x} = 0$ οπότε είναι παραγωγίσιμη στο 0 με $f'(0) = 0$.

Τέλος $f(\pi) = \frac{\eta\mu\pi}{\pi} = 0$ και $f(-\pi) = \frac{\eta\mu(-\pi)}{\pi} = 0$.

Συνεπώς η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $[-\pi, \pi]$ με $f(\pi) = f(-\pi)$, οπότε ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle για την f στο $[-\pi, \pi]$.

β) Η ϕ είναι παραγωγίσιμη στο $[-\pi, \pi]$ ως πράξεις παραγωγισίμων με $\phi'(x) = -x\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x - \sigma\upsilon\nu x = -x\eta\mu x$.

Είναι $\phi'(\pi) = \phi'(-\pi) = \phi'(0) = 0$.

Για $x \in (-\pi, 0)$ είναι $x < 0$ και $\eta\mu x < 0$ οπότε $\phi'(x) < 0$.

Για $x \in (0, \pi)$ είναι $x > 0$ και $\eta\mu x > 0$ οπότε $\phi'(x) < 0$.

Συνεπώς $\phi'(x) \leq 0$ για κάθε $x \in [-\pi, \pi]$ και $\phi'(x) = 0$ για $x = \pi$ ή $x = -\pi$ ή $x = 0$.

Συνεπώς η ϕ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-\pi, \pi]$.

Για $x \in (-\pi, 0)$ είναι $x < 0$ οπότε $\phi(x) > \phi(0) \Leftrightarrow \phi(x) > 0$.

Για $x \in (0, \pi)$ είναι $x > 0$ οπότε $\phi(x) < \phi(0) \Leftrightarrow \phi(x) < 0$.

γ) Είναι
$$f'(x) = \begin{cases} \frac{x\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x}{x^2}, & x \in [-\pi, 0) \cup (0, \pi] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Για $x \in (-\pi, 0)$ είναι $\phi(x) > 0$ και άρα και $f'(x) > 0$.

Για $x \in (0, \pi)$ είναι $\phi(x) < 0$ και άρα και $f'(x) < 0$.

Συνεπώς η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[-\pi, 0]$, γνησίως φθίνουσα στο $[0, \pi]$, παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο 0 το $f(0) = 1$ και ολικό ελάχιστο στο $-\pi$ και στο π το $f(-\pi) = f(\pi) = 0$.

Θέμα 18°

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x$ και το σημείο $A(0, 2)$. Αν $M(x_o, \ln x_o)$ το σημείο εκείνο της C_f που απέχει την ελάχιστη απόσταση από το σημείο A , να αποδείξετε ότι:

α) $x_o^2 + \ln x_o - 2 = 0$.

β) η εφαπτομένη της C_f στο M

i. είναι κάθετη στην AM .

ii. τέμνει τον άξονα xx' στο σημείο $(x_o^3 - x_o, 0)$.

γ) $x_o^3 - x_o < 1$.

Λύση

α) Έστω $K(x, \ln x)$ με $x > 0$ τυχαίο σημείο της C_f .

Η απόσταση ΑΚ συναρτήσει του $x > 0$ είναι

$$d(x) = \sqrt{(x-0)^2 + (\ln x - 2)^2} = \sqrt{x^2 + \ln^2 x - 4\ln x + 4}.$$

Η απόσταση αυτή γίνεται ελάχιστη για $x = x_o$ και επειδή η $d(x)$ είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $(0, +\infty)$ από Fermat έχουμε ότι $d'(x_o) = 0$. Όμως

$$d'(x) = \frac{2x + 2 \frac{\ln x - 4}{x}}{2\sqrt{x^2 + \ln^2 x - 4\ln x + 4}} = \frac{x^2 + \ln x - 2}{\sqrt{x^2 + \ln^2 x - 4\ln x + 4}} \text{ οπότε}$$

$$d'(x_o) = 0 \Rightarrow x_o^2 + \ln x_o - 2 = 0 \quad (1).$$

β) Η εφαπτομένη της C_f στο Μ έχει εξίσωση $(\varepsilon): y - \ln x_o = \frac{1}{x_o}(x - x_o)$.

i. Για να είναι κάθετη στην ΑΜ πρέπει και αρκεί

$$\lambda_\varepsilon \cdot \lambda_{AM} = -1 \Leftrightarrow \frac{1}{x_o} \cdot \frac{\ln x_o - 2}{x_o} = -1 \Leftrightarrow \ln x_o - 2 = -x_o^2 \Leftrightarrow x_o^2 + \ln x_o - 2 = 0 \text{ που ισχύει.}$$

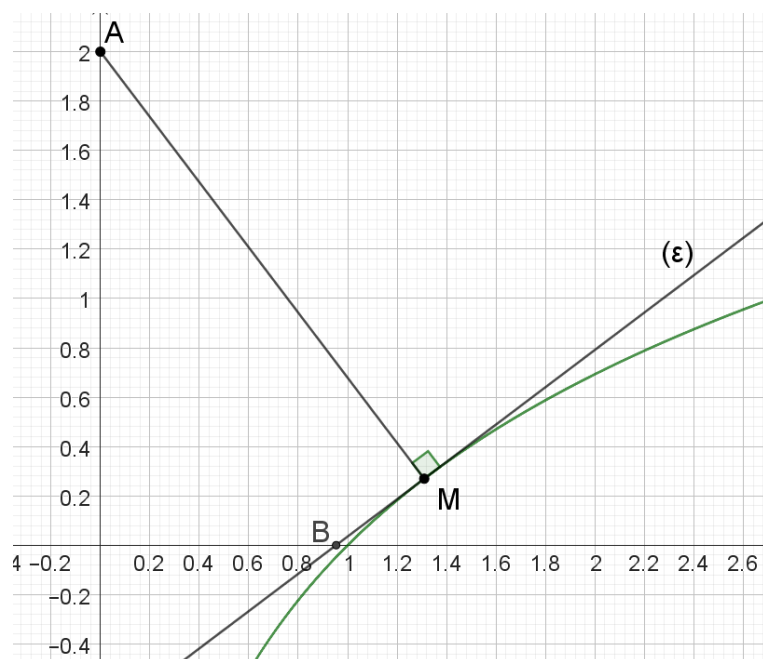
ii. Για $y = 0$ στην εξίσωση της (ε) έχουμε

$$0 - \ln x_o = \frac{1}{x_o}(x - x_o) \Leftrightarrow -x_o \ln x_o = x - x_o \Leftrightarrow x = x_o - x_o \ln x_o \quad (2).$$

Από την (1) έχουμε ότι $\ln x_o = 2 - x_o^2$ και έτσι η (2) γίνεται

$x = x_o - x_o(2 - x_o^2) \Leftrightarrow x = x_o^3 - x_o$. Συνεπώς η (ε) τέμνει τον άξονα xx' στο σημείο

$B(x_o^3 - x_o, 0)$.



γ) Η f είναι κοίλη αφού $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ για κάθε $x > 0$, οπότε η C_f είναι κάτω

από την (ε) με εξαίρεση το σημείο επαφής όπως φαίνεται και στο παραπάνω σχήμα. Για το σημείο επαφής $M(x_0, \ln x_0)$ ισχύει ότι $x_0^2 + \ln x_0 - 2 = 0$, οπότε

$x_0^3 - x_0 \neq x_0$ αφού αν $x_0^3 - x_0 = x_0$ τότε

$x_0^3 - x_0 = x_0 \Leftrightarrow x_0^3 - 2x_0 = 0 \Leftrightarrow x_0(x_0^2 - 2) = 0 \Leftrightarrow -x_0 \ln x_0 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 1$ το οποίο είναι

άτοπο, αφού για $x_0 = 1$ είναι $x_0^2 + \ln x_0 - 2 = 1 + \ln 1 - 2 = -1 \neq 0$. Αφού λοιπόν

$f(x) < \frac{1}{x_0}(x - x_0) + \ln x_0$ για κάθε $x \neq x_0$ και $x_0^3 - x_0 \neq x_0$ συμπεραίνουμε ότι

$f(x_0^3 - x_0) < \frac{1}{x_0}(x_0^3 - x_0 - x_0) + \ln x_0 \Leftrightarrow \ln(x_0^3 - x_0) < x_0^2 + \ln x_0 - 2 \Leftrightarrow \ln(x_0^3 - x_0) < 0 \Leftrightarrow x_0^3 - x_0 < 1$

.

Θέμα 19^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - \ln x - \lambda x$, $x > 0$ και $\lambda \in \mathbb{R}$. Αν ισχύει $e - \lambda = e^e - 1 - \lambda e$, να αποδείξετε ότι :

α) υπάρχει ακριβώς ένα $x_0 \in (1, e)$ με $f'(x_0) = 0$.

β) για την f' ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο $[1, e]$.

γ) $e - 1 < \lambda < e^e - \frac{1}{e}$.

δ) η f παρουσιάζει ολικό ακρότατο στο x_0 που είναι το $e^{x_0}(1 - x_0) + 1 - \ln x_0$.

Λύση

α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ ως άθροισμα παραγωγισίμων άρα και συνεχής. Επίσης $e - \lambda = e^e - 1 - \lambda e \Leftrightarrow f(1) = f(e)$, οπότε πληρούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle για την f στο $[1, e]$ και επομένως υπάρχει $x_0 \in (1, e)$ με $f'(x_0) = 0$. Όμως $f'(x) = e^x - \frac{1}{x} - \lambda$ η οποία είναι επίσης παραγωγίσιμη ως άθροισμα παραγωγισίμων με $f''(x) = e^x + \frac{1}{x^2} > 0$ για κάθε $x > 0$ που σημαίνει ότι η f' είναι γνησίως αύξουσα και άρα το x_0 είναι μοναδικό.

β) Η f' είναι παραγωγίσιμη άρα και συνεχής. Επίσης $1 < x_0 < e$ και αφού η f' είναι γνησίως αύξουσα έχουμε ότι $f'(1) < f'(x_0) < f'(e) \Leftrightarrow f'(1) < 0 < f'(e)$. Επομένως για την f' ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο $[1, e]$.

γ) Είναι $f'(1) < 0 < f'(e) \Leftrightarrow e - 1 - \lambda < 0 < e^e - \frac{1}{e} - \lambda \Leftrightarrow e - 1 < \lambda < e^e - \frac{1}{e}$.

δ) Για κάθε $x \in (0, x_0)$ είναι $x < x_0$ και αφού η f' είναι γνησίως αύξουσα έχουμε ότι $f'(x) < f'(x_0) \Leftrightarrow f'(x) < 0$ και αφού η f είναι συνεχής θα είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, x_0]$.

Για κάθε $x \in (x_0, +\infty)$ είναι $x_0 < x$ και αφού η f' είναι γνησίως αύξουσα έχουμε ότι $f'(x_0) < f'(x) \Leftrightarrow 0 < f'(x)$ και αφού η f είναι συνεχής θα είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_0, +\infty)$.

