

Επαναληπτικά θέματα

ΘΕΜΑ 1ο

Έστω συνάρτηση f γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$ της οποίας η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(3,0)$ και $B(0,8)$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η C_f είναι κάτω από τον άξονα xx' και για ποιες είναι πάνω από τον xx' .

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(\ln x) > 0$

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln(x-1)$ και $g(x) = \frac{1}{x-1}$.

Να βρείτε εφόσον υπάρχουν τα παρακάτω όρια αιτιολογώντας την απάντησή σας.

$$\text{i. } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \quad \text{ii. } \lim_{x \rightarrow 1} g(x) \quad \text{iii. το } \lim_{x \rightarrow 1} (f(x) \cdot g(x)).$$

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \begin{cases} x-2, & x < 1 \\ x+1, & x > 1 \end{cases}$ και $g(x) = \frac{1}{x-1}$.

Να βρείτε εφόσον υπάρχουν τα παρακάτω όρια αιτιολογώντας την απάντησή σας.

$$\text{i. } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \quad \text{ii. } \lim_{x \rightarrow 1} g(x) \quad \text{iii. το } \lim_{x \rightarrow 1} (f(x) \cdot g(x))$$

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{\eta\mu x}{x}, & x \neq 0 \\ \alpha, & x = 0 \end{cases}$, η οποία είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 0$.

β) Να αποδείξετε ότι $f'(0) = 0$.

γ) Να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $(0, f(0))$.

ΘΕΜΑ 5ο

Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = 0$ και για την οποία ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 2$.

α) Να αποδείξετε ότι $f'(0) = 2$.

β) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

γ) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\eta\mu x}$.

ΘΕΜΑ 6ο

Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(0,1)$ σχηματίζει με τον xx' γωνία 45° .

α) Να αποδείξετε ότι $f'(0) = 1$.

β) Να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(0,1)$.

γ) Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x} = 1$.

ΘΕΜΑ 7ο

Έστω f συνάρτηση ορισμένη στο $\mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση έχει την ευθεία $(\varepsilon): y = 3x - 2$ πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$. Να βρείτε τα παρακάτω όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 3x)$.

β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

γ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - x}{xf(x) - 3x^2}$.

ΘΕΜΑ 8ο

Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση για την οποία ισχύει $f(x) = \frac{3-2x}{(x-2)^2}$ για κάθε

$x \neq 2$.

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη τη $x = 2$.

β) Να εξετάσετε αν η f είναι

i. συνεχής στο 2. ii. παραγωγίσιμη στο 2.

ΘΕΜΑ 9ο

Δίνεται μία συνεχής συνάρτηση f στο διάστημα $[-3,2]$, η οποία δεν είναι παραγωγίσιμη στο -1 . Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου της f , η C_f' , που στο διάστημα $(-1,2]$ είναι ευθύγραμμο τμήμα.

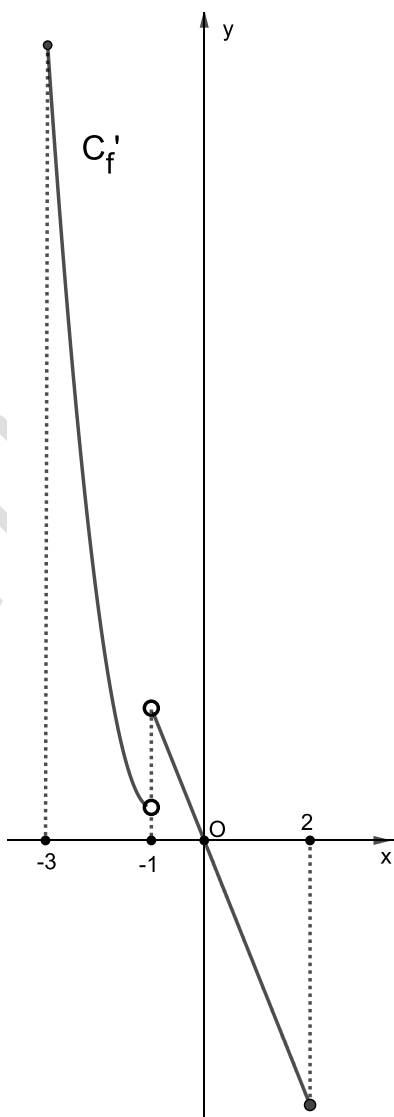
α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία της.

β) Να βρείτε:

i. Τα κρίσιμα σημεία της f , αν υπάρχουν, δικαιολογώντας την απάντησή σας.

ii. Τις θέσεις τοπικών ακροτάτων και το είδος τους.

γ) Αν η f' είναι συνεχής στο $[0,2]$ και ισχύει ότι $\int_0^2 f'(x)dx = -4$, να υπολογίσετε την τιμή $f'(2)$.



ΘΕΜΑ 10ο

Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση για την οποία ισχύει $|f(x) - 2x| \leq (x-1)^2$ για κάθε

$x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι :

α) $f(1) = 2$.

β) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$.

γ) η f είναι συνεχής στο 1.

ΘΕΜΑ 11ο

Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, κυρτή που έχει στο σημείο της $M(1,2)$ οριζόντια εφαπτομένη.

α) Να αιτιