

Θέμα 1°

1. Λάθος : πρέπει η f να ορίζεται κοντά στο x_0 δηλαδή σε σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ ή (α, x_0) ή (x_0, β)
2. Λάθος : μπορεί και να μην συμπίπτουν οπότε δεν υπάρχει το όριο
3. Λάθος : μπορεί να υπάρχει το όριο και να μην ισούται με την τιμή της συνάρτησης στο x_0
4. Σωστό : από θεωρία
5. Σωστό : όπου $\varphi(x) = f(x) - l$
6. Λάθος : μπορεί να υπάρχει το όριο του αθροίσματος δύο συναρτήσεων στο x_0 αλλά να μην υπάρχει το όριο μιας εξ αυτών στο x_0
π.χ. $f(x) = \frac{|x|}{x}, g(x) = -\frac{|x|}{x}, x_0 = 0$
7. Λάθος : μπορεί να υπάρχει το όριο του γινομένου δύο συναρτήσεων στο x_0 αλλά να μην υπάρχει το όριο μιας εξ αυτών στο x_0
π.χ. $f(x) = \frac{|x|}{x}, g(x) = x, x_0 = 0$
8. Λάθος : $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{|x|}{x} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{-x}{x} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-1 - 1) = -2$
9. Λάθος : μπορεί να υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)|$ και να μην υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$
Π.χ. $f(x) = \frac{|x|}{x}, x_0 = 0$
10. Σωστό : από θεωρία (στην εκφώνηση το 2004 είναι 2009)
11. Σωστό : από θεωρία
12. Λάθος : αφενός δεν είναι σίγουρο ότι υπάρχει το όριο , αφετέρου και να υπάρχει δεν είναι σίγουρο ότι θα ισούται με την τιμή της συνάρτησης
13. Σωστό : από θεωρία όριο σύνθετης συνάρτησης
14. Λάθος : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu(ax)}{x} \stackrel{ax=u}{=} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\eta\mu u}{\frac{u}{a}} = \lim_{u \rightarrow 0} a \frac{\eta\mu u}{u} = a$
15. Σωστό : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(3x)}{x} \stackrel{3x=u}{=} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(u)}{\frac{u}{3}} = \lim_{u \rightarrow 0} 3 \frac{f(u)}{u} = 3l$
16. Λάθος : μπορεί να μην υπάρχει καν το όριο αλλά ακόμα και αν υπάρχει είναι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq 0$, π.χ. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x}}, x_0 = 0$
17. Λάθος : $\lim_{x \rightarrow x_0} f^2(x) = \lambda^2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{f^2(x)} = \sqrt{\lambda^2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |\lambda|$
18. Σωστό : αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0$ από θεωρία ενώ αν $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0$ τότε αφού $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ για κάθε $x \in D_f$ από κριτήριο παρεμβολής είναι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$

19. Λάθος : αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lambda$ το'τε $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |\lambda|$ από θεωρία , όμως αν $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |\lambda|$ δεν είναι σίγουρο ότι υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, ούτε και ότι αν υπάρχει θα κάνει λ , μπορεί να κάνει και $-\lambda$.
20. Σωστό : $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) < 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - g(x)) < 0$
 οπότε από όριο και διάταξη είναι και $f(x) - g(x) < 0 \Rightarrow f(x) < g(x)$
21. Λάθος : θα είναι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ π.χ $f(x) = -\frac{x}{\sqrt{x}}$, $g(x) = \frac{x}{\sqrt{x}}$, $x_0 = 0$

Θέμα 2°

1 - Δ , 2 - Γ , 3 - Γ , 4 - Δ

Θέμα 3°

- α) $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -2$ β) $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 0$ γ) $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 2$ δ) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 3$
 ε) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1$ στ) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2$ ζ) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 4$

Θέμα 4°

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 5x^2 - 4x - 8}{x^3 + 1} \stackrel{\text{Horner για } x=-1}{=} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x^2 + 4x - 8)}{(x+1)(x^2 - x + 1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 4x - 8}{x^2 - x + 1} = -\frac{11}{3}$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x+5} - 2}{\sqrt{x^2 + 8} - \sqrt{x+10}} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(\sqrt{x+5} - 2)(\sqrt{x+5} + 2)(\sqrt{x^2 + 8} + \sqrt{x+10})}{(\sqrt{x^2 + 8} - \sqrt{x+10})(\sqrt{x^2 + 8} + \sqrt{x+10})(\sqrt{x+5} + 2)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+5-4)(\sqrt{x^2 + 8} + \sqrt{x+10})}{(x^2 + 8 - x - 10)(\sqrt{x+5} + 2)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(\sqrt{x^2 + 8} + \sqrt{x+10})}{(x^2 - x - 2)(\sqrt{x+5} + 2)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(\sqrt{x^2 + 8} + \sqrt{x+10})}{(x+1)(x-2)(\sqrt{x+5} + 2)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x^2 + 8} + \sqrt{x+10}}{(x-2)(\sqrt{x+5} + 2)} = \frac{6}{-3 \cdot 4} = -\frac{1}{2}$$

$$\gamma) \lim_{x \rightarrow -4} \frac{\sqrt[3]{x+12} - 2}{x^2 - 16} = \lim_{x \rightarrow -4} \frac{(\sqrt[3]{x+12} - 2)((\sqrt[3]{x+12})^2 + 2\sqrt[3]{x+12} + 4)}{(x^2 - 16)((\sqrt[3]{x+12})^2 + 2\sqrt[3]{x+12} + 4)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow -4} \frac{(x+12-8)}{(x^2 - 16)((\sqrt[3]{x+12})^2 + 2\sqrt[3]{x+12} + 4)} = \lim_{x \rightarrow -4} \frac{(x+4)}{(x-4)(x+4)((\sqrt[3]{x+12})^2 + 2\sqrt[3]{x+12} + 4)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow -4} \frac{1}{(x-4)((\sqrt[3]{x+12})^2 + 2\sqrt[3]{x+12} + 4)} = \frac{1}{-8 \cdot 12} = -\frac{1}{96}$$

$$\delta) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\chi^4 - 3\eta\mu^4\chi}{8\chi^2\eta\mu^2\chi} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2\chi^4}{\chi^4} - \frac{3\eta\mu^4\chi}{\chi^4}}{\frac{8\chi^2\eta\mu^2\chi}{\chi^4}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - 3\left(\frac{\eta\mu\chi}{x}\right)^4}{8\left(\frac{\eta\mu\chi}{x}\right)^2} = \dots = \frac{2 - 3 \cdot 1^4}{8 \cdot 1^2} = -\frac{1}{8}$$

ε) Αφού $\chi \rightarrow 3$ θεωρούμε ότι $\chi > 1$ οπότε $|1 - \chi| = \chi - 1$. Παίρνουμε πλευρικά όρια και έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2|\chi - 3| + 5|1 - \chi| - 10}{\chi^2 - 9} \stackrel{x \rightarrow 3^-}{=} \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2(3 - x) + 5(x - 1) - 10}{\chi^2 - 9} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{6 - 2x + 5x - 5 - 10}{\chi^2 - 9} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{3x - 9}{\chi^2 - 9} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{3(x - 3)}{(x - 3)(x + 3)} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{3}{x + 3} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2|\chi - 3| + 5|1 - \chi| - 10}{\chi^2 - 9} \stackrel{x \rightarrow 3^+}{=} \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2(x - 3) + 5(x - 1) - 10}{\chi^2 - 9} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2x - 6 + 5x - 5 - 10}{\chi^2 - 9} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{7x - 21}{\chi^2 - 9} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{7(x - 3)}{(x - 3)(x + 3)} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{7}{x + 3} = \frac{7}{6}$$

Συνεπώς αφού τα πλευρικά όρια δεν ισούνται το όριο δεν υπάρχει

Στ) πρόκειται για όριο της μορφής ‘μηδενική επί φραγμένη’. Είναι

$$-1 \leq \eta\mu \frac{1}{2\chi - 6} \leq 1 \Rightarrow \left| \eta\mu \frac{1}{2\chi - 6} \right| \leq 1 \Rightarrow (\chi^2 - 9)^4 \left| \eta\mu \frac{1}{2\chi - 6} \right| \leq (\chi^2 - 9)^4 \Rightarrow$$

$$\left| (\chi^2 - 9)^4 \eta\mu \frac{1}{2\chi - 6} \right| \leq (\chi^2 - 9)^4 \Rightarrow -(\chi^2 - 9)^4 \leq (\chi^2 - 9)^4 \eta\mu \frac{1}{2\chi - 6} \leq (\chi^2 - 9)^4$$