Συνεπώς η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο x_0 που είναι το

$$f(x_0) = e^{x_0} - \ln x_0 - \lambda x_0. \text{ Όμως } f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow e^{x_0} - \frac{1}{x_0} - \lambda = 0 \Leftrightarrow e^{x_0} - \frac{1}{x_0} = \lambda \text{ οπότε}$$

$$f(x_0) = e^{x_0} - \ln x_0 - x_0 \left(e^{x_0} - \frac{1}{x_0} \right) = e^{x_0} - \ln x_0 - x_0 e^{x_0} + 1 = e^{x_0} (1 - x_0) - \ln x_0 + 1.$$

Τελικά η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο x_0 που είναι το $e^{x_0} (1 - x_0) + 1 - \ln x_0$.

Θέμα 20°

Δίνεται μια συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f(\alpha) = f(\beta) = 0$ και $f''(x) < 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$.

Λύση

Αφού $f''(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ η f είναι 2 φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και μάλιστα η f' θα είναι γνησίως φθίνουσα εκεί .

Για τη συνάρτηση f πληρούνται οι προϋποθέσεις του Θ.Rolle στο $[\alpha, \beta]$ οπότε υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ με $f'(\xi) = 0$

Για κάθε $x \in (\alpha, \xi) \Rightarrow f'(x) > f'(\xi) \Rightarrow f'(x) > 0$ οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[\alpha, \xi]$ και άρα για κάθε $x \in (\alpha, \xi) \Rightarrow f(x) > f(\alpha) \Rightarrow f(x) > 0$

Για κάθε $x \in (\xi, \beta) \Rightarrow f'(x) < f'(\xi) \Rightarrow f'(x) < 0$ οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[\xi, \beta]$ και άρα για κάθε $x \in (\xi, \beta) \Rightarrow f(x) > f(\beta) \Rightarrow f(x) > 0$

Συνεπώς για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$ είναι $f(x) > 0$

Θέμα 21°

Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και κοίλη . Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο , να δείξετε ότι αυτό θα είναι ολικό μέγιστο .

Λύση

Αφού η f είναι κοίλη συμπεραίνουμε ότι η f' θα είναι γνησίως φθίνουσα

Αν η f παρουσιάζει ακρότατο στο $(\xi, f(\xi))$ τότε από Fermat είναι $f'(\xi) = 0$

Για κάθε $x < \xi \Rightarrow f'(x) > f'(\xi) \Rightarrow f'(x) > 0$ οπότε για κάθε $x \leq \xi \Rightarrow f(x) \leq f(\xi)$

Για κάθε $x > \xi \Rightarrow f'(x) < f'(\xi) \Rightarrow f'(x) < 0$ οπότε για κάθε $x \geq \xi \Rightarrow f(x) \leq f(\xi)$

Συνεπώς είναι $f(x) \leq f(\xi)$ για κάθε $x \in D_f$ και άρα $f(\xi)$ τοπικό μέγιστο .

Θέμα 22°

Το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο του παρακάτω σχήματος έχει βάση τετράγωνο πλευράς x , ύψος y και σταθερό όγκο 1. Να αποδείξετε ότι :

α) το εμβαδόν της συνολικής του επιφάνειας συναρτήσει της πλευράς x είναι

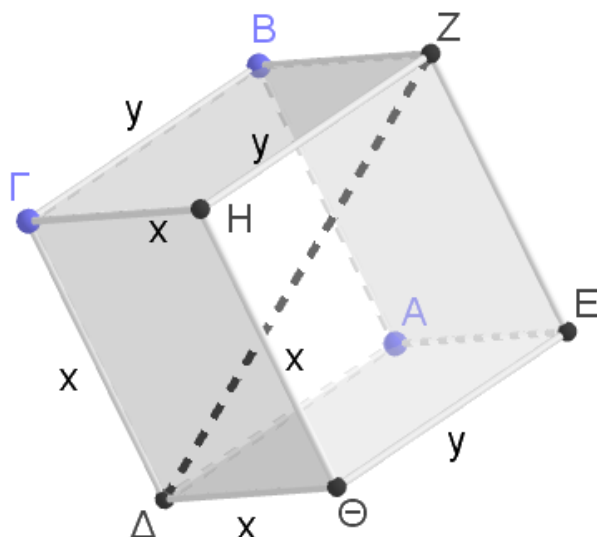
$$E(x) = 2x^2 + \frac{4}{x}, x > 0$$

β) το εμβαδόν της συνολικής του επιφάνειας ελαχιστοποιείται όταν είναι κύβος.

γ) η απόσταση ΔZ

i. ως συναρτήσει της πλευράς x είναι $d(x) = \sqrt{2x^2 + \frac{1}{x^4}}, x > 0$.

ii. ελαχιστοποιείται όταν είναι κύβος.



Λύση

α) Αφού το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο έχει σταθερό όγκο 1, συμπεραίνουμε ότι

$$x^2 \cdot y = 1 \Leftrightarrow y = \frac{1}{x^2} \quad (1) \text{ με } x > 0.$$

Το εμβαδόν της συνολικής του επιφάνειας αποτελείται από 2 τετράγωνα πλευράς x και 4 ορθογώνια με πλευρές x, y οπότε είναι $2x^2 + 4xy$ που με τη βοήθεια της (1)

γίνεται $2x^2 + \frac{4}{x}$, δηλαδή συναρτήσει της πλευράς x είναι $E(x) = 2x^2 + \frac{4}{x}, x > 0$.

β) Η συνάρτηση $E(x) = 2x^2 + \frac{4}{x}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με

$$E'(x) = 4x - \frac{4}{x^2} = \frac{4(x^3 - 1)}{x^2}. \text{ Είναι}$$

$$E'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{4(x^3 - 1)}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x^3 = 1 \Leftrightarrow x = 1 \text{ και}$$

$$E'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{4(x^3 - 1)}{x^2} > 0 \Leftrightarrow x^3 > 1 \Leftrightarrow x > 1.$$

Συνεπώς η συνάρτηση $E(x) = 2x^2 + \frac{4}{x}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$ και

γνησίως φθίνουσα στο $(0, 1]$ και επομένως παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x = 1$.

Από την (1) για $x = 1$ έχουμε ότι $y = 1$ που σημαίνει ότι το εμβαδόν της συνολικής επιφάνειας του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου ελαχιστοποιείται όταν είναι κύβος.

γ)

i. Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο $\Delta ΕΘ$ έχουμε ότι $\Delta Ε^2 = \Delta Θ^2 + ΘΕ^2 = x^2 + y^2$.

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο $\Delta ΕΖ$ έχουμε ότι $\Delta Ζ^2 = \Delta Ε^2 + ΕΖ^2 = x^2 + y^2 + x^2 = 2x^2 + y^2$ που από τη σχέση (1) γίνεται

$\Delta Ζ^2 = 2x^2 + \frac{1}{x^4}$. Συνεπώς η απόσταση $\Delta Ζ$ ως συναρτήσει της πλευράς x είναι

$$d(x) = \sqrt{2x^2 + \frac{1}{x^4}}, x > 0.$$

ii. Η συνάρτηση $d(x) = \sqrt{2x^2 + \frac{1}{x^4}}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με

$$d'(x) = \frac{4x - \frac{4x^3}{x^8}}{2\sqrt{2x^2 + \frac{1}{x^4}}} = \frac{2x - \frac{2}{x^5}}{\sqrt{2x^2 + \frac{1}{x^4}}} = \frac{2(x^6 - 1)}{x^5\sqrt{2x^2 + \frac{1}{x^4}}}. \text{ Είναι}$$

$$d'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2(x^6 - 1)}{x^5\sqrt{2x^2 + \frac{1}{x^4}}} = 0 \Leftrightarrow x^6 = 1 \Leftrightarrow x = 1 \text{ και}$$

$$d'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{2(x^6 - 1)}{x^5\sqrt{2x^2 + \frac{1}{x^4}}} > 0 \Leftrightarrow x^6 > 1 \stackrel{x > 0}{\Leftrightarrow} x > 1.$$

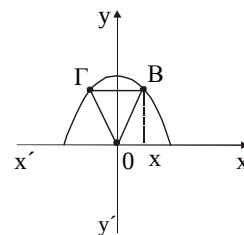
Συνεπώς η συνάρτηση $d(x) = \sqrt{2x^2 + \frac{1}{x^4}}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$ και

γνησίως φθίνουσα στο $(0, 1]$ και επομένως παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x = 1$

Από την (1) για $x = 1$ έχουμε ότι $y = 1$ που σημαίνει ότι η απόσταση $\Delta Ζ$ ελαχιστοποιείται όταν το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο είναι κύβος.

Θέμα 23°

Στο διπλανό σχήμα φαίνεται τμήμα παραβολής με εξίσωση $y = \frac{1}{14}(48 - x^2)$, και το ισοσκελές τρίγωνο ΟΒΓ με $OB = OG$.



α) Να βρείτε τα σημεία Β, Γ για τα οποία το εμβαδόν του τριγώνου ΟΒΓ γίνεται μέγιστο.

β) Ποιο είναι αυτό το μέγιστο εμβαδόν;

Λύση

α) Η παραβολή έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα yy' και τέμνει τον άξονα xx' στα σημεία $(-\sqrt{48}, 0), (\sqrt{48}, 0)$. Αφού το τρίγωνο ΟΒΓ είναι ισοσκελές με $OB = OG$ συμπεραίνουμε ότι τα σημεία Β, Γ είναι συμμετρικά ως προς τον yy' οπότε $O(0, 0)$,

$$B(x, \frac{1}{14}(48 - x^2)), \Gamma(-x, \frac{1}{14}(48 - x^2)) \text{ με } 0 < x < \sqrt{48}.$$

Το εμβαδόν του ΟΒΓ είναι

$$(OB\Gamma) = E(x) = \frac{1}{2}(B\Gamma) \cdot d(O, B\Gamma) = \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot \frac{1}{14}(48 - x^2) = \frac{1}{14}(48x - x^3) \text{ με } -\sqrt{48} < x < \sqrt{48}.$$

Η συνάρτηση $E(x) = \frac{1}{14}(48x - x^3)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με

$$E'(x) = \frac{1}{14}(48 - 3x^2). \text{ Είναι}$$

$$E'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{14}(48 - 3x^2) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 16 \stackrel{x>0}{\Leftrightarrow} x = 4 \text{ και}$$

$$E'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{14}(48 - 3x^2) > 0 \Leftrightarrow x^2 < 16 \stackrel{x>0}{\Leftrightarrow} 0 < x < 4.$$

Συνεπώς η συνάρτηση $E(x) = \frac{1}{14}(48x - x^3)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, 4]$ και

γνησίως φθίνουσα στο $[4, \sqrt{48})$ και επομένως παρουσιάζει ολικό μέγιστο για $x = 4$.