Όμως $\lim_{x \rightarrow 3} (\chi^2 - 9)^4 = \lim_{x \rightarrow 3} -(\chi^2 - 9)^4 = 0$ οπότε από κριτήριο παρεμβολής είναι και

$$\lim_{x \rightarrow 3} \left[(\chi^2 - 9)^4 \eta\mu \frac{1}{2\chi - 6} \right] = 0$$

$$\zeta) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{\chi + 3} - \sqrt{\chi} - 4\chi^2 + 3}{\chi - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\sqrt{\chi + 3} - 2}{\chi - 1} - \frac{\sqrt{\chi} - 1}{x - 1} - \frac{4x^2 - 4}{x - 1} \right) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{(\sqrt{\chi + 3} - 2)(\sqrt{\chi + 3} + 2)}{(\chi - 1)(\sqrt{\chi + 3} + 2)} - \frac{(\sqrt{\chi} - 1)(\sqrt{\chi} + 1)}{(x - 1)(\sqrt{\chi} + 1)} - \frac{4(x^2 - 1)}{x - 1} \right) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x - 1}{(\chi - 1)(\sqrt{\chi + 3} + 2)} - \frac{x - 1}{(x - 1)(\sqrt{\chi} + 1)} - \frac{4(x - 1)(x + 1)}{x - 1} \right) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\sqrt{\chi + 3} + 2} - \frac{1}{\sqrt{\chi} + 1} - \frac{4(x + 1)}{1} \right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 8 = -\frac{33}{4}$$

η) Θέτουμε $\sqrt[12]{x} = u$ οπότε $u^{12} = x$ και $\sqrt{x} = u^6$, $\sqrt[3]{x} = u^4$, $\sqrt[4]{x} = u^3$, $\sqrt[6]{x} = u^2$ και καθώς $x \rightarrow 1$ είναι και $u \rightarrow 1$ οπότε το όριο γίνεται :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - \sqrt[6]{x}}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[4]{x}} = \lim_{u \rightarrow 1} \frac{u^6 - u^2}{u^4 - u^3} = \lim_{u \rightarrow 1} \frac{u^2(u^4 - 1)}{u^3(u - 1)} = \lim_{u \rightarrow 1} \frac{(u^2 + 1)(u + 1)(u - 1)}{u(u - 1)} = \lim_{u \rightarrow 1} \frac{(u^2 + 1)(u + 1)}{u} = 4$$

θ) πρόκειται για όριο της μορφής ‘μηδενική επί φραγμένη’. Είναι

$$-1 \leq \sigma \nu \frac{2}{x} \leq 1 \Rightarrow \left| \sigma \nu \frac{2}{x} \right| \leq 1 \Rightarrow |\eta \mu x| \left| \sigma \nu \frac{2}{x} \right| \leq |\eta \mu x| \Rightarrow$$

$$\left| \eta \mu x \sigma \nu \frac{2}{x} \right| \leq |\eta \mu x| \Rightarrow -|\eta \mu x| \leq \eta \mu x \sigma \nu \frac{2}{x} \leq |\eta \mu x|$$

Όμως $\lim_{x \rightarrow 0} |\eta \mu x| = \lim_{x \rightarrow 0} -|\eta \mu x| = 0$ οπότε από κριτήριο παρεμβολής είναι και

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\eta \mu x \cdot \sigma \nu \frac{2}{x}) = 0$$

Θέμα 5°

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{f(x)(2x^2 - 18)}{g(x)(\sqrt{x+1} - 2)} \cdot \frac{(\sqrt{x+1} - 2)}{(2x^2 - 18)} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow 3} (f(x)(2x^2 - 18))}{\lim_{x \rightarrow 3} (g(x)(\sqrt{x+1} - 2))} \cdot \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{2x^2 - 18} =$$

$$\frac{4}{5} \cdot \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{x+1} - 2)(\sqrt{x+1} + 2)}{2(x^2 - 9)(\sqrt{x+1} + 2)} = \frac{4}{5} \cdot \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{2(x+3)(\sqrt{x+1} + 2)} = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{48} = \frac{1}{60}$$

Θέμα 6°

Πρέπει $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 8$. Είναι

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 8 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3^-} (x + \alpha) = 8 \Rightarrow 3 + \alpha = 8 \Rightarrow \alpha = 5 \quad \text{και}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 8 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3^+} (x^2 + \beta) = 8 \Rightarrow 9 + \beta = 8 \Rightarrow \beta = -1$$

Θέμα 7°

Κατά αρχήν αφού η σχέση ισχύει για κάθε x , θα ισχύει και για $x = 5$, οπότε

$$|f(5) - 2 \cdot 5| \leq (5 - 5)^2 \Rightarrow |f(5) - 10| \leq 0 \Rightarrow f(5) = 10$$

Επίσης η δοσμένη σχέση γίνεται :

$$|f(x) - 2x| \leq (x - 5)^2 \Rightarrow -(x - 5)^2 \leq f(x) - 2x \leq (x - 5)^2 \Rightarrow 2x - (x - 5)^2 \leq f(x) \leq 2x + (x - 5)^2$$

Όμως $\lim_{x \rightarrow 5} (2x - (x - 5)^2) = \lim_{x \rightarrow 5} (2x + (x - 5)^2) = 10$ οπότε από κριτήριο

παρεμβολής είναι και $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 10 = f(5)$

Θέμα 8°

Για $x \neq 0$ η δοσμένη σχέση γίνεται :

$$xf(x) - f^2(x) = x\eta\mu x \Rightarrow \frac{2xf(x)}{x^2} - \frac{f^2(x)}{x^2} = \frac{x\eta\mu x}{x^2} \Rightarrow \frac{2f(x)}{x} - \left(\frac{f(x)}{x}\right)^2 = \frac{\eta\mu x}{x}$$

Από την τελευταία σχέση δεδομένου ότι υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ στο $\mathbb{R}$ και ότι

αφού $x \rightarrow 0$ είναι $x \neq 0$ έχουμε :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2f(x)}{x} - \left(\frac{f(x)}{x} \right)^2 \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} \Rightarrow 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} - \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} \right)^2 = 1 \Rightarrow 2\lambda - \lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow (\lambda - 1)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 1$$

Θέμα 9°

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} f(3-x) \stackrel{3-x=u}{x \rightarrow 2 \Rightarrow u \rightarrow 1} = \lim_{u \rightarrow 1} f(u) = 2$$

Θέμα 10°

Για $x > 0$ η δοσμένη σχέση γίνεται : $\frac{f(x)}{x} < 1 \Rightarrow f(x) < x$ και δεδομένου ότι υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ στο $\mathbb{R}$ είναι $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow 0} x \Rightarrow \lambda \leq 0$ (1)

Για $x < 0$ η δοσμένη σχέση γίνεται : $\frac{f(x)}{x} < 1 \Rightarrow f(x) > x$ και δεδομένου ότι υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ στο $\mathbb{R}$ είναι $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \geq \lim_{x \rightarrow 0} x \Rightarrow \lambda \geq 0$ (2)

Από (1), (2) συμπεραίνουμε ότι $\lambda = 0$.

Θέμα 11°

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{1-x}{x^2+4x+4} = \lim_{x \rightarrow -2} (1-x) \cdot \frac{1}{(x+2)^2} = +\infty \text{ αφού}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} (1-x) = 3, \quad \lim_{x \rightarrow -2} (x+2)^2 = 0 \text{ και } x^2+4x+4 = (x+2)^2 > 0 \text{ για } x \rightarrow -2$$

$$\text{οπότε } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{(x+2)^2} = +\infty$$

β) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{x^2-5x+6}$ το όριο δεν υπάρχει, διότι τα πλευρικά όρια δεν είναι ίσα

$$\text{Συγκεκριμένα } \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x}{x^2-5x+6} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(x \cdot \frac{1}{x^2-5x+6} \right) = +\infty \text{ αφού}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} x = 2, \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 - 5x + 6) = 0 \quad \text{και} \quad x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3) > 0 \quad \text{για} \quad x \rightarrow 2^-$$

$$\text{οπότε} \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{1}{x^2 - 5x + 6} \right) = +\infty$$

$$\text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x}{x^2 - 5x + 6} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(x \cdot \frac{1}{x^2 - 5x + 6} \right) = -\infty \quad \text{αφού}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} x = 2, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 - 5x + 6) = 0 \quad \text{και} \quad x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3) < 0 \quad \text{για} \quad x \rightarrow 2^+$$

$$\text{οπότε} \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{1}{x^2 - 5x + 6} \right) = -\infty$$

$$\gamma) \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2-\pi}{\sin x} \quad \text{το όριο δεν υπάρχει, διότι τα πλευρικά όρια δεν είναι ίσα}$$

$$\text{Συγκεκριμένα} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{2-\pi}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \left((2-\pi) \cdot \frac{1}{\sin x} \right) = -\infty \quad \text{αφού}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (2-\pi) = 2-\pi < 0 \quad (\pi \approx 3,14), \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (\sin x) = 0 \quad \text{και} \quad \sin x > 0 \quad \text{για} \quad x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-$$

$$\text{οπότε} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \left(\frac{1}{\sin x} \right) = +\infty$$

$$\text{και} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{2-\pi}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \left((2-\pi) \cdot \frac{1}{\sin x} \right) = +\infty \quad \text{αφού}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} (2-\pi) = 2-\pi < 0 \quad (\pi \approx 3,14), \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} (\sin x) = 0 \quad \text{και} \quad \sin x < 0 \quad \text{για} \quad x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+$$