Συνεπώς το εμβαδόν του ΟΒΓ μεγιστοποιείται όταν $B(4, \frac{32}{14})$ και $\Gamma(-4, \frac{32}{14})$.

$$\beta) \text{ Το μέγιστο εμβαδόν είναι } E(4) = \frac{1}{14}(48 \cdot 4 - 4^3) = \frac{128}{14} = \frac{64}{7}$$

Θέμα 24°

Ο κύλινδρος του παρακάτω σχήματος έχει βάση κύκλο ακτίνας ρ , ύψος ν και σταθερό όγκο 1. Να αποδείξετε ότι :

α) το εμβαδόν της συνολικής του επιφάνειας συναρτήσει της ακτίνας ρ είναι

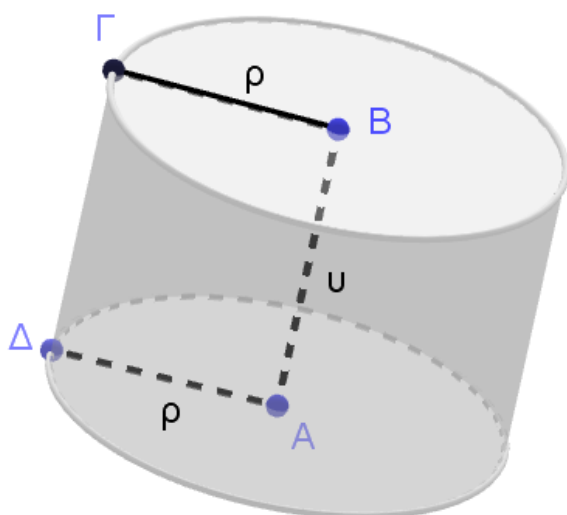
$$E(\rho) = 2\pi\rho^2 + \frac{2}{\rho}, \quad \rho > 0.$$

β) το εμβαδόν της συνολικής του επιφάνειας ελαχιστοποιείται όταν $\nu = 2\rho$.

γ) η απόσταση ΔB

i. ως συναρτήσει της ακτίνας ρ είναι $d(\rho) = \sqrt{\rho^2 + \frac{1}{\pi^2\rho^4}}, \quad \rho > 0.$

ii. ελαχιστοποιείται όταν $(\Delta B \Gamma \Delta) = \sqrt[6]{\frac{1}{2\pi^3}}.$



Λύση

α) Αφού ο κύλινδρος έχει σταθερό όγκο 1, συμπεραίνουμε ότι $\pi\rho^2 \cdot \nu = 1 \Leftrightarrow \nu = \frac{1}{\pi\rho^2}$

(1) με $\rho > 0$.

Το εμβαδόν της συνολικής του επιφάνειας αποτελείται από 2 κυκλικούς δίσκους ακτίνας ρ και μια παράπλευρη επιφάνεια που είναι ορθογώνια με πλευρές $2\pi\rho, \nu$

οπότε είναι $2\pi\rho^2 + 2\pi\rho\nu$ που με τη βοήθεια της (1) γίνεται $2\pi\rho^2 + \frac{2}{\rho}$, δηλαδή

συναρτήσει της ακτίνας ρ είναι $E(\rho) = 2\pi\rho^2 + \frac{2}{\rho}, \quad \rho > 0.$

β) Η συνάρτηση $E(\rho) = 2\pi\rho^2 + \frac{2}{\rho}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με

$$E'(\rho) = 4\pi\rho - \frac{2}{\rho^2}. \text{ Είναι}$$

$$E'(\rho) = 0 \Leftrightarrow 4\pi\rho - \frac{2}{\rho^2} = 0 \Leftrightarrow 4\pi\rho^3 = 2 \Leftrightarrow \rho^3 = \frac{1}{2\pi} \Leftrightarrow \rho = \frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}} \text{ και}$$

$$E'(\rho) > 0 \Leftrightarrow 4\pi\rho - \frac{2}{\rho^2} > 0 \Leftrightarrow 4\pi\rho^3 > 2 \Leftrightarrow \rho^3 > \frac{1}{2\pi} \Leftrightarrow \rho > \frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}.$$

Συνεπώς η συνάρτηση $E'(\rho) = 4\pi\rho - \frac{2}{\rho^2}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[\frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}, +\infty)$ και

γνησίως φθίνουσα στο $(0, \frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}]$ και επομένως παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για

$$\rho = \frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}.$$

Από την (1) για $\rho = \frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}$ έχουμε ότι $v = \frac{1}{\pi \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}} \right)^2} = \frac{\frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}}{\pi \cdot \frac{1}{2\pi}} = \frac{2}{\sqrt[3]{2\pi}} = 2\rho$.

γ)

i. Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΒΔ έχουμε ότι $\Delta B^2 = \Delta A^2 + AB^2 = \rho^2 + v^2$.

Συνεπώς η απόσταση ΔΒ ως συναρτήσει της πλευράς ρ είναι

$$d(\rho) = \sqrt{\rho^2 + \frac{1}{\pi^2 \rho^4}}, \rho > 0.$$

ii. Η συνάρτηση $d(\rho) = \sqrt{\rho^2 + \frac{1}{\pi^2 \rho^4}}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με

$$d'(\rho) = \frac{2\rho - \frac{4\rho^3}{\pi^2 \rho^8}}{2\sqrt{\rho^2 + \frac{1}{\pi^2 \rho^4}}} = \frac{\rho - \frac{2}{\pi^2 \rho^5}}{\sqrt{\rho^2 + \frac{1}{\pi^2 \rho^4}}} = \frac{\pi^2 \rho^6 - 2}{\pi^2 \rho^5 \sqrt{\rho^2 + \frac{1}{\pi^2 \rho^4}}}. \text{ Είναι}$$

$$d'(\rho) = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi^2 \rho^6 - 2}{\pi^2 \rho^5 \sqrt{\rho^2 + \frac{1}{\pi^2 \rho^4}}} = 0 \Leftrightarrow \rho^6 = \frac{2}{\pi^2} \stackrel{\rho > 0}{\Leftrightarrow} \rho = \sqrt[6]{\frac{2}{\pi^2}} \text{ και}$$

$$d'(\rho) > 0 \Leftrightarrow \frac{\pi^2 \rho^6 - 2}{\pi^2 \rho^5 \sqrt{\rho^2 + \frac{1}{\pi^2 \rho^4}}} > 0 \Leftrightarrow \rho^6 > \frac{2}{\pi^2} \stackrel{\rho > 0}{\Leftrightarrow} \rho > \sqrt[6]{\frac{2}{\pi^2}}.$$

Συνεπώς η συνάρτηση $d(\rho) = \sqrt{\rho^2 + \frac{1}{\pi^2 \rho^4}}$ είναι γνησίως αύξουσα στο

$[\sqrt[6]{\frac{2}{\pi^2}}, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $(0, \sqrt[6]{\frac{2}{\pi^2}}]$ και επομένως παρουσιάζει

ολικό ελάχιστο για $\rho = \sqrt[6]{\frac{2}{\pi^2}}$. Για $\rho = \sqrt[6]{\frac{2}{\pi^2}}$ είναι

$$v = \frac{1}{\pi \rho^2} = \frac{1}{\pi \left(\sqrt[6]{\frac{2}{\pi^2}} \right)^2} = \frac{1}{\pi^3 \sqrt[3]{\frac{2}{\pi^2}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{\pi^3 \frac{2}{\pi^2}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}} \text{ και}$$

$$(AB\Gamma\Delta) = \rho \cdot v = \sqrt[6]{\frac{2}{\pi^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}} = \sqrt[6]{\frac{2}{\pi^2}} \cdot \sqrt[6]{\frac{1}{4\pi^2}} = \sqrt[6]{\frac{2}{4\pi^3}} = \sqrt[6]{\frac{1}{2\pi^3}}$$

Θέμα 25^ο

Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και κοίλη να αποδείξετε ότι : $2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) > f(\alpha) + f(\beta)$

Λύση

Αφού η f είναι κοίλη στο $[\alpha, \beta]$ η f' θα είναι γνησίως φθίνουσα στο $[\alpha, \beta]$

Από Θ.Μ.Τ για την f στο $[\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}]$ υπάρχει $\xi_1 \in (\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2})$ με

$$f'(\xi_1) = \frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\alpha)}{\frac{\alpha+\beta}{2} - \alpha} = \frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\alpha)}{\frac{\beta - \alpha}{2}}$$

Από Θ.Μ.Τ για την f στο $[\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta]$ υπάρχει $\xi_2 \in (\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta)$ με

$$f'(\xi_2) = \frac{f(\beta) - f(\frac{\alpha+\beta}{2})}{\beta - \frac{\alpha+\beta}{2}} = \frac{f(\beta) - f(\frac{\alpha+\beta}{2})}{\frac{\beta-\alpha}{2}} \quad . \text{ Όμως}$$

$$\xi_1 < \xi_2 \stackrel{f' \downarrow}{\Rightarrow} f'(\xi_1) > f'(\xi_2) \Rightarrow \frac{f(\frac{\alpha+\beta}{2}) - f(\alpha)}{\frac{\beta-\alpha}{2}} > \frac{f(\beta) - f(\frac{\alpha+\beta}{2})}{\frac{\beta-\alpha}{2}} \stackrel{\beta > \alpha}{\Rightarrow}$$

$$f(\frac{\alpha+\beta}{2}) - f(\alpha) > f(\beta) - f(\frac{\alpha+\beta}{2}) \Rightarrow 2f(\frac{\alpha+\beta}{2}) > f(\alpha) + f(\beta)$$

Θέμα 26°

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln x}{x}, x > 0$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Να αποδείξετε ότι $2022^{2023} > 2023^{2022}$.

γ) Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα και τα σημεία καμπής.

δ) Να αποδείξετε ότι $2f(2022) < f(2021) + f(2023)$.

Λύση

α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$ και άρα και συνεχής.

Είναι $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1 - \ln x}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$ και

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{1 - \ln x}{x^2} > 0 \Leftrightarrow \ln x < 1 \Leftrightarrow 0 < x < e.$$

x	0	e	$+\infty$
$f'(x)$		$\circ$	
$f(x)$			

Συνεπώς η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, e]$, γνησίως φθίνουσα στο $[e, +\infty)$ και

παρουσιάζει μέγιστο για $x = e$ το $f(e) = \frac{\ln e}{e} = \frac{1}{e}$.