$$\text{οπότε} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \left(\frac{1}{\sin x} \right) = -\infty$$

$$\delta) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x-1} \quad \text{το οποίο όριο δεν υπάρχει διότι}$$

$$\text{τα πλευρικά όρια δεν είναι ίσα. Συγκεκριμένα} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left((x+1) \cdot \frac{1}{x-1} \right) = -\infty$$

$$\text{αφού} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} (x+1) = 2, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} (x-1) = 0 \quad \text{και} \quad x-1 < 0 \quad \text{για} \quad x \rightarrow 1^- \quad \text{οπότε} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{1}{x-1} \right) = -\infty$$

$$\text{ενώ} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left((x+1) \cdot \frac{1}{x-1} \right) = +\infty \quad \text{αφού}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (x+1) = 2, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1) = 0 \quad \text{και} \quad x-1 > 0 \quad \text{για} \quad x \rightarrow 1^+ \quad \text{οπότε} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{x-1} \right) = +\infty$$

$$\epsilon) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3x-1}{x-\eta\mu x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left((3x-1) \cdot \frac{1}{x-\eta\mu x} \right) = -\infty \quad \text{αφού}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (3x-1) = -1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} (x-\eta\mu x) = 0, \quad x-\eta\mu x > 0 \quad \text{για} \quad x \rightarrow 0^+ \quad \text{αφού}$$

ξέρουμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $|\eta\mu x| \leq |x|$ με το '=' να ισχύει μόνο για

$\chi=0$ οπότε για $x \rightarrow 0^+$ δηλαδή για $0 < x < \frac{\pi}{2}$ είναι και $\eta\mu\chi > 0$ και έτσι

$$|\eta\mu\chi| \leq |x| \Rightarrow \eta\mu\chi < x \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x - \eta\mu\chi} \right) = +\infty$$

στ) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{|x|} - \frac{1}{x} \right)$ το όριο δεν υπάρχει, διότι τα πλευρικά όρια δεν είναι ίσα

$$\text{Συγκεκριμένα} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{|x|} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 0 = 0 \quad \text{ενώ}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{|x|} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(-\frac{1}{x} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(-\frac{2}{x} \right) = +\infty$$

$$\zeta) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{(1-x)(1+x+x^2)} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1+x+x^2-3}{(1-x)(1+x+x^2)} \right) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^2+x-2}{(1-x)(1+x+x^2)} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{(x-1)(x+2)}{-(x-1)(1+x+x^2)} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(-\frac{x+2}{1+x+x^2} \right) = -\frac{3}{3} = -1$$

$$\eta) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x \sin x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x - 1}{x \sin x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} \cdot \frac{\sin x - 1}{x} \right) = 1 \cdot 0 = 0$$

$$\theta) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\eta\mu^2 x} - \frac{1}{1 - \sin x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{1 - \sin^2 x} - \frac{1}{1 - \sin x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2 - (1 + \sin x)}{(1 - \sin x)(1 + \sin x)} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \sin x}{(1 - \sin x)(1 + \sin x)} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{1 + \sin x} \right) = \frac{1}{2}$$

$$\iota) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\eta\mu x}{x^3} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\eta\mu x}{x} \cdot \frac{1}{x^2} \right) = +\infty \quad \text{αφού}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\eta\mu x}{x} \right) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0 \quad \text{και} \quad x^2 > 0 \quad \text{για} \quad x \rightarrow 0$$

Θέμα 12^ο

Α) Είναι $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - \alpha) = 4 - \alpha$ και $\lim_{x \rightarrow 2} (2x + \beta - 1) = 3 + \beta$. Καταλαβαίνουμε

λοιπόν ότι οι 'κρίσιμες' τιμές είναι οι $\alpha = 4$ και $\beta = -3$. Διακρίνουμε περιπτώσεις :

- Για $\alpha \neq 4$ είναι $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x + \beta - 1}{x^2 - \alpha} = \frac{\beta + 3}{4 - \alpha} \in \mathbb{R}$.

- Για $\alpha = 4$ και $\beta \neq -3$ έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x + \beta - 1}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{2x + \beta - 1}{x + 2} \cdot \frac{1}{x - 2} \right) = \begin{cases} +\infty, & \alpha\nu \quad \beta > -3 \\ -\infty, & \alpha\nu \quad \beta < -3 \end{cases} \quad \text{και}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x + \beta - 1}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{2x + \beta - 1}{x + 2} \cdot \frac{1}{x - 2} \right) = \begin{cases} -\infty & , \text{ αν } \beta > -3 \\ +\infty & , \text{ αν } \beta < -3 \end{cases}$$

Συνεπώς τα πλευρικά όρια δεν είναι ίσα και επομένως δεν υπάρχει το όριο

- Για $\alpha = 4$ και $\beta = -3$ έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x - 4}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{2(x - 2)}{(x + 2)(x - 2)} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{2}{x + 2} \right) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

B) Έστω λοιπόν ότι $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{(\alpha + 1)x^2 + 8x - \alpha}{12 - 3x^2} = \lambda \in \mathbb{R}$.

Θέτουμε $f(x) = \frac{(\alpha + 1)x^2 + 8x - \alpha}{12 - 3x^2} \Rightarrow (\alpha + 1)x^2 + 8x - \alpha = (12 - 3x^2)f(x)$ οπότε

$$\lim_{x \rightarrow -2} ((\alpha + 1)x^2 + 8x - \alpha) = \lim_{x \rightarrow -2} ((12 - 3x^2)f(x)) \Rightarrow 4\alpha + 4 - 16 - \alpha = 0 \cdot \lambda \Rightarrow 3\alpha - 12 = 0 \Rightarrow \alpha = 4$$

Για $\alpha = 4$ έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{(\alpha + 1)x^2 + 8x - \alpha}{12 - 3x^2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{5x^2 + 8x - 4}{12 - 3x^2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{5(x + 2)(x - \frac{2}{5})}{-3(x - 2)(x + 2)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{5(x - \frac{2}{5})}{-3(x - 2)} = -1$$

Συνεπώς για να υπάρχει το όριο και να είναι πραγματικός αριθμός πρέπει $\alpha = 4$ και μάλιστα το όριο είναι -1 .

Γ) Έχουμε $\lim_{x \rightarrow \alpha} (x^2 + \alpha) = \alpha^2 + \alpha$, $\lim_{x \rightarrow \alpha} (x^2 - 4x + \alpha^2) = 2\alpha^2 - 4\alpha$

- Αν $2\alpha^2 - 4\alpha \neq 0 \Rightarrow 2\alpha(\alpha - 2) \neq 0 \Rightarrow \alpha \neq 0$ και $\alpha \neq 2$ τότε θα είχαμε

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{x^2 + \alpha}{x^2 - 4x + \alpha^2} = \frac{\alpha^2 + \alpha}{2\alpha^2 - 4\alpha} \in \mathbb{R} \text{ πράγμα άτοπο αφού } \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{x^2 + \alpha}{x^2 - 4x + \alpha^2} = +\infty.$$

- Για $\alpha = 2$ έχουμε $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{x^2 + \alpha}{x^2 - 4x + \alpha^2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 4}{x^2 - 4x + 4} = \lim_{x \rightarrow 2} ((x^2 + 4) \frac{1}{(x - 2)^2}) = +\infty$

αφού $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 4) = 8$, $\lim_{x \rightarrow 2} (x - 2)^2 = 0$, $(x - 2)^2 > 0$ για $x \rightarrow 2$ οπότε

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x - 2)^2} = +\infty$$

- Για $\alpha = 0$ έχουμε $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{x^2 + \alpha}{x^2 - 4x + \alpha^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2 - 4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x(x - 4)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{(x - 4)} = 0$

Τελικά για να είναι $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{x^2 + \alpha}{x^2 - 4x + \alpha^2} = +\infty$ πρέπει $\alpha = 2$.