Επειδή $e < 2022 < 2023$ και f γνησίως φθίνουσα στο $[e, +\infty)$ είναι

$$\begin{aligned}
 f(2022) &> f(2023) \Leftrightarrow \\
 \frac{\ln 2022}{2022} &> \frac{\ln 2023}{2023} \Leftrightarrow \\
 2023 \ln 2022 &> 2022 \ln 2023 \Leftrightarrow \\
 \ln 2022^{2023} &> \ln 2023^{2022} \Leftrightarrow \\
 2022^{2023} &> 2023^{2022}
 \end{aligned}$$

γ) Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με

$$f''(x) = \frac{-x - 2x(1 - \ln x)}{x^4} = \frac{2x \ln x - 3x}{x^4} = \frac{2 \ln x - 3}{x^3}.$$

$$\text{Είναι } f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2 \ln x - 3}{x^3} = 0 \Leftrightarrow \ln x = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = e^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow x = \sqrt{e^3} \text{ και}$$

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{2 \ln x - 3}{x^3} > 0 \stackrel{x>0}{\Leftrightarrow} \ln x > \frac{3}{2} \Leftrightarrow x > e^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow x > \sqrt{e^3}.$$

x	0	$\sqrt{e^3}$	$+\infty$
$f''(x)$		$\circ$	
$f(x)$			

Συνεπώς η f είναι κυρτή στο $(0, e]$, κοίλη στο $[e, +\infty)$ έχει και σημείο καμπής το $(\sqrt{e^3}, f(\sqrt{e^3}))$ δηλαδή το $(\sqrt{e^3}, \frac{3}{2\sqrt{e^3}})$.

δ) Από Θ.Μ.Τ για την f στο $[2021, 2022]$ υπάρχει $\xi_1 \in (2021, 2022)$ με

$$f'(\xi_1) = \frac{f(2022) - f(2021)}{2022 - 2021} = f(2022) - f(2021).$$

Από Θ.Μ.Τ για την f στο $[2022, 2023]$ υπάρχει $\xi_2 \in (2022, 2023)$ με

$$f'(\xi_2) = \frac{f(2023) - f(2022)}{2023 - 2022} = f(2023) - f(2022).$$

Επειδή $\sqrt{e^3} < 2021 < \xi_1 < 2022 < \xi_2$ και f' γνησίως αύξουσα στο $[\sqrt{e^3}, +\infty)$ είναι

$$f'(\xi_1) < f'(\xi_2) \Leftrightarrow f(2022) - f(2021) < f(2023) - f(2022) \Leftrightarrow 2f(2022) < f(2023) + f(2021)$$

Θέμα 27°

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + \frac{x^3}{6}$. Να αποδείξετε ότι

α) η f'' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β) η f έχει ένα ακριβώς σημείο καμπής $K(x_0, f(x_0))$ με $x_0 \in (-1, -\frac{1}{2})$ που βρίσκεται στο 2ο τεταρτημόριο.

γ) η εφαπτομένη στο K έχει εξίσωση $y = (-x_0 + \frac{x_0^2}{2})x + x_0^2 - \frac{x_0^3}{3} - x_0$.

δ) $\frac{1}{e} - \frac{1}{6} < \frac{x_0^2}{2} - \frac{x_0^3}{3}$.

Λύση

α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως άθροισμα παραγωγισίμων με $f'(x) = e^x + \frac{x^2}{2}$

Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως άθροισμα παραγωγισίμων με $f''(x) = e^x + x$.

Η f'' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως άθροισμα παραγωγισίμων με

$f^{(3)}(x) = e^x + 1 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε η f'' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β) Είναι $f''(-1) = e^{-1} - 1 = \frac{1}{e} - 1 < 0$ και $f''(-\frac{1}{2}) = e^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{e}} - \frac{1}{2} = \frac{2 - \sqrt{e}}{2\sqrt{e}} > 0$.

Από θεώρημα Bolzano για την f'' στο $[-1, -\frac{1}{2}]$ υπάρχει $x_0 \in (-1, -\frac{1}{2})$ με $f''(x_0) = 0$

και λόγω μονοτονίας μοναδικό.

Επίσης, αφού f'' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, έχουμε ότι για κάθε $x < x_0$ είναι

$f''(x) < f''(x_0) \Leftrightarrow f''(x) < 0$ και άρα η f είναι κοίλη στο $(-\infty, x_0]$, ενώ για κάθε

$x > x_0$ είναι $f''(x) > f''(x_0) \Leftrightarrow f''(x) > 0$ και άρα η f είναι κυρτή στο $[x_0, +\infty)$.

Συνεπώς η f έχει ένα ακριβώς σημείο καμπής $K(x_0, f(x_0))$ με $x_0 \in (-1, -\frac{1}{2})$.

Είναι $f''(x_0) = 0 \Leftrightarrow e^{x_0} + x_0 = 0 \Leftrightarrow e^{x_0} = -x_0$ οπότε

$f(x_0) = e^{x_0} + \frac{x_0^3}{6} = -x_0 + \frac{x_0^3}{6} = \frac{x_0^3 - 6x_0}{6} = \frac{x_0(x_0^2 - 6)}{6} > 0$, αφού $x_0 \in (-1, -\frac{1}{2})$ οπότε

$x_0 < 0$ και $x_0^2 < 6$. Συνεπώς το σημείο καμπής $K(x_0, f(x_0))$ έχει αρνητική

τετμημένη και θετική τεταγμένη, οπότε βρίσκεται στο 2^ο τεταρτημόριο.

γ) η εφαπτομένη στο K έχει εξίσωση $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ και αφού

$f(x_0) = -x_0 + \frac{x_0^3}{6}$ και $f'(x_0) = e^{x_0} + \frac{x_0^2}{2} = -x_0 + \frac{x_0^2}{2}$, έχουμε ότι η ζητούμενη

εφαπτομένη έχει τελικά εξίσωση:

$$y + x_o - \frac{x_o^3}{6} = (-x_o + \frac{x_o^2}{2})(x - x_o) \Leftrightarrow$$

$$y = (-x_o + \frac{x_o^2}{2})x + x_o^2 - \frac{x_o^3}{2} - x_o + \frac{x_o^3}{6} \Leftrightarrow$$

$$y = (-x_o + \frac{x_o^2}{2})x + x_o^2 - \frac{x_o^3}{3} - x_o$$

δ) Η f είναι κοίλη στο $(-\infty, x_o]$, οπότε η C_f είναι κάτω από κάθε εφαπτομένη της στο $(-\infty, x_o]$ με εξαίρεση το σημείο επαφής. Συνεπώς

$f(x) < (-x_o + \frac{x_o^2}{2})x + x_o^2 - \frac{x_o^3}{3} - x_o$ για κάθε $x < x_o$, οπότε για $x = -1$ έχουμε

$$f(-1) < (-x_o + \frac{x_o^2}{2})(-1) + x_o^2 - \frac{x_o^3}{3} - x_o \Leftrightarrow$$

$$e^{-1} + \frac{(-1)^3}{6} < x_o - \frac{x_o^2}{2} + x_o^2 - \frac{x_o^3}{3} - x_o \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{e} - \frac{1}{6} < \frac{x_o^2}{2} - \frac{x_o^3}{3}$$

Θέμα 28°

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - \ln x$. Να αποδείξετε ότι

α) η f είναι κυρτή.

β) η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο σε κάποιο $x_o \in (\frac{1}{2}, 1)$.

γ) το ολικό ελάχιστο είναι το $\frac{1}{x_o} - \ln x_o = e^{x_o} + x_o = \frac{1}{x_o} + x_o$.

Λύση

α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ ως άθροισμα παραγωγισίμων με

$f'(x) = e^x - \frac{1}{x}$. Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ ως άθροισμα παραγωγισίμων

με $f''(x) = e^x + \frac{1}{x^2} > 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$, οπότε η f είναι κυρτή.

β) Η f είναι κυρτή οπότε η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$. Επίσης

$$f'(1) = e - 1 > 0 \text{ και } f'\left(\frac{1}{2}\right) = e^{\frac{1}{2}} - 2 < 0.$$

Από θεώρημα Bolzano για την f' στο $[\frac{1}{2}, 1]$ υπάρχει $x_0 \in (\frac{1}{2}, 1)$ με $f'(x_0) = 0$ και λόγω μονοτονίας μοναδικό.

Επίσης, αφού f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$, έχουμε ότι για κάθε $0 < x < x_0$ είναι $f'(x) < f'(x_0) \Leftrightarrow f'(x) < 0$ και άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, x_0]$, ενώ για κάθε $x > x_0$ είναι $f'(x) > f'(x_0) \Leftrightarrow f'(x) > 0$ και άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_0, +\infty)$. Συνεπώς η f παρουσιάζει ένα ακριβώς ακρότατο και μάλιστα ολικό ελάχιστο σε κάποιο $x_0 \in (\frac{1}{2}, 1)$.

$$\gamma) \text{ Είναι } f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow e^{x_0} - \frac{1}{x_0} = 0 \Leftrightarrow e^{x_0} = \frac{1}{x_0} \Leftrightarrow x_0 = \ln \frac{1}{x_0} \Leftrightarrow x_0 = -\ln x_0.$$

Το ολικό ελάχιστο είναι το $f(x_0) = e^{x_0} - \ln x_0$. Δείξαμε παραπάνω ότι $e^{x_0} = \frac{1}{x_0}$ και

$$x_0 = -\ln x_0 \text{ οπότε } f(x_0) = e^{x_0} - \ln x_0 = \frac{1}{x_0} - \ln x_0 = e^{x_0} + x_0 = \frac{1}{x_0} + x_0.$$

Θέμα 29°

Δίνεται η πολυωνυμική συνάρτηση $P(x) = x^3 + 3x^2 - \lambda x + 1$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η $P(x)$ παρουσιάζει σημείο καμπής για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου καμπής K και να αποδείξετε ότι, για τις διάφορες τιμές του λ , το K κινείται σε σταθερή ευθεία παράλληλη στον άξονα yy' .

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η $P(x)$ παρουσιάζει τοπικά ακρότατα και να προσδιορίσετε το είδος τους.

δ) Αν η f παρουσιάζει δυο τοπικά ακρότατα και x_1, x_2 είναι οι θέσεις των τοπικών ακροτάτων, να αποδείξετε ότι το K είναι το μέσο των σημείων $A(x_1, P(x_1)), B(x_2, P(x_2))$, για όλες τις τιμές του λ που βρήκατε στο γ) ερώτημα.

Λύση

α) Η συνάρτηση $P(x)$ είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική με $P'(x) = 3x^2 + 6x - \lambda$.

Η συνάρτηση $P'(x)$ είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική με $P''(x) = 6x + 6$.

Το πρόσημο της $P''(x)$ φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$P''(x)$	-	0	+
$P(x)$	↷		↶

Παρατηρούμε ότι η $P(x)$ είναι κοίλη στο $(-\infty, -1]$ και κυρτή στο $[-1, +\infty)$, οπότε παρουσιάζει καμπή στο -1 για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

β) Το σημείο καμπής είναι το $K(-1, P(-1))$, δηλαδή το $K(-1, \lambda + 3)$ και καθώς το λ μεταβάλλεται, η τετμημένη του παραμένει σταθερή και ίση με -1 , οπότε κινείται στην σταθερή ευθεία $x = -1$ που είναι παράλληλη στον άξονα yy' .

γ) Η $P'(x)$ είναι πολυωνυμική 2^{ου} βαθμού με διακρίνουσα $\Delta = 36 + 12\lambda$ και $\alpha = 3 > 0$.

Αν $\lambda < -3$ τότε $\Delta < 0$ και αφού $\alpha = 3 > 0$ είναι $P'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε η $P(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και δεν έχει ακρότατα.

Αν $\lambda = -3$ τότε $\Delta = 0$ και αφού $\alpha = 3 > 0$ είναι $P'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{-3\}$, οπότε η $P(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και δεν έχει ακρότατα.

Αν $\lambda > -3$ τότε $\Delta > 0$ οπότε η $P'(x)$ έχει δύο ρίζες άνισες τις x_1, x_2 (έστω $x_1 < x_2$) και αφού $\alpha = 3 > 0$ το πρόσημο της φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$		
P'(x)	+	o	-	o	+	
P(x)		↗		↘		↗

Συνεπώς η $P(x)$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x_1 και τοπικό ελάχιστο στο x_2 .

δ) Για να είναι το $K(-1, \lambda + 3)$ το μέσο των σημείων $A(x_1, P(x_1)), B(x_2, P(x_2))$, για

κάθε $\lambda > -3$, πρέπει και αρκεί $\frac{x_1 + x_2}{2} = -1$ και $\frac{P(x_1) + P(x_2)}{2} = \lambda + 3$.

Όμως x_1, x_2 είναι ρίζες της $P'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 6x - \lambda = 0$ οπότε από τον τύπο για το

άθροισμα των ριζών έχουμε ότι $x_1 + x_2 = \frac{-\beta}{\alpha} = \frac{-6}{3} = -2$, οπότε πράγματι

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-2}{2} = -1. \text{ Επίσης}$$

$$\begin{aligned} P(x_1) + P(x_2) &= \\ x_1^3 + 3x_1^2 - \lambda x_1 + 1 + x_2^3 + 3x_2^2 - \lambda x_2 + 1 &= \\ (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2) + 3x_1^2 - \lambda x_1 + 3x_2^2 - \lambda x_2 + 2 &= \\ -2(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2) + 3x_1^2 - \lambda x_1 + 3x_2^2 - \lambda x_2 + 2 &= \\ -2x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_2^2 + 3x_1^2 - \lambda x_1 + 3x_2^2 - \lambda x_2 + 2 &= \\ x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - \lambda(x_1 + x_2) + 2 &= \\ (x_1 + x_2)^2 - \lambda(x_1 + x_2) + 2 &= \\ (-2)^2 - \lambda(-2) + 2 &= \\ 2\lambda + 6 \end{aligned}$$

$$\text{οπότε πράγματι } \frac{P(x_1) + P(x_2)}{2} = \frac{2\lambda + 6}{2} = \lambda + 3.$$

Συνεπώς πράγματι το K είναι το μέσο των σημείων $A(x_1, P(x_1)), B(x_2, P(x_2))$, για κάθε $\lambda > -3$.

Σημείωση:

Η πολυωνυμική συνάρτηση $P(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$ με $\alpha \neq 0$, παρουσιάζει πάντα σημείο καμπής, παρουσιάζει δύο τοπικά ακρότατα (ένα μέγιστο και ένα ελάχιστο) αν και μόνο αν $\beta^2 > 3\alpha\gamma$ και με την προϋπόθεση αυτή, το σημείο καμπής είναι πάντα μέσο των σημείων της γραφικής παράστασης της $P(x)$ με τετμημένες τις θέσεις ακροτάτων.

Θέμα 30°

α) Να βρείτε τις τιμές του α για τις οποίες η $f(x) = x^4 + \alpha x^3 + 2x^2 + x - 1$ είναι κυρτή.

β) Για ποιες τιμές του κ η συνάρτηση $f(x) = x^3 + \kappa x^2 + 1$ έχει σημείο καμπής για $x = 1$;

Λύση

α) Η συνάρτηση f είναι 2 φορές παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική με

$$f'(x) = 4x^3 + 3\alpha x^2 + 4x + 1 \quad \text{και} \quad f''(x) = 12x^2 + 6\alpha x + 4$$

Αφού η f είναι κυρτή η f' είναι γνησίως αύξουσα οπότε θα πρέπει $f''(x) \geq 0$

αρκεί η ισότητα να ισχύει για μεμονωμένα σημεία του πεδίου ορισμού και όχι για ολόκληρο διάστημα .

Έτσι αφού η f'' είναι τριώνυμο ως προς x με $a=12>0$ θα πρέπει να έχει

$$\Delta \leq 0 \Rightarrow 36\alpha^2 - 192 \leq 0 \Rightarrow 36\alpha^2 \leq 192 \Rightarrow \alpha^2 \leq \frac{16}{3} \Rightarrow \alpha \in \left[-\frac{4\sqrt{3}}{3}, \frac{4\sqrt{3}}{3}\right]$$

β) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική με $f'(x) = 3x^2 + 2\kappa x$

και $f''(x) = 6x + 2\kappa$. Αφού η f παρουσιάζει καμπή στο 1 θα πρέπει

$$f''(1) = 0 \Leftrightarrow 6 + 2\kappa = 0 \Leftrightarrow \kappa = -3$$

Για $\kappa = -3$ είναι $f''(x) = 6x - 6$ και η f παρουσιάζει καμπή στο 1 αφού η $f''(x) = 6x - 6$ αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του 1 .

Θέμα 31°

Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο, για την οποία ισχύει $(x^2 - 1)f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι

α) $f(1) = f(-1) = 0$.

β) $f'(1) \geq 0$ και $f'(-1) \leq 0$.

γ) η f δεν είναι κοίλη.

Λύση

α) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = (x^2 - 1)f(x)$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως γινόμενο παραγωγισίμων. Παρατηρούμε ότι $g(1) = g(-1) = 0$ οπότε από τη σχέση $(x^2 - 1)f(x) \geq 0 \Leftrightarrow g(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση g παρουσιάζει και στο 1 και στο -1 ελάχιστο το 0. Συνεπώς από το θεώρημα Fermat έχουμε ότι $g'(1) = g'(-1) = 0$. Όμως $g'(x) = 2xf(x) + (x^2 - 1)f'(x)$ οπότε $g'(1) = 0 \Leftrightarrow f(1) = 0$ και $g'(-1) = 0 \Leftrightarrow f(-1) = 0$.

β) Η f είναι παραγωγίσιμη στο 1 και στο -1 με $f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x - 1}$

$$\text{και } f'(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{x + 1}.$$

Για κάθε $x \neq 1$ έχουμε $\frac{(x^2-1)f(x)}{(x-1)^2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)(x+1)f(x)}{(x-1)^2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x+1)f(x)}{x-1} \geq 0$

οπότε από όριο και διάταξη έχουμε ότι $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)f(x)}{x-1} \geq 0$ δηλαδή $2f'(1) \geq 0$ και

τελικά $f'(1) \geq 0$.

Ομοίως για κάθε $x \neq -1$ έχουμε

$\frac{(x^2-1)f(x)}{(x+1)^2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)(x+1)f(x)}{(x+1)^2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)f(x)}{x+1} \geq 0$ οπότε από όριο και

διάταξη έχουμε ότι $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x-1)f(x)}{x+1} \geq 0$ δηλαδή $-2f'(-1) \geq 0$ και τελικά $f'(-1) \leq 0$.

γ) Αφού $-1 < 1$ και $f'(-1) \leq 0 \leq f'(1)$ συμπεραίνουμε ότι η f' δεν είναι γνησίως φθίνουσα και κατ' επέκταση η f δεν είναι κοίλη.

Θέμα 32°

Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη, για την οποία ισχύει $f(x) \geq x^2 - x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(1) = 1$.

α) Να αποδείξετε ότι

i. η συνάρτηση f δεν έχει ασύμπτωτες.

ii. $f'(1) = 1$

β) Αν επιπλέον υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ με $f(x_0) = \frac{3}{4}$ τότε να αποδείξετε ότι

i. $f'(x_0) = 0$.

ii. $x_0 = \frac{1}{2}$

iii. η f δεν είναι ούτε γνησίως φθίνουσα ούτε κοίλη.

Λύση

α)

i. Για $x > 0$ είναι $\frac{f(x)}{x} \geq x - 1 + \frac{1}{x}$ και αφού $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 1 + \frac{1}{x}) = +\infty$ είναι και

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ οπότε η συνάρτηση f δεν έχει ασύμπτωτες στο $+\infty$.

Επίσης για $x < 0$ είναι $\frac{f(x)}{x} \leq x - 1 + \frac{1}{x}$ και αφού $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x - 1 + \frac{1}{x}) = -\infty$ είναι και

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$ οπότε η συνάρτηση f δεν έχει ασύμπτωτες στο $-\infty$.

Τέλος η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη και άρα συνεχής στο $\mathbb{R}$ οπότε δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

Τελικά η συνάρτηση f δεν έχει ασύμπτωτες.

ii. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - x^2 + x - 1$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις παραγωγισίμων. Παρατηρούμε ότι $g(1) = f(1) - 1 + 1 - 1 = 0$ οπότε από τη σχέση $f(x) \geq x^2 - x + 1 \Leftrightarrow g(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση g παρουσιάζει στο 1 ελάχιστο το 0. Συνεπώς από το θεώρημα Fermat έχουμε ότι $g'(1) = 0$. Όμως $g'(x) = f'(x) - 2x + 1$ οπότε $g'(1) = 0 \Leftrightarrow f'(1) - 2 + 1 = 0 \Leftrightarrow f'(1) = 1$.

Εναλλακτικά, η f είναι παραγωγίσιμη στο 1 με

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - 1}{x - 1}$$

Για κάθε $x > 1$ έχουμε $f(x) \geq x^2 - x + 1 \Leftrightarrow f(x) - 1 \geq x(x - 1) \Leftrightarrow \frac{f(x) - 1}{x - 1} \geq x$

οπότε από όριο και διάταξη έχουμε ότι $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - 1}{x - 1} \geq \lim_{x \rightarrow 1^+} x$ δηλαδή $f'(1) \geq 1$.

Ομοίως για κάθε $x < 1$ έχουμε

$$f(x) \geq x^2 - x + 1 \Leftrightarrow f(x) - 1 \geq x(x - 1) \Leftrightarrow \frac{f(x) - 1}{x - 1} \leq x \quad \text{οπότε από όριο και}$$

διάταξη έχουμε ότι $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - 1}{x - 1} \leq \lim_{x \rightarrow 1^-} x$ δηλαδή $f'(1) \leq 1$.