Δ) Θέτουμε $f(x) = \frac{x^2 - \alpha x + \beta}{x - 3} \Rightarrow x^2 - \alpha x + \beta = (x - 3)f(x)$ οπότε

$$\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - \alpha x + \beta) = \lim_{x \rightarrow 3} ((x - 3)f(x)) \Rightarrow 9 - 3\alpha + \beta = 0 \cdot 1 \Rightarrow \beta = 3\alpha - 9 \quad (1)$$

Έτσι το όριο γίνεται :

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - \alpha x + \beta}{x - 3} \stackrel{(1)}{=} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - \alpha x + 3\alpha - 9}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3) - \alpha(x-3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3-\alpha)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x+3-\alpha) = 6 - \alpha$$

Συνεπώς πρέπει $6 - \alpha = 1$ δηλαδή $\alpha = 5$ και από την (1) έχουμε ότι $\beta = 6$

Ε) Έστω λοιπόν ότι $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\alpha x^2 + (\beta - 1)x + 4}{x^2 - 2x + 1} \right) = \lambda \in \mathbb{R}$

Θέτουμε $f(x) = \frac{\alpha x^2 + (\beta - 1)x + 4}{x^2 - 2x + 1} \Rightarrow \alpha x^2 + (\beta - 1)x + 4 = (x^2 - 2x + 1)f(x)$ οπότε

$$\lim_{x \rightarrow 1} (\alpha x^2 + (\beta - 1)x + 4) = \lim_{x \rightarrow 1} ((x^2 - 2x + 1)f(x)) \Rightarrow \alpha + \beta - 1 + 4 = 0 \cdot \lambda \Rightarrow \beta = -\alpha - 3 \quad (1)$$

Έτσι το όριο βάση της (1) γίνεται :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\alpha x^2 + (-\alpha - 3 - 1)x + 4}{x^2 - 2x + 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\alpha x^2 - \alpha x - 4x + 4}{x^2 - 2x + 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\alpha x(x-1) - 4(x-1)}{(x-1)^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{(x-1)(\alpha x - 4)}{(x-1)^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\alpha x - 4}{x - 1} \right) = \lambda$$

Θέτουμε $g(x) = \frac{\alpha x - 4}{x - 1} \Rightarrow \alpha x - 4 = (x - 1)g(x)$ οπότε

$$\lim_{x \rightarrow 1} (\alpha x - 4) = \lim_{x \rightarrow 1} ((x - 1)g(x)) \Rightarrow \alpha - 4 = 0 \cdot \lambda \Rightarrow \alpha = 4 \text{ και την (1) έχουμε } \beta = -7$$

Επαληθεύουμε ότι για τις τιμές των α και β που βρήκαμε υπάρχει όντως το όριο και είναι πραγματικός αριθμός. Για $\alpha = 4$ και $\beta = -7$ το αρχικό όριο γίνεται :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{4x^2 - 8x + 4}{x^2 - 2x + 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4(x^2 - 2x + 1)}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} 4 = 4 \text{ οπότε πράγματι υπάρχει και είναι } 4$$

Θέμα 13°

Θέτουμε $g(x) = \frac{\sqrt{x+1} - 2}{(x-3)f(x)} \Rightarrow g(x)(x-3)f(x) = \sqrt{x+1} - 2$

Για $x \rightarrow 3$ είναι $x \neq 3 \Rightarrow x - 3 \neq 0$ και $g(x) \rightarrow -\infty$ οπότε $g(x) < 0$ για $x \rightarrow 3$

και έχουμε $f(x) = \frac{\sqrt{x+1} - 2}{g(x)(x-3)}$. Επομένως

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{g(x)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{1}{g(x)} \cdot \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x-3} \right) = \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{1}{g(x)} \cdot \frac{(\sqrt{x+1} - 2)(\sqrt{x+1} + 2)}{(x-3)(\sqrt{x+1} + 2)} \right) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{1}{g(x)} \cdot \frac{x+1-4}{(x-3)(\sqrt{x+1} + 2)} \right) = \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{1}{g(x)} \cdot \frac{x-3}{(x-3)(\sqrt{x+1} + 2)} \right) = \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{1}{g(x)} \cdot \frac{1}{\sqrt{x+1} + 2} \right) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{1}{g(x)} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{x+1} + 2} = 0 \cdot \frac{1}{4} = 0 \quad \text{αφου} \quad \lim_{x \rightarrow 3} g(x) = -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{1}{g(x)} \right) = 0$$

Θέμα 14°

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3f(x)-2}{f^2(x)+5} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)(3-\frac{2}{f(x)})}{f^2(x)(1+\frac{5}{f^2(x)})} = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{f(x)} \cdot \frac{(3-\frac{2}{f(x)})}{(1+\frac{5}{f^2(x)})} \right) = 0 \cdot \frac{3-0}{1+0} = 0$$

αφού $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{f(x)} \right) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2}{f(x)} \right) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{5}{f^2(x)} \right) = 0$

Θέμα 15°

Για $x \neq 0$ έχουμε $x^2 f(x) - 1 \geq 0 \Rightarrow x^2 f(x) \geq 1 \Rightarrow f(x) \geq \frac{1}{x^2}$ και επειδή

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty \text{ είναι και } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$$

Θέμα 16°

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^4 - 3x + 4}{5x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^4}{5x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2}{5} = +\infty \quad , \quad \beta) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 3x + 4}{5x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{5x^2} = \frac{2}{5}$$

$$\gamma) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 3x + 4}{5x^3 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{5x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{5x} = 0$$

$$\delta) \lim_{x \rightarrow +\infty} [(2\lambda - 6)x^3 - 2\lambda x^2 + x - 2] = \begin{cases} \alpha \nu \quad \lambda \neq 3 & \lim_{x \rightarrow +\infty} [(2\lambda - 6)x^3] = \begin{cases} +\infty & \alpha \nu \quad \lambda > 3 \\ -\infty & \alpha \nu \quad \lambda < 3 \end{cases} \\ \alpha \nu \quad \lambda = 3 & \lim_{x \rightarrow +\infty} (-6x^2) = -\infty \end{cases}$$

$$\varepsilon) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\lambda x^3 + 2x^2 - 3}{(\lambda - 1)x^2 + 2} = \begin{cases} \alpha \nu \quad \lambda \neq 0, 1 & \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\lambda x^3}{(\lambda - 1)x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\lambda x}{(\lambda - 1)} = \begin{cases} -\infty & \alpha \nu \quad \lambda \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty) \\ +\infty & \alpha \nu \quad \lambda \in (0, 1) \end{cases} \\ \alpha \nu \quad \lambda = 1 & \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{2} = -\infty \\ \alpha \nu \quad \lambda = 0 & \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2}{-x^2} = -2 \end{cases}$$

Θέμα 17°

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{9x^4 - 3x^2 + 1} + 2x - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^4 \left(9 - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^4} \right)} + 2x - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x^2 \sqrt{9 - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^4}} + 2x - 1 \right) =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(\sqrt{9 - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^4}} + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} \right) = +\infty \quad \alpha \phi \omega \nu \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \quad , \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{9 - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^4}} = \sqrt{9} = 3 \quad , \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2+1} - \sqrt{9x^2-3x+1} - 5x+2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2(4+\frac{1}{x^2})} - \sqrt{x^2(9-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2})} - 5x+2) =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (|x|\sqrt{4+\frac{1}{x^2}} - |x|\sqrt{9-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}} - 5x+2) \stackrel{\substack{x \rightarrow +\infty \\ x > 0 \\ |x|=x}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} (x\sqrt{4+\frac{1}{x^2}} - x\sqrt{9-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}} - 5x+2) =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{4+\frac{1}{x^2}} - \sqrt{9-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}} - 5 + \frac{2}{x}) = -\infty \quad \alpha\phi\omicron\upsilon' \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4+\frac{1}{x^2}} - \sqrt{9-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}} - 5 + \frac{2}{x}) = \sqrt{4} - \sqrt{9} - 5 = -6$$

$$\gamma) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{5x^2-3x+4}}{3x-2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2(5-\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2})}}{3x-2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x|\sqrt{(5-\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2})} \stackrel{\substack{x \rightarrow -\infty \\ x < 0 \\ |x|=-x}}{=} }{3x-2} =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x\sqrt{(5-\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2})}}{3x-2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x\sqrt{(5-\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2})}}{x(3-\frac{2}{x})} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{(5-\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2})}}{(3-\frac{2}{x})} = -\frac{5}{3}$$

$$\delta) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4x^2+x+1}+2x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{(\sqrt{4x^2+x+1}+2x)(\sqrt{4x^2+x+1}-2x)}{\sqrt{4x^2+x+1}-2x} \right) =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{4x^2+x+1-4x^2}{\sqrt{4x^2+x+1}-2x} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x+1}{|x|\sqrt{(4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}-2x} \right) \stackrel{\substack{x \rightarrow -\infty \\ x < 0 \\ |x|=-x}}{=} =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x+1}{-x\sqrt{(4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}-2x} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(1+\frac{1}{x})}{x(-\sqrt{(4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}-2)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(1+\frac{1}{x})}{(-\sqrt{(4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}-2)} = -\frac{1}{4}$$

$$\varepsilon) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2+3}-2x}{\sqrt{9x^2-x+2}-5x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{4x^2+3}-2x)(\sqrt{4x^2+3}+2x)}{(\sqrt{9x^2-x+2}-5x+1)(\sqrt{4x^2+3}+2x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2+3-4x^2}{(\sqrt{x^2(9-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2})}-5x+1)(\sqrt{x^2(4+\frac{3}{x^2})}+2x)} \stackrel{\substack{x \rightarrow +\infty \\ x > 0 \\ |x|=x}}{=} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{(x\sqrt{(9-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2})}-5x+1)(x\sqrt{4+\frac{3}{x^2}}+2x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x^2(\sqrt{(9-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2})}-5+\frac{1}{x})(\sqrt{4+\frac{3}{x^2}}+2)} = 0$$

Σχόλιο : Πολλαπλασιάσαμε μόνο με τη συζυγή παράσταση του αριθμητή γιατί μόνο αυτός οδηγούσε σε απροσδιοριστία $0 \cdot (+\infty)$

$$\begin{aligned}
\sigma\tau) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 - x} - \sqrt{9x^2 + 1} + x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 - x} - 2x + 3x - \sqrt{9x^2 + 1}) = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{(\sqrt{4x^2 - x} - 2x)(\sqrt{4x^2 - x} + 2x)}{\sqrt{4x^2 - x} + 2x} + \frac{(3x - \sqrt{9x^2 + 1})(3x + \sqrt{9x^2 + 1})}{3x + \sqrt{9x^2 + 1}} \right) = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4x^2 - x - 4x^2}{\sqrt{4x^2 - x} + 2x} + \frac{9x^2 - 9x^2 - 1}{3x + \sqrt{9x^2 + 1}} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-x}{\sqrt{x^2(4 - \frac{1}{x})} + 2x} + \frac{-1}{3x + \sqrt{x^2(9 + \frac{1}{x})}} \right) \stackrel{\substack{x \rightarrow +\infty \\ x > 0 \\ |x| = x}}{=} \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-x}{x(\sqrt{4 - \frac{1}{x}} + 2)} + \frac{-1}{x(3 + \sqrt{9 + \frac{1}{x}})} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-1}{(\sqrt{4 - \frac{1}{x}} + 2)} + \frac{-1}{x(3 + \sqrt{9 + \frac{1}{x}})} \right) = -\frac{1}{4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 - x} - \sqrt{9x^2 + 1} - \alpha x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2(4 - \frac{1}{x})} - \sqrt{x^2(9 + \frac{1}{x^2})} - \alpha x \right) \stackrel{\substack{x \rightarrow +\infty \\ x > 0 \\ |x| = x}}{=} \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x\sqrt{4 - \frac{1}{x}} - x\sqrt{9 + \frac{1}{x^2}} - \alpha x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt{4 - \frac{1}{x}} - \sqrt{9 + \frac{1}{x^2}} - \alpha \right) = \begin{cases} +\infty & \alpha < -1 \\ -\infty & \alpha > -1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Αν $\alpha = -1$ τότε το όριο γίνεται όπως στο ερώτημα στ) και είναι ίσο με $-\frac{1}{4}$

Θέμα 18°

$$\begin{aligned}
\alpha) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \cdot 3^{x+2} - 4 \cdot 2^{x+1} + 2}{5 \cdot 2^x + 3 \cdot 3^{x+1} - 1} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \cdot 3^2 \cdot \frac{3^x}{3^x} - 4 \cdot 2 \cdot \frac{2^x}{3^x} + \frac{2}{3^x}}{5 \cdot \frac{2^x}{3^x} + 3 \cdot 3 \cdot \frac{3^x}{3^x} - \frac{1}{3^x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{18 - 8 \cdot (\frac{2}{3})^x + \frac{2}{3^x}}{5 \cdot (\frac{2}{3})^x + 9 - \frac{1}{3^x}} = \frac{18}{9} = 2 \\
\beta) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 \cdot 3^{x+2} - 4 \cdot 2^{x+1}}{5 \cdot 2^x + 3 \cdot 3^{x+1}} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 \cdot 3^2 \cdot \frac{3^x}{2^x} - 4 \cdot 2 \cdot \frac{2^x}{2^x}}{5 \cdot \frac{2^x}{2^x} + 3 \cdot 3 \cdot \frac{3^x}{2^x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{18 \cdot (\frac{3}{2})^x - 8}{5 + 9 \cdot (\frac{3}{2})^x} = -\frac{8}{5} \\
\gamma) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \cdot 3^{x+2} - 4 \cdot \alpha^{x+1}}{5 \cdot \alpha^x + 3 \cdot 3^{x+1}} &= \begin{cases} \alpha > 3 & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \cdot 3^{x+2} - 4 \cdot \alpha^{x+1}}{5 \cdot \alpha^x + 3 \cdot 3^{x+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \cdot 3^2 \cdot (\frac{3}{\alpha})^x - 4 \cdot \alpha}{5 + 3 \cdot 3 \cdot (\frac{3}{\alpha})^x} = -\frac{4\alpha}{5} \\ \alpha < 3 & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \cdot 3^{x+2} - 4 \cdot \alpha^{x+1}}{5 \cdot \alpha^x + 3 \cdot 3^{x+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \cdot 3^2 - 4 \cdot \alpha \cdot (\frac{\alpha}{3})^x}{5 \cdot (\frac{\alpha}{3})^x + 3 \cdot 3} = \frac{18}{9} = 2 \\ \alpha = 3 & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \cdot 3^{x+2} - 4 \cdot 3^{x+1}}{5 \cdot 3^x + 3 \cdot 3^{x+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \cdot 3^x \cdot 3^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3^x}{5 \cdot 3^x + 3 \cdot 3 \cdot 3^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6 \cdot 3^x}{14 \cdot 3^x} = \frac{3}{7} \end{cases}
\end{aligned}$$

Θέμα 19°

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 \eta \mu \frac{1}{x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x \cdot x \eta \mu \frac{1}{x}) = +\infty \quad \text{αφού} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \quad \text{και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x \eta \mu \frac{1}{x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta \mu \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \stackrel{\frac{1}{x} = \omega}{=} \lim_{\substack{\omega \rightarrow 0 \\ x \rightarrow \infty}} \frac{\eta \mu \omega}{\omega} = 1$$

$$\beta) \text{ Είναι } \left| \frac{1}{x} \eta \mu x \right| = \left| \frac{1}{x} \right| \left| \eta \mu x \right| \leq \left| \frac{1}{x} \right| \Rightarrow -\left| \frac{1}{x} \right| \leq \frac{1}{x} \eta \mu x \leq \left| \frac{1}{x} \right|$$

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left| \frac{1}{x} \right| = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\left| \frac{1}{x} \right| = 0 \quad \text{οπότε από κριτήριο παρεμβολής } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x} \eta \mu x \right) = 0$$

$$\gamma) \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^\nu \eta \mu \frac{1}{x}) = \begin{cases} \alpha \nu & \nu > 1 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^{\nu-1} \cdot x \cdot \eta \mu \frac{1}{x}) = +\infty \quad \text{αφού} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\nu-1} = +\infty \quad \text{και} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (x \cdot \eta \mu \frac{1}{x}) \stackrel{\frac{1}{x} = \omega}{=} \lim_{\substack{\omega \rightarrow 0 \\ x \rightarrow \infty}} \frac{\eta \mu \omega}{\omega} = 1 \\ \alpha \nu & \nu = 1 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (x \cdot \eta \mu \frac{1}{x}) \stackrel{\frac{1}{x} = \omega}{=} \lim_{\substack{\omega \rightarrow 0 \\ x \rightarrow \infty}} \frac{\eta \mu \omega}{\omega} = 1 \end{cases}$$

$$\delta) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \eta \mu \frac{1}{x}}{3x-2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \eta \mu \frac{1}{x}}{x(3-\frac{2}{x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \eta \mu \frac{1}{x}}{3-\frac{2}{x}} = \frac{1}{3} \quad \text{αφού}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (x \cdot \eta \mu \frac{1}{x}) \stackrel{\frac{1}{x} = \omega}{=} \lim_{\substack{\omega \rightarrow 0 \\ x \rightarrow \infty}} \frac{\eta \mu \omega}{\omega} = 1$$

$$\epsilon) \text{ Είναι } \left| \frac{x^2-2x+3}{2x^3+5x} \cdot \sigma \upsilon \nu x \right| = \left| \frac{x^2-2x+3}{2x^3+5x} \right| \cdot |\sigma \upsilon \nu x| \leq \left| \frac{x^2-2x+3}{2x^3+5x} \right| \Rightarrow$$

$$-\left| \frac{x^2-2x+3}{2x^3+5x} \right| \leq \frac{x^2-2x+3}{2x^3+5x} \cdot \sigma \upsilon \nu x \leq \left| \frac{x^2-2x+3}{2x^3+5x} \right| \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-2x+3}{2x^3+5x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{2x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2x} = 0$$

$$\text{οπότε από κριτήριο παρεμβολής } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2-2x+3}{2x^3+5x} \cdot \sigma \upsilon \nu x \right) = 0$$

$$\sigma \tau) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + x \eta \mu x + 2}{x^2 + \eta \mu x + 3x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2(1 + \frac{\eta \mu x}{x} + \frac{2}{x^2})}{x^2(1 + \frac{\eta \mu x}{x^2} + \frac{3}{x})} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + \frac{\eta \mu x}{x} + \frac{2}{x^2}}{1 + \frac{\eta \mu x}{x^2} + \frac{3}{x}} = 1$$

$$\text{αφού } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\eta \mu x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\eta \mu x}{x^2} = 0 \quad (\text{κριτήριο παρεμβολής κοίτα } \beta) \text{ ερώτημα}) \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x^2} = 0$$