Αφού δείξαμε ότι $f'(1) \geq 1$ και $f'(1) \leq 1$ συμπεραίνουμε ότι $f'(1) = 1$

β)

i. Είναι $x^2 - x + 1 \geq \frac{3}{4} \Leftrightarrow x^2 - x + \frac{1}{4} \geq 0 \Leftrightarrow (x - \frac{1}{2})^2 \geq 0$ που ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$

οπότε αφού $f(x) \geq x^2 - x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f(x) \geq \frac{3}{4} \Leftrightarrow f(x) \geq f(x_0)$ για

κάθε $x \in \mathbb{R}$ που σημαίνει ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει στο x_0 ελάχιστο το

$f(x_0) = \frac{3}{4}$. Συνεπώς από το θεώρημα Fermat έχουμε ότι $f'(x_0) = 0$.

ii. Για κάθε $x \neq \frac{1}{2}$ είναι $f(x) \geq x^2 - x + 1 > \frac{3}{4}$ αφού όπως δείξαμε παραπάνω

$$x^2 - x + 1 \geq \frac{3}{4} \Leftrightarrow (x - \frac{1}{2})^2 \geq 0 \text{ οπότε για κάθε } x \neq \frac{1}{2} \text{ είναι } x^2 - x + 1 > \frac{3}{4}$$

Συνεπώς αφού $f(x_0) = \frac{3}{4}$ θα πρέπει $x_0 = \frac{1}{2}$.

iii. Αφού $x_0 = \frac{1}{2} < 1$ και $f'(x_0) = 0 < f'(1)$ συμπεραίνουμε ότι η f' δεν είναι

γνησίως φθίνουσα και κατ' επέκταση η f δεν είναι κοίλη.

Επίσης αφού $x_0 = \frac{1}{2} < 1$ και $f(x_0) = \frac{3}{4} < f(1)$ συμπεραίνουμε ότι η f δεν είναι

γνησίως φθίνουσα.

Συνεπώς η f δεν είναι ούτε γνησίως φθίνουσα ούτε κοίλη.

Θέμα 33°

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

A) Να δείξετε ότι η f είναι κυρτή

B) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της στο σημείο με τετμημένη 1

Γ) Να δείξετε ότι $f(x) \geq \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Λύση

A) Επειδή $f''(x) = \frac{1}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}} > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$

B) Η ευθεία $y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Rightarrow y = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}$ είναι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της με τετμημένη 1.

Γ) Η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ που σημαίνει ότι η γραφική της παράσταση είναι ολόκληρη πάνω από κάθε εφαπτομένη της και άρα και από την $y = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}$

, οπότε $f(x) \geq \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Θέμα 34°

Έστω η συνάρτηση f η οποία είναι 3 φορές παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και για το εσωτερικό σημείο x_0 του Δ ισχύει με $f''(x_0) = 0$ και $f^{(3)}(x_0) > 0$.

Να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει καμπή στο x_0 .

Λύση

Αφού η f είναι 3 φορές παραγωγίσιμη θα δέχεται σίγουρα εφαπτομένη στο x_0 οπότε για να παρουσιάζει καμπή στο x_0 θα πρέπει να αλλάζει κοίλα εκατέρωθεν του x_0 ή ισοδύναμα να αλλάζει πρόσημο η f'' στο x_0 . Είναι

$$f^{(3)}(x_0) > 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f''(x) - f''(x_0)}{x - x_0} > 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f''(x)}{x - x_0} > 0 \Rightarrow \frac{f''(x)}{x - x_0} > 0 \text{ για } x \rightarrow x_0^+$$

και επειδή για $x \rightarrow x_0^+$ είναι $x > x_0$ οπότε και $f''(x) > 0$ για $x \rightarrow x_0^+$. Επίσης

$$f^{(3)}(x_0) > 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f''(x) - f''(x_0)}{x - x_0} > 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f''(x)}{x - x_0} > 0 \Rightarrow \frac{f''(x)}{x - x_0} > 0 \text{ για } x \rightarrow x_0^-$$

και επειδή για $x \rightarrow x_0^-$ είναι $x < x_0$ οπότε και $f''(x) < 0$ για $x \rightarrow x_0^-$.

Τελικά η f'' αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του x_0 και άρα όντως παρουσιάζει καμπή στο x_0

Θέμα 35°

Έστω η συνάρτηση $f(x) = 2\lambda e^x - x^2$, $x \in \mathbb{R}$ και $\lambda > 0$ μια παράμετρος. Να δείξετε ότι για κάθε τιμή του λ η C_f έχει ένα μόνο σημείο καμπής και να βρείτε το γεωμετρικό του τόπο για τις διάφορες τιμές του $\lambda > 0$.

Λύση

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική με $f'(x) = 2\lambda e^x - 2x$

$$\text{και } f''(x) = 2\lambda e^x - 2. \text{ Είναι } f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2\lambda e^x = 2 \Leftrightarrow e^x = \frac{1}{\lambda} \Leftrightarrow x = \ln \frac{1}{\lambda} = -\ln \lambda$$

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow 2\lambda e^x > 2 \Leftrightarrow e^x > \frac{1}{\lambda} \Leftrightarrow x > -\ln \lambda$$

Συνεπώς για κάθε $\lambda > 0$ η C_f έχει ένα μόνο σημείο καμπής το

$(-\ln \lambda, f(-\ln \lambda))$ δηλαδή το $(-\ln \lambda, 2\lambda e^{-\ln \lambda} - 2(-\ln \lambda))$ δηλαδή το $(-\ln \lambda, 2 - 2(-\ln \lambda))$ και Αν θέσουμε $-\ln \lambda = x$ τότε $x \in \mathbb{R}$ και $2 - 2(-\ln \lambda) = 2 - 2x$ που σημαίνει ότι ο γεωμετρικός τόπος του σημείου καμπής είναι η ευθεία $y = 2 - 2x$, $x \in \mathbb{R}$.

Θέμα 36°

Δίνεται συνάρτηση $f:[0,2] \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο $[0,2]$, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,2)$ και ισχύουν $f(1)=1$, $f'(1)=0$ και

$$(f'(x))^2 + f(x) \cdot f''(x) < 0, \text{ για κάθε } x \in (0,2).$$

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (0,2)$.

ii. $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (0,2)$.

β) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

γ) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και να βρείτε τις θέσεις τοπικών ακροτάτων.

Λύση

α)

i. Αν υπήρχε $x_0 \in (0,2)$ με $f(x_0)=0$ τότε από τη δοσμένη σχέση θα είχαμε

$$(f'(x_0))^2 < 0 \text{ το οποίο είναι άτοπο. Συνεπώς } f(x) \neq 0 \text{ για κάθε } x \in (0,2).$$

ii. Αφού f συνεχής στο $(0,2)$ και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (0,2)$ θα διατηρεί πρόσημο σε αυτό και επειδή $f(1)=1>0$ θα είναι $f(x)>0$ για κάθε $x \in (0,2)$.

β) Από τη δοσμένη σχέση και αφού δείξαμε ότι $f(x)>0$ για κάθε $x \in (0,2)$

$$\text{προκύπτει ότι } f''(x) = -\frac{(f'(x))^2}{f(x)} < 0 \text{ για κάθε } x \in (0,2), \text{ οπότε αφού η } f \text{ είναι}$$

συνεχής στο $[0,2]$ είναι κοίλη στο $[0,2]$ και δεν έχει σημεία καμπής.

γ) Αφού f κοίλη στο $[0,2]$ η f' θα είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,2)$ οπότε

για κάθε $0 < x < 1 \Rightarrow \overset{f' \downarrow}{f'(x)} > f'(1) \Rightarrow f'(x) > 0$ και αφού f συνεχής στο $[0,1]$ θα

είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,1]$, ενώ για κάθε $1 < x < 2 \Rightarrow \overset{f' \downarrow}{f'(x)} < f'(1) \Rightarrow f'(x) < 0$

και αφού f συνεχής στο $[1,2]$ θα είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1,2]$.

Συνεπώς η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο 1 και τοπικό ελάχιστο στο 0 και στο 2.

Θέμα 37^ο

Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη για την οποία ισχύει ότι $f'(x) > f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 0$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x > 0$ και $f(x) < 0$ για κάθε $x < 0$

β) Να δείξετε ότι η ευθεία $y = (-\lambda^2 - \lambda - 1)x + \beta$ για οποιαδήποτε $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$ δεν μπορεί να είναι πλάγια ασύμπτωτη της f

γ) Να λυθεί η εξίσωση $f(\eta\mu^2 x + 2) = f(x^2 + 2)$

Λύση

α) Από τη δοσμένη σχέση έχουμε :

$$f'(x) > f(x) \Rightarrow f'(x) - f(x) > 0 \xRightarrow{e^{-x} > 0} e^{-x} f'(x) - e^{-x} f(x) > 0 \Rightarrow (e^{-x} f(x))' > 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = e^{-x} f(x)$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως γινόμενο παραγωγισίμων με $g'(x) = (e^{-x} f(x))' > 0$ όπως δείξαμε παραπάνω, οπότε η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Συνεπώς

$$\text{Για κάθε } x > 0 \xRightarrow{g \uparrow} g(x) > g(0) \Rightarrow e^{-x} f(x) > e^0 f(0) \Rightarrow e^{-x} f(x) > 0 \xRightarrow{e^{-x} > 0} f(x) > 0$$

$$\text{Για κάθε } x < 0 \xRightarrow{g \uparrow} g(x) < g(0) \Rightarrow e^{-x} f(x) < e^0 f(0) \Rightarrow e^{-x} f(x) < 0 \xRightarrow{e^{-x} > 0} f(x) < 0$$

β) Από το προηγούμενο ερώτημα συμπεραίνουμε ότι $\frac{f(x)}{x} > 0$ για κάθε $x \neq 0$

Έστω λοιπόν ότι η ευθεία $y = (-\lambda^2 - \lambda - 1)x + \beta$ ήταν πλάγια ασύμπτωτη της f στο $+\infty$. Τότε θα έπρεπε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\lambda^2 - \lambda - 1$ το οποίο είναι άτοπο αφού

$$\frac{f(x)}{x} > 0 \text{ για κάθε } x \neq 0 \text{ οπότε και } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} > 0 \text{ ενώ}$$

$$-\lambda^2 - \lambda - 1 < 0 \text{ για κάθε } \lambda \in \mathbb{R}, \text{ αφού σαν τριώνυμο ως προς } \lambda \text{ έχει } \Delta < 0 \text{ και } \alpha < 0$$

Συνεπώς δεν μπορεί να είναι η ευθεία αυτή πλάγια ασύμπτωτη της f στο $+\infty$ και όμοια ούτε στο $-\infty$