Θέμα 20°

$$α) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 4x + 3}{x + 1} - \alpha x + \beta \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 4x + 3 - \alpha x^2 - \alpha x + \beta x + \beta}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1 - \alpha)x^2 + (4 + \beta - \alpha)x + \beta + 3}{x + 1}$$

$$\text{Αν } \alpha \neq 1 \text{ τότε το όριο γίνεται } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1 - \alpha)x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - \alpha)x = \begin{cases} +\infty & \alpha < 1 \\ -\infty & \alpha > 1 \end{cases}$$

$$\text{Αν } \alpha = 1 \text{ και } \beta \neq -3 \text{ τότε το όριο γίνεται } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\beta + 3)x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\beta + 3) = \beta + 3$$

$$\text{Αν } \alpha = 1 \text{ και } \beta = -3 \text{ τότε το όριο γίνεται } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{0}{x + 1} = 0$$

Συνεπώς για να είναι το όριο ίσο με 3 πρέπει $\alpha = 1$ και $\beta + 3 = 3$ δηλαδή $\beta = 0$

$$β) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4x^2 + 2x + 3} - \alpha x - \beta) = 2$$

• Αν $\alpha \neq -2$ τότε το όριο γίνεται :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4x^2 + 2x + 3} - \alpha x - \beta) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (|x| \sqrt{4 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}} - \alpha x - \beta) \stackrel{\substack{x \rightarrow -\infty \\ x < 0 \\ |x| = -x}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x \sqrt{4 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}} - \alpha x - \beta) =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(-\sqrt{4 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}} - \alpha - \frac{\beta}{x} \right) = \begin{cases} -\infty & \alpha < -2 \\ +\infty & \alpha > -2 \end{cases}$$

• Αν $\alpha = -2$ τότε το όριο γίνεται :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4x^2 + 2x + 3} + 2x - \beta) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{4x^2 + 2x + 3} + 2x - \beta)(\sqrt{4x^2 + 2x + 3} - 2x + \beta)}{(\sqrt{4x^2 + 2x + 3} - 2x + \beta)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2 + 2x + 3 - 4x^2 + 4x\beta - \beta^2}{(\sqrt{4x^2 + 2x + 3} - 2x + \beta)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2(1 + 2\beta)x + 3 - \beta^2}{x(-\sqrt{4 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}} - 2 + \frac{\beta}{x})} =$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha \neq -2 \text{ τότε } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x[2(1 + 2\beta) + \frac{3 - \beta^2}{x}]}{x(-\sqrt{4 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}} - 2 + \frac{\beta}{x})} = \frac{2(1 + 2\beta)}{-4} = \frac{-(1 + 2\beta)}{2} \\ \alpha = -2 \text{ τότε } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3 - \frac{1}{4}}{x(-\sqrt{4 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}} - 2 + \frac{\beta}{x})} = 0 \end{array} \right.$$

$$\text{Συνεπώς πρέπει } \alpha = -2 \text{ και } \frac{-(1 + 2\beta)}{2} = 2 \Rightarrow 1 + 2\beta = -4 \Rightarrow \beta = -\frac{5}{2}.$$

$$\gamma) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{9x^2 + x + 1} - \alpha x}{\sqrt{x^2 + 2x + 3} + \beta x} = \frac{1}{6}$$

- Αν $\alpha \neq 3$ και $\beta \neq -1$ τότε το όριο γίνεται :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{9x^2 + x + 1} - \alpha x}{\sqrt{x^2 + 2x + 3} + \beta x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|\chi| \sqrt{9 + \frac{1}{\chi} + \frac{1}{\chi^2}} - \alpha \chi}{|\chi| \sqrt{1 + \frac{2}{\chi} + \frac{3}{\chi^2}} + \beta \chi} \stackrel{\substack{\chi \rightarrow +\infty \\ \chi > 0 \\ |\chi| = \chi}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\chi(\sqrt{9 + \frac{1}{\chi} + \frac{1}{\chi^2}} - \alpha)}{\chi(\sqrt{1 + \frac{2}{\chi} + \frac{3}{\chi^2}} + \beta)} = \frac{3 - \alpha}{1 + \beta}$$

- Αν $\alpha = 3$ και $\beta \neq -1$ τότε το όριο γίνεται :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{9x^2 + x + 1} - 3x}{\sqrt{x^2 + 2x + 3} + \beta x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{9x^2 + x + 1 - 9x^2}{(|\chi| \sqrt{1 + \frac{2}{\chi} + \frac{3}{\chi^2}} + \beta \chi)(\sqrt{9x^2 + x + 1} + 3x)} \stackrel{\substack{\chi \rightarrow +\infty \\ \chi > 0 \\ |\chi| = \chi}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\chi(1 + \frac{1}{\chi})}{\chi(\sqrt{1 + \frac{2}{\chi} + \frac{3}{\chi^2}} + \beta)(\sqrt{9x^2 + x + 1} + 3x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1 + \frac{1}{\chi})}{(\sqrt{1 + \frac{2}{\chi} + \frac{3}{\chi^2}} + \beta)(\sqrt{9x^2 + x + 1} + 3x)} = 0$$

- Αν $\alpha \neq 3$ και $\beta = -1$ τότε το όριο γίνεται :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{9x^2 + x + 1} - \alpha x}{\sqrt{x^2 + 2x + 3} - \chi} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(|\chi| \sqrt{9 + \frac{1}{\chi} + \frac{1}{\chi^2}} - \alpha \chi)(\sqrt{x^2 + 2x + 3} + \chi)}{x^2 + 2x + 3 - \chi^2} \stackrel{\substack{\chi \rightarrow +\infty \\ \chi > 0 \\ |\chi| = \chi}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\chi(\sqrt{9 + \frac{1}{\chi} + \frac{1}{\chi^2}} - \alpha)(\sqrt{x^2 + 2x + 3} + \chi)}{\chi(2 + \frac{3}{\chi})} = \begin{cases} +\infty & \alpha \nu \quad 3 - \alpha > 0 \Rightarrow \alpha < 3 \\ -\infty & \alpha \nu \quad 3 - \alpha < 0 \Rightarrow \alpha > 3 \end{cases}$$

- Αν $\alpha = 3$ και $\beta = -1$ τότε το όριο γίνεται :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{9x^2 + x + 1} - 3x}{\sqrt{x^2 + 2x + 3} - \chi} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(9x^2 + x + 1 - 9x^2)(\sqrt{x^2 + 2x + 3} + \chi)}{(x^2 + 2x + 3 - \chi^2)(\sqrt{9x^2 + x + 1} + 3x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\chi + 1)(\sqrt{x^2 + 2x + 3} + \chi)}{(2\chi + 3)(\sqrt{9x^2 + x + 1} + 3\chi)} \stackrel{\substack{\chi \rightarrow +\infty \\ \chi > 0 \\ |\chi| = \chi}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\chi(1 + \frac{1}{\chi})\chi(\sqrt{1 + \frac{2}{\chi} + \frac{3}{\chi^2}} + 1)}{\chi(2 + \frac{3}{\chi})\chi(\sqrt{9 + \frac{1}{\chi} + \frac{1}{\chi^2}} + 3)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1 + \frac{1}{\chi})(\sqrt{1 + \frac{2}{\chi} + \frac{3}{\chi^2}} + 1)}{(2 + \frac{3}{\chi})(\sqrt{9 + \frac{1}{\chi} + \frac{1}{\chi^2}} + 3)} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

Τελικά πρέπει $\alpha = 3$ και $\beta = -1$ ή $\alpha \neq 3$ και $\beta \neq -1$ και $\frac{3 - \alpha}{1 + \beta} = \frac{1}{6} \Rightarrow \beta + 6\alpha = 17$

δ) • Αν $\alpha \neq 3$ τότε το όριο γίνεται :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 2x + 3} + \sqrt{4x^2 + 1} + \alpha x - \beta) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (|\chi| \sqrt{1 + \frac{2}{\chi} + \frac{3}{\chi^2}} + |\chi| \sqrt{4 + \frac{1}{\chi^2}} + \alpha \chi - \beta) \stackrel{\substack{\chi \rightarrow -\infty \\ \chi < 0 \\ |\chi| = -\chi}}{=} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} (-\chi \sqrt{1 + \frac{2}{\chi} + \frac{3}{\chi^2}} - \chi \sqrt{4 + \frac{1}{\chi^2}} + \alpha \chi - \beta) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \chi (-\sqrt{1 + \frac{2}{\chi} + \frac{3}{\chi^2}} - \sqrt{4 + \frac{1}{\chi^2}} + \alpha - \frac{\beta}{\chi}) = \\ \begin{cases} -\infty & \alpha \vee -1 - 2 + \alpha > 0 \Rightarrow \alpha > 3 \\ +\infty & \alpha \vee -1 - 2 + \alpha < 0 \Rightarrow \alpha < 3 \end{cases} \end{aligned}$$