γ) Αφού $f(x) > 0$ για κάθε $x > 0$ από τη δοσμένη σχέση έχουμε ότι

$f'(x) > f(x) > 0$ που σημαίνει ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ άρα και 1-1 σε αυτό. Είναι $\eta\mu^2 x + 2 > 0$, $x^2 + 2 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ οπότε η εξίσωση γίνεται

$$f(\eta\mu^2 x + 2) = f(x^2 + 2) \xRightarrow{f:1-1} \eta\mu^2 x + 2 = x^2 + 2 \Leftrightarrow \eta\mu^2 x = x^2 \Leftrightarrow |\eta\mu x| = |x| \Leftrightarrow x = 0$$

Θέμα 38°

Έστω συνάρτηση $f:[1,5] \rightarrow \mathbb{R}$, με $f^{(3)}(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [1,5]$ και $f(2) < f(1) < f(5) < f(3)$ για κάποια $x_1, x_2 \in (1,5)$. Να αποδείξετε ότι

- η f παίρνει και μέγιστη και ελάχιστη τιμή.
- υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (1,5)$ με $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = 0$
- υπάρχει ακριβώς ένα $\xi \in (1,5)$ με $f''(\xi) = 0$
- το σημείο $(\xi, f(\xi))$ είναι σημείο καμπής στις παρακάτω περιπτώσεις
 - γνωρίζουμε ότι η $f^{(3)}$ είναι συνεχής
 - δεν γνωρίζουμε αν η $f^{(3)}$ είναι συνεχής

ΛΥΣΗ

α) Η f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[1,5]$ που σημαίνει ότι παίρνει και ελάχιστη και μέγιστη τιμή.

β) Δεδομένου ότι $f(2) < f(1) < f(5) < f(3)$ συμπεραίνουμε ότι την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή τις παίρνει σε εσωτερικά σημεία του $[1,5]$ και όχι στο 1 ή 5. Έστω ότι στο $\xi_1 \in (1,5)$ παίρνει την ελάχιστη τιμή και στο $\xi_2 \in (1,5)$ παίρνει τη μέγιστη. Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο $[1,5]$ άρα και στα ξ_1, ξ_2 από το θεώρημα Fermat έχουμε ότι $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = 0$.

γ) Αποκλείεται να είναι $\xi_1 = \xi_2$ αφού κάτι τέτοιο θα σήμαινε ότι η f είναι σταθερή, πράγμα άτοπο αφού $f(1) \neq f(5)$. Συνεπώς $\xi_1 \neq \xi_2$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε ότι $\xi_1 < \xi_2$.

Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $[\xi_1, \xi_2]$ με $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = 0$. Συνεπώς από το θεώρημα Rolle υπάρχει $\xi \in (\xi_1, \xi_2) \subseteq (1,5)$ με $f''(\xi) = 0$.

Αν η $f''(x)$ είχε και δεύτερη ρίζα στο $(1,5)$ τότε από θεώρημα Rolle θα υπήρχε x_0 στο (α, β) με $f^{(3)}(x_0) = 0$ το οποίο όμως είναι άτοπο αφού $f^{(3)}(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [1,5]$. Τελικά υπάρχει ακριβώς ένα $\xi \in (1,5)$ με $f''(\xi) = 0$.

δ) i) Η f είναι παραγωγίσιμη στο ξ , οπότε ορίζεται εφαπτομένη στο $(\xi, f(\xi))$.

Αρκεί να δείξουμε ότι η $f''(x)$ αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του ξ .

Η $f^{(3)}$ είναι συνεχής και $f^{(3)}(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [1,5]$, οπότε η $f^{(3)}(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $[1,5]$. Αυτό σημαίνει ότι η $f''(x)$ είναι γνησίως μονότονη και άρα αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του ξ .

Αν η $f''(x)$ είναι γνησίως αύξουσα τότε για κάθε $x \in [1, \xi)$ είναι $f''(x) < f''(\xi) \Rightarrow f''(x) < 0$ ενώ για κάθε $x \in (\xi, 5]$ είναι $f''(\xi) < f''(x) \Rightarrow f''(x) > 0$.

Αν η $f''(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα τότε για κάθε $x \in [1, \xi)$ είναι $f''(x) > f''(\xi) \Rightarrow f''(x) > 0$ ενώ για κάθε $x \in (\xi, 5]$ είναι $f''(\xi) > f''(x) \Rightarrow f''(x) < 0$.

Σε κάθε περίπτωση η $f''(x)$ αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του ξ .

ii) Το σημείο $(\xi, f(\xi))$ είναι σημείο καμπής ακόμα και αν δεν γνωρίζουμε ότι η $f^{(3)}$ είναι συνεχής.

Δείξουμε ότι η $f''(x)$ έχει μοναδική ρίζα τη ξ . Δεδομένου ότι είναι συνεχής συνάρτηση (αφού είναι παραγωγίσιμη) και δεν μηδενίζεται σε καθένα από τα διαστήματα $(1, \xi), (\xi, 5)$ διατηρεί σε καθένα από αυτά πρόσημο.

Αρκεί να βρούμε $\eta_1 \in (1, \xi), \eta_2 \in (\xi, 5)$ με $f''(\eta_1), f''(\eta_2)$ ετερόσημες.

Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $[\xi_1, \xi]$ οπότε υπάρχει $\eta_1 \in (\xi_1, \xi) \subseteq (1, \xi)$ με

$$f''(\eta_1) = \frac{f'(\xi_1) - f'(\xi)}{\xi_1 - \xi} = -\frac{f'(\xi)}{\xi_1 - \xi}.$$

Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $[\xi, \xi_2]$ οπότε υπάρχει $\eta_2 \in (\xi, \xi_2) \subseteq (\xi, 5)$ με

$$f''(\eta_2) = \frac{f'(\xi_2) - f'(\xi)}{\xi_2 - \xi} = -\frac{f'(\xi)}{\xi_2 - \xi}. \quad \text{Είναι} \quad f''(\eta_1)f''(\eta_2) = \frac{(f'(\xi))^2}{(\xi - \xi_1)(\xi_2 - \xi)} < 0 \quad \text{αφού}$$

$\xi_1 < \xi < \xi_2$ και $f'(\xi) \neq 0$ αφού αν ήταν $f'(\xi) = 0$, τότε η $f'(x)$ θα είχε τρεις ρίζες, τις ξ_1, ξ, ξ_2 και από Rolle η $f''(x)$ θα είχε δύο ρίζες πράγμα άτοπο.

Αφού $f''(\eta_1)f''(\eta_2) < 0$ έχουμε ότι $f''(\eta_1), f''(\eta_2)$ ετερόσημοι που σημαίνει ότι η $f''(x)$ αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του ξ . Τελικά το $(\xi, f(\xi))$ είναι σημείο καμπής.

Θέμα 39°

Δίνεται η συνάρτηση f , 2 φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, τέτοια ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$: $(f'(x))^3 + 3f'(x) = x^3 + 3x$. Αποδείξτε ότι η f δεν έχει σημεία καμπής.

Λύση

Παραγωγίζοντας τη δοσμένη σχέση $(f'(x))^3 + 3f'(x) = x^3 + 3x$ έχουμε :

$$3(f'(x))^2 \cdot f''(x) + 3f''(x) = 3x^2 + 3 \Leftrightarrow$$

$$(f'(x))^2 \cdot f''(x) + f''(x) = x^2 + 1 \Leftrightarrow$$

$$f''(x)((f'(x))^2 + 1) = x^2 + 1 \Leftrightarrow$$

$$f''(x) = \frac{x^2 + 1}{(f'(x))^2 + 1} > 0$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Άρα f κυρτή στο $\mathbb{R}$ και δεν έχει σημεία καμπής.

Θέμα 40°

Να βρείτε τις ασύμπτωτες κάθε μιας από τις παρακάτω συναρτήσεις.

$$\alpha) f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x-1}, \quad \beta) g(x) = \frac{4x^2-5x+6}{x^2+2x+3}, \quad \gamma) \phi(x) = \begin{cases} 2x^2, & x \geq 0 \\ -\frac{2}{x}, & x < 0 \end{cases}, \quad \delta) h(x) = \frac{\ln x}{e^x}$$

Λύση

$$\alpha) f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x-1} \quad x \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty) \text{ συνεχής}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x-1} = +\infty \text{ οπότε έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη τη } x=1$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x^2(1-\frac{1}{x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x(1-\frac{1}{x})} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x(1-\frac{1}{x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{(1-\frac{1}{x})} = 1 \text{ οπότε έχει οριζόντια}$$

ασύμπτωτη τη $y = 1$ στο $+\infty$.

$$\bullet \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x^2(1-\frac{1}{x})} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x(1-\frac{1}{x})} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x(1-\frac{1}{x})} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{(1-\frac{1}{x})} = -1 \text{ οπότε έχει οριζόντια}$$

ασύμπτωτη τη $y = -1$ στο $-\infty$.

β) $g(x) = \frac{4x^2-5x+6}{x^2+2x+3}$ $x \in \mathbb{R}$ συνεχής οπότε κατακόρυφες ασύμπτωτες δεν έχει.

$$\bullet \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2-5x+6}{x^3+2x^2+3x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2-5x+6}{x^2+2x+3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2}{x^2} = 4 \text{ οπότε έχει οριζόντια ασύμπτωτη τη } y = 4$$

στο $+\infty$.

Ομοίως έχει οριζόντια ασύμπτωτη τη $y = 4$ και στο $-\infty$.

$$\gamma) \phi(x) = \begin{cases} 2x^2, & x \geq 0 \\ \frac{-2}{x}, & x < 0 \end{cases}$$

$$\bullet \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \phi(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-2}{x} = +\infty \text{ οπότε έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη τη } x=0$$

$$\bullet \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\phi(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x}{1} = +\infty \text{ οπότε δεν έχει ασύμπτωτη } +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \phi(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2}{x} = 0 \text{ οπότε έχει οριζόντια ασύμπτωτη τη } y = 0 \text{ (} x x' \text{) στο } -\infty.$$

δ) $h(x) = \frac{\ln x}{e^x}$ $x \in (0, +\infty)$ συνεχής.

$$\bullet \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{e^x} = -\infty \text{ οπότε έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη τη } x=0$$

$$\bullet \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{xe^x} = 0 \text{ οπότε έχει οριζόντια ασύμπτωτη}$$

τη $y = 0$ ($x x'$) στο $+\infty$.

Θέμα 41°

Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \frac{\alpha x^2 + \beta x - 5}{x-1}$. Αν η ευθεία $\psi = x - 2$ είναι ασύμπτωτη της C_g στο $+\infty$ να βρεθούν οι α, β .