• Αν $\alpha = 3$ τότε το όριο γίνεται :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 2x + 3} + \sqrt{4x^2 + 1} + 3x - \beta) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 2x + 3} + \chi + \sqrt{4x^2 + 1} + 2\chi - \beta) = \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 + 2x + 3 - \chi^2}{\sqrt{x^2 + 2x + 3} - \chi} + \frac{4x^2 + 1 - 4\chi^2}{\sqrt{4x^2 + 1} - 2\chi} - \beta \right) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2\chi + 3}{|\chi| \sqrt{1 + \frac{2}{\chi} + \frac{3}{\chi^2}} - \chi} + \frac{1}{|\chi| \sqrt{4 + \frac{1}{\chi^2}} - 2\chi} - \beta \right) \stackrel{\substack{\chi \rightarrow -\infty \\ \chi < 0 \\ |\chi| = -\chi}}{=} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\chi(2 + \frac{3}{\chi})}{\chi(-1 \sqrt{1 + \frac{2}{\chi} + \frac{3}{\chi^2}} - 1)} + \frac{1}{\chi(-\sqrt{4 + \frac{1}{\chi^2}} - 2)} - \beta \right) &= \frac{2}{-2} + 0 - \beta = -1 - \beta \end{aligned}$$

Τελικά πρέπει $\alpha = 3$ και $-1 - \beta = 0$ δηλαδή $\beta = -1$

Θέμα 21°

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) + 3x + 2}{xf(x) + x^2 - 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(\frac{f(x)}{x} + 3 + \frac{2}{x})}{x^2(\frac{f(x)}{x} + 1 - \frac{2}{x^2})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\frac{f(x)}{x} + 3 + \frac{2}{x})}{(\frac{f(x)}{x} + 1 - \frac{2}{x^2})} = 0 \cdot \frac{3 + 3 + 0}{3 + 1 + 0} = 0$$

Θέμα 22°

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x) + \lambda x - 1}{xf(x) - 3x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(\frac{f(x)}{x} + \lambda - \frac{1}{x})}{x(f(x) - 3x + \frac{1}{x})} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{f(x)}{x} + \lambda - \frac{1}{x}}{(f(x) - 3x) + \frac{1}{x}} = \frac{3 + \lambda - 0}{2 + 0} = \frac{3 + \lambda}{2} \Sigma$$

υνεπώς πρέπει $\frac{3 + \lambda}{2} = 1 \Rightarrow 3 + \lambda = 2 \Rightarrow \lambda = -1$

Θέμα 23°

α) Να βρείτε τα όρια: $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$

β) Τι συμπεραίνετε για το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{f(x)} = 0$ αφού $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{f(x)} = 0$

Θέμα 24°

α) Πρέπει $\frac{x-3}{2x} > 0 \Rightarrow x < 0$ ή $x > 3$. Άρα $D_f = (-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{x-3}{2x} = \lim_{\substack{\frac{x-3}{2x}=u \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} u = \frac{1}{2}}} \ln u = \ln \frac{1}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln \frac{x-3}{2x} = \lim_{\substack{\frac{x-3}{2x}=u \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} u = \frac{1}{2}}} \ln u = \ln \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{\substack{x > 3 \\ x \rightarrow 3^+}} \ln \frac{x-3}{2x} = \lim_{\substack{\frac{x-3}{2x}=u \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} u = 0}} \ln u = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{\substack{x < 0 \\ x \rightarrow 0^-}} \ln \frac{x-3}{2x} = \lim_{\substack{\frac{x-3}{2x}=u \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} u = +\infty}} \ln u = +\infty$$

Θέμα 25°

α)

i. Η f δεν έχει όριο στο 1 διότι $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x-2) = -1$ ενώ $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x+1) = 2$.

ii. Η g δεν έχει όριο στο 1 διότι $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty$ αφού $\lim_{x \rightarrow 1^-} x-1 = 0$ και $x-1 < 0$ για $x \rightarrow 1^-$, ενώ $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty$ αφού $\lim_{x \rightarrow 1^+} x-1 = 0$ και $x-1 > 0$ για $x \rightarrow 1^+$.

β) Είναι $\lim_{x \rightarrow 1^-} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow 1^-} ((x-2) \cdot \frac{1}{x-1}) = +\infty$ διότι $\lim_{x \rightarrow 1^-} (x-2) = -1$

και $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty$.

Επίσης $\lim_{x \rightarrow 1^+} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow 1^+} ((x+1) \cdot \frac{1}{x-1}) = +\infty$ διότι $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x+1) = 2$

και $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty$.

Τελικά $\lim_{x \rightarrow 1} (f(x) \cdot g(x)) = +\infty$.

γ) Για να ορίζεται το $\ln(x-1)$ θα πρέπει $x > 1$, οπότε αφού η συνάρτηση $\ln(x-1) \cdot g(x)$ ορίζεται για $x > 1$, θα αναζητήσουμε το δεξιό πλευρικό της όριο στο 1.

1. Είναι $\lim_{x \rightarrow 1} (\ln(x-1) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (\ln(x-1) \cdot g(x)) = -\infty$ διότι $\lim_{x \rightarrow 1^+} \ln(x-1) = -\infty$ και

$\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty$.

Θέμα 26°

i. Για να ορίζεται το $\ln x$ θα πρέπει $x > 0$, οπότε αφού η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln x}{x^2 - x}$ ορίζεται για $x > 0$ και $x \neq 1$, θα αναζητήσουμε το δεξιό πλευρικό της όριο στο 0.

Είναι $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x-1}) = +\infty$ διότι $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ και $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x-1} = -1$.

ii. $\lim_{x \rightarrow 1} (f(x) \cdot \eta\mu(x-1)) = \lim_{x \rightarrow 1} (\ln x \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{\eta\mu(x-1)}{x-1}) = 0 \cdot 1 \cdot 1 = 0$

iii. $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) \cdot \eta\mu x) = \lim_{x \rightarrow 0} (\ln x \cdot \frac{\eta\mu x}{x} \cdot \frac{1}{x-1}) = +\infty$ διότι $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ και $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$ και $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x-1} = -1$.

Θέμα 27°

α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\frac{f(x)}{x} \cdot x) = +\infty$ ισχύει $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 3$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$.

β)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xf(x) - 2x + \eta\mu x}{xf(x) - 3x + 5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2(\frac{f(x)}{x} - \frac{2}{x} + \frac{\eta\mu x}{x})}{x^2(\frac{f(x)}{x} - \frac{3}{x} + \frac{5}{x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{f(x)}{x} - \frac{2}{x} + \frac{\eta\mu x}{x}}{\frac{f(x)}{x} - \frac{3}{x} + \frac{5}{x}} = \frac{3-0+0}{3-0+0} = 1$$

$$\gamma) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - \eta\mu x}{xf(x) - 3x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(\frac{f(x)}{x} - \frac{\eta\mu x}{x})}{x(f(x) - 3x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{f(x)}{x} - \frac{\eta\mu x}{x}}{f(x) - 3x} = \frac{3-0}{2} = \frac{3}{2}$$

Θέμα 28°

1. **Σωστό** : Έστω $f + g = h$ οπότε $g = h - f$. Αν η h ήταν συνεχής στο χ_0 τότε και η $g = h - f$ θα ήταν συνεχής στο χ_0 ως διαφορά συνεχών. Άτοπο.

2. **Λάθος** : $\pi \cdot \chi \quad f(x) = \begin{cases} x, & \alpha\nu \quad x \leq 1 \\ x+1, & \alpha\nu \quad x > 1 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} x+1, & \alpha\nu \quad x \leq 1 \\ x, & \alpha\nu \quad x > 1 \end{cases}$ οι

οποίες δεν είναι συνεχείς στο 1 ωστόσο η $(f+g)(x) = \begin{cases} 2x+1, & \alpha\nu \quad x \leq 1 \\ 2x+1, & \alpha\nu \quad x > 1 \end{cases}$

είναι συνεχής στο 1.