Λύση

Πρέπει και αρκεί $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = 1$ και αρκεί $\lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - x) = -2$. Είναι

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha x^2 + \beta x - 5}{x^2 - x} = 1 \Leftrightarrow \alpha = 1 \quad \text{και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\alpha x^2 + \beta x - 5}{x-1} - x \right) = -2 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + \beta x - 5 - x^2 + x}{x-1} = -2 \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\beta+1)x - 5}{x-1} = -2 \Leftrightarrow \beta+1 = -2 \Leftrightarrow \beta = -3$$

Θέμα 42°

Έστω συνάρτηση f για την οποία ξέρουμε ότι η γραφική της παράσταση έχει στο $+\infty$ ασύμπτωτη την ευθεία $y = 2x - 3$. Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - \eta\mu x - x^2 e^{-x}}{x f(x) - 2x^2 - \ln x + x^2 \eta\mu \frac{1}{x}}.$$

Λύση

Το ότι η γραφική της παράσταση έχει στο $+\infty$ ασύμπτωτη την ευθεία

$$y = 2x - 3 \quad \text{σημαίνει ότι} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 2 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x) = -3.$$

$$\text{Είναι} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - \eta\mu x - x^2 e^{-x}}{x f(x) - 2x^2 - \ln x + x^2 \eta\mu \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{f(x)}{x} - \frac{\eta\mu x}{x} - x e^{-x}}{f(x) - 2x - \frac{\ln x}{x} + x \eta\mu \frac{1}{x}} = -1 \quad \text{αφού}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\left| \frac{\eta\mu x}{x} \right| \leq \frac{1}{|x|} \Rightarrow -\frac{1}{|x|} \leq \frac{\eta\mu x}{x} \leq \frac{1}{|x|} \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{|x|} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{|x|} = 0 \quad \text{από κριτήριο}$$

$$\text{παρεμβολής είναι και} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x \eta\mu \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \stackrel{\frac{1}{x}=u}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty \Rightarrow u \rightarrow 0} \frac{\eta\mu u}{u} = 1$$

Θέμα 43°

Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + ax + \beta}, \text{ να έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες τις } \varepsilon : x=2 \text{ και } \zeta : x=3.$$

Λύση

Η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της ως ρητή. Συνεπώς για να έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες τις $\varepsilon : x=2$ και $\zeta : x=3$, θα πρέπει να μην ορίζεται για $x=2$ και για $x=3$. Συνεπώς το τριώνυμο $x^2 + ax + \beta$ θα πρέπει να έχει ρίζες τις $x=2$ και $x=3$ όπου από τους τύπους Vieta βρίσκουμε ότι $\alpha = -5$ και $\beta = 6$.

Θέμα 44°

Να γίνει η μελέτη και η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x + \frac{4}{x^2}$

Λύση

$$f(x) = x + \frac{4}{x^2} \quad x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \text{ συνεχής και παραγωγίσιμη}$$

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x + \frac{4}{x^2} \right) = +\infty$ οπότε έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη τη $x=0$

- $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(x + \frac{4}{x^2} \right) = +\infty$ οπότε έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη τη $x=0$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \frac{4}{x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{4}{x^3} \right) = 1$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \frac{4}{x^2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{x^2} \right) = 0 \text{ οπότε έχει πλάγια ασύμπτωτη τη } y = x \text{ στο } +\infty.$$

Ομοίως έχει πλάγια ασύμπτωτη τη $y = x$ στο $-\infty$.

$$f'(x) = 1 - \frac{8}{x^3}, \quad f''(x) = \frac{24}{x^4}$$

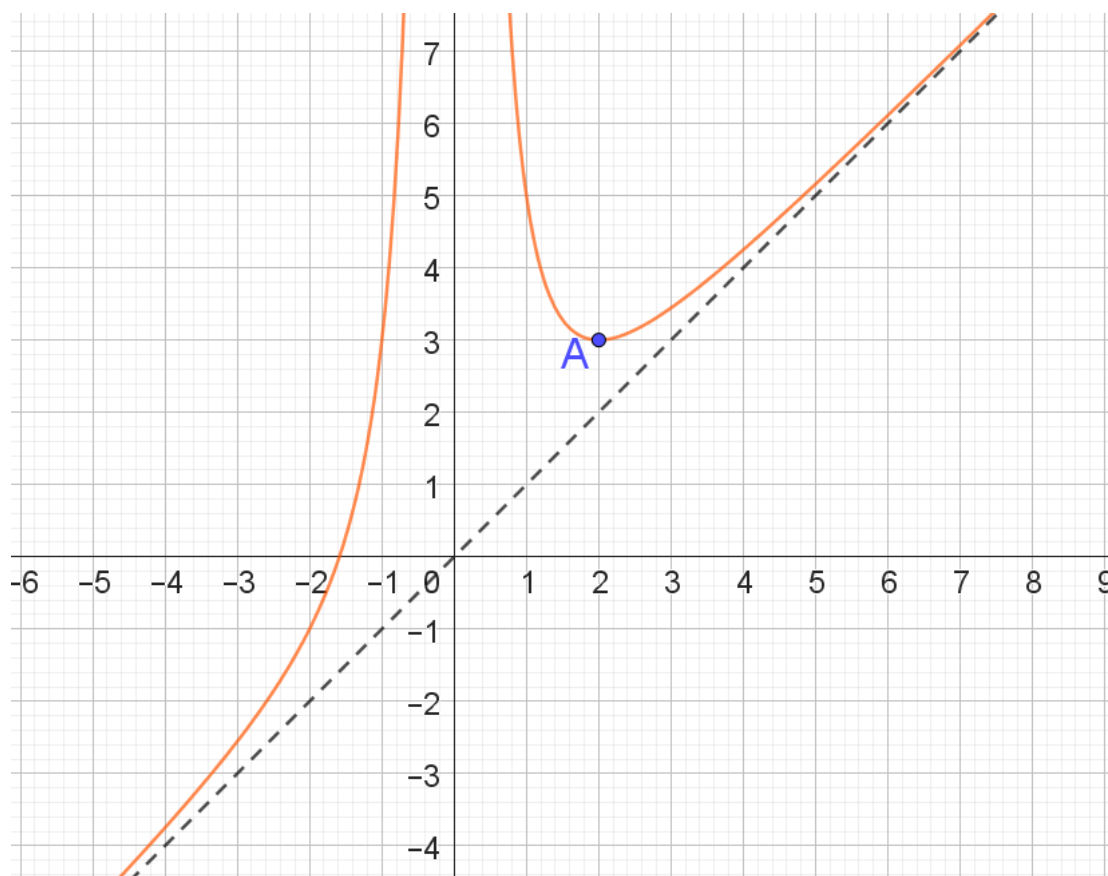
Η f είναι κυρτή και δεν έχει σημεία καμπής.

Είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0)$ και στο $[2, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $(0, 2]$.

$$\text{Παρουσιάζει ελάχιστο στο } 2 \text{ το } f(2) = 2 + \frac{4}{2^2} = 3$$

Το σύνολο τιμών της είναι το $\mathbb{R}$.

Η γραφική της παράσταση δίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Θέμα 45°

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(e^x - x)$

- 1) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της
- 2) Να αποδείξετε ότι η γραφική της παράσταση έχει ακριβώς δύο σημεία καμπής
- 3) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\ln(e^x - x) = \sin x$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα $(0, \frac{\pi}{2})$

Λύση

- 1) Είναι $e^x \geq x+1 > x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ οπότε $D_f = \mathbb{R}$. Η f είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγισίμων με

$$f'(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}$$

Είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

Παρουσιάζει ελάχιστο στο 0 το $f(0) = \ln(e^0 - 0) = \ln 1 = 0$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(e^x - x) = \lim_{u \rightarrow +\infty} \ln u = +\infty$$

$$\alpha\text{φού } \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x - x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(e^x - x) = \lim_{u \rightarrow +\infty} \ln u = +\infty$$

$$\alpha\text{φού } \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{e^x}{x} - 1 \right) = +\infty \text{ διότι } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1} = +\infty$$

Συνεπώς το σύνολο τιμών της είναι το $[0, +\infty)$.

$$2) \text{ Είναι } f''(x) = \frac{e^x(e^x - x) - (e^x - 1)^2}{(e^x - x)^2} = \frac{e^{2x} - xe^x - e^{2x} + 2e^x - 1}{(e^x - x)^2} = \frac{(2-x)e^x - 1}{(e^x - x)^2}$$

Θεωρούμε $g(x) = (2-x)e^x - 1$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$g'(x) = (2-x)e^x - e^x = (1-x)e^x.$$

Η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 1]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[1, +\infty)$.

Παρουσιάζει μέγιστο στο 1 το $g(1) = (2-1)e^1 - 1 = e - 1 > 0$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2-x)e^x - 1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2-x}{e^{-x}} - 1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{-e^{-x}} - 1 = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2-x)e^x - 1 = -\infty$$

Συνεπώς η g έχει ακριβώς δύο ρίζες τις $x_1 \in (-\infty, 1)$ και $x_2 \in (1, +\infty)$.

Αφού g είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 1]$ είναι $g(x) < 0$ για $x \in (-\infty, x_1)$ και

$$g(x) > 0 \text{ για } x \in (x_1, 1).$$

Αφού g είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1, +\infty)$ είναι $g(x) > 0$ για $x \in (1, x_2)$ και

$$g(x) < 0 \text{ για } x \in (x_2, +\infty).$$

Επομένως $f''(x) < 0$ για $x \in (-\infty, x_1)$ και $f''(x) > 0$ για $x \in (x_1, x_2)$ και $f''(x) < 0$ για $x \in (x_2, +\infty)$. Συνεπώς η γραφική παράσταση της f έχει ακριβώς δύο σημεία καμπής στα $x_1 \in (-\infty, 1)$ και $x_2 \in (1, +\infty)$.

3) Θεωρούμε $h(x) = \ln(e^x - x) - \sin x$ η οποία είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ με

$$h(0) = \ln(e^0 - 0) - \sin 0 = -1 < 0 \text{ και } h\left(\frac{\pi}{2}\right) = \ln\left(e^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\pi}{2}\right) - \sin \frac{\pi}{2} = \ln\left(e^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\pi}{2}\right) > 0$$

αφού $e^x \geq x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με το $=$ να ισχύει μόνο για $x = 0$, οπότε για

$$x = \frac{\pi}{2} \text{ είναι } e^{\frac{\pi}{2}} > \frac{\pi}{2} + 1 \Rightarrow e^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\pi}{2} > 1 \text{ και άρα } \ln\left(e^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\pi}{2}\right) > 0. \text{ Συνεπώς από}$$

Θεώρημα Bolzano η $h(x)$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(0, \frac{\pi}{2})$ η οποία είναι και μοναδική διότι $h'(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x} + \eta \mu x > 0$ για $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ που σημαίνει ότι η h είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, \frac{\pi}{2})$.

ΑΕΡΑΚΗΤΣ