3. **Σωστό** αφού $f^2 = f \cdot f$ θα είναι συνεχής ως γινόμενο συνεχών

4. **Λάθος** : με την έννοια του όχι απαραίτητα. Για να ήταν σωστό θα έπρεπε να δίνεται ότι η f είναι συνεχής στο $g(\chi_0)$

Θέμα 29°

1. Ε Αφού f συνεχής στο 2 είναι

$$f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x^2 + f(x)}{x^2 - 4} \cdot (x^2 - 4) - x^2 \right) = \lambda \cdot 0 - 4 = -4$$

2. Γ Αφού f συνεχής στο 0 είναι $\lambda = f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\varepsilon \phi(\pi x)}{x} \right) =$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\eta \mu(\pi x)}{x \sigma \upsilon \nu(\pi x)} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\eta \mu(\pi x)}{\pi x} \cdot \frac{\pi}{\sigma \upsilon \nu(\pi x)} \right) \stackrel{\substack{u = \pi x \\ x \rightarrow 0 \\ u \rightarrow 0}}{=} \lim_{u \rightarrow 0} \left(\frac{\eta \mu u}{u} \cdot \frac{\pi}{\sigma \upsilon \nu u} \right) = 1 \cdot \frac{\pi}{1} = \pi$$

Θέμα 30°

Σχήμα 1 : $D_f = [-1, 3]$, $R_f = [-1, 3]$ Σημεία ασυνέχειας το 1 αφού

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \text{ και το 3 αφού } \lim_{x \rightarrow 3} f(x) \neq f(3)$$

Σχήμα 2 : $D_f = [-1, 3) \cup (3, 4]$, $R_f = [0, +\infty)$ Σημεία ασυνέχειας το 1 αφού

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \text{ και το -1 αφού } \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty \neq f(-1)$$

Το 3 δεν αποτελεί σημείο ασυνέχειας αφού δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού

Σχήμα 3 : $D_f = [-1, 0] \cup [1, 2) \cup (2, 3]$, $R_f = [-1, +\infty)$ Σημεία ασυνέχειας το -1 αφού

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 1 \neq f(-1) \text{ και το 3 αφού } \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = +\infty \neq f(3)$$

Το 2 δεν αποτελεί σημείο ασυνέχειας αφού δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού

Θέμα 31°

α) Η f είναι συνεχής στο $R - \{1\}$ ως ρητή. Ειδικά για το 1 έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x^2}{1 - x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1 - x)(1 + x)}{1 - x} = \lim_{x \rightarrow 1} (1 + x) = 2 = f(1) \text{ οπότε είναι συνεχής}$$

και στο 2. Τελικά είναι συνεχής σε όλο το R

β) Η g είναι συνεχής στο $R - \{0\}$ ως πολυωνυμική. Ειδικά για το 0 έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 - 2 = -2 \neq f(0) \text{ οπότε δεν είναι συνεχής και στο 0. Τελικά}$$

είναι συνεχής στο $R - \{0\}$

γ) Η h είναι συνεχής στο $(-\infty, 0)$ ως πηλίκο συνεχών

Η h είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ ως πολυωνυμική

$$\text{Ειδικά για το 0 έχουμε } \lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\eta \mu x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\eta \mu x^2}{x^2} \cdot x = 1 \cdot 0 = 0 ,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^5 + 1) = 1 \text{ οπότε } \lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) \text{ και άρα η } h \text{ δεν είναι}$$

συνεχής στο 0. Τελικά h είναι συνεχής στο $R - \{0\}$

Θέμα 32°

Για να είναι συνεχής στο 1 πρέπει $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \Rightarrow \alpha - \beta = 3$ (1)

Για να είναι συνεχής στο 2 πρέπει $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2) \Rightarrow 4\beta - \alpha = 6$ (2)

Από (1) και (2) βρίσκουμε ότι $\alpha = 6$ και $\beta = 3$.

Θέμα 33°

Για $x \neq 2$ είναι $(x-2)^4 f(x) + 3x - 5 = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{5-3x}{(x-2)^4}$ οπότε

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{5-3x}{(x-2)^4} = -\infty \text{ αφού } \lim_{x \rightarrow 2} (5-3x) = -1, \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x-2)^4} = +\infty$$

Και άρα αποκλείεται να είναι $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$ οπότε είναι ασυνεχής στο 2.

Θέμα 34°

α) Αφού είναι συνεχής στο 0 είναι $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$. Επίσης για $x \neq 0$ είναι

$$x f(x) = 2023x - \eta \mu x \Rightarrow f(x) = 2023 - \frac{\eta \mu x}{x} \text{ οπότε}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(2023 - \frac{\eta \mu x}{x} \right) = 2023 - 1 = 2022 \text{ και άρα } f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2022$$

$$\beta) f(x) = \begin{cases} 2023 - \frac{\eta \mu x}{x}, & x \neq 0 \\ 2022, & x = 0 \end{cases}$$

$$\gamma) \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2023 - \frac{\eta \mu x}{x} \right) = 2023.$$

δ) Προφανής λύση η $x = 0$ αφού $f(0) = 2022$ η οποία είναι και μοναδική αφού για

$$x \neq 0 \text{ είναι } f(x) = 2022 \Leftrightarrow 2023 - \frac{\eta \mu x}{x} = 2022 \Leftrightarrow \frac{\eta \mu x}{x} = 1 \Leftrightarrow \eta \mu x = x \text{ που είναι}$$

αδύνατη για $x \neq 0$, διότι $\eta \mu x = x \Leftrightarrow x = 0$

Θέμα 35°

Αφού είναι συνεχής στο 0 είναι $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.

$$\text{Επίσης για } x > 0 \text{ είναι : } \eta \mu x - x^2 \leq x f(x) \leq x + x^2 \Rightarrow \frac{\eta \mu x}{x} - x \leq f(x) \leq 1 + x.$$

$$\text{Έχουμε } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\eta \mu x}{x} - x \right) = 1 - 0 = 1 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + x) = 1 + 0 = 1 \text{ οπότε από κριτήριο}$$

παρεμβολής είναι $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$ και επομένως $f(0) = 1$

Θέμα 36°

Η σχέση ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ οπότε και για $x = x_0$ και έχουμε :

$$f^2(x_0) + g^2(x_0) \leq 0 \Rightarrow f(x_0) = g(x_0) = 0$$

Επίσης $f^2(x) \leq f^2(x) + g^2(x) \leq (x - x_0)^2$ οπότε

$$f^2(x) \leq (x - x_0)^2 \Rightarrow |f(x)| \leq |x - x_0| \Rightarrow -|x - x_0| \leq f(x) \leq |x - x_0| \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |x - x_0| = \lim_{x \rightarrow x_0} (-|x - x_0|) = 0 \text{ οπότε από κριτήριο παρεμβολής είναι}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 = f(x_0) \text{ και άρα } f \text{ συνεχής στο } x_0.$$

Όμοια $g^2(x) \leq f^2(x) + g^2(x) \leq (x - x_0)^2$ οπότε

$$g^2(x) \leq (x - x_0)^2 \Rightarrow |g(x)| \leq |x - x_0| \Rightarrow -|x - x_0| \leq g(x) \leq |x - x_0| \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |x - x_0| = \lim_{x \rightarrow x_0} (-|x - x_0|) = 0 \text{ οπότε από κριτήριο παρεμβολής είναι}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0 = g(x_0) \text{ και άρα } g \text{ συνεχής στο } x_0.$$

Θέμα 37°

Για $x \neq 0$ είναι

$$xf(x) = 3\eta\mu x - x^2 \Rightarrow f(x) = \frac{3\eta\mu x}{x} - x.$$

Αφού είναι συνεχής στο 0 είναι $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$

$$\text{οπότε } f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3\eta\mu x}{x} - x \right) = 3 \cdot 1 - 0 = 3 \text{ και άρα}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3\eta\mu x}{x} - x, & x \neq 0 \\ 3, & x = 0 \end{cases}$$

Θέμα 38°

Για $x = 1$ έχουμε $(f(1))^2 \leq (1-1)^2 \Leftrightarrow (f(1))^2 \leq 0$ οπότε $f(1) = 0$. Επίσης

$$(f(x))^2 \leq (x-1)^2 \Leftrightarrow |f(x)| \leq |x-1| \Leftrightarrow -|x-1| \leq f(x) \leq |x-1| \text{ και αφού}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} |x-1| = \lim_{x \rightarrow 1} (-|x-1|) = 0 \text{ από κριτήριο παρεμβολής είναι } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0 = f(1)$$

δηλαδή η f είναι συνεχής στο 1.

Θέμα 39°

$$\text{Για } x \neq 0 \text{ είναι } xf(x) + f^2(x) = 6x^2 \Rightarrow \frac{xf(x)}{x^2} + \frac{f^2(x)}{x^2} = \frac{6x^2}{x^2} \Rightarrow \frac{f(x)}{x} + \left(\frac{f(x)}{x}\right)^2 = 6$$

$$\text{και αφού } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lambda, \lambda \in \mathbb{R} \text{ έχουμε } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x)}{x} + \left(\frac{f(x)}{x}\right)^2 \right) = \lim_{x \rightarrow 0} 6 \Leftrightarrow \lambda^2 + \lambda = 6$$

οπότε $\lambda = 2$ ή $\lambda = -3$.

Τέλος αφού f είναι συνεχής στο 0 είναι

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x)}{x} \cdot x \right) = \lambda \cdot 0 = 0$$

Θέμα 40°

Αφού f είναι συνεχής στο 0 είναι $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

$$\text{Για } x > 0 \text{ είναι } xf(x) < \eta\mu x \Leftrightarrow f(x) < \frac{\eta\mu x}{x} \text{ οπότε } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu x}{x} \Leftrightarrow f(0) \leq 1$$

$$\text{Για } x < 0 \text{ είναι } xf(x) < \eta\mu x \Leftrightarrow f(x) > \frac{\eta\mu x}{x} \text{ οπότε } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \geq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu x}{x} \Leftrightarrow f(0) \geq 1$$

Τελικά $f(0) = 1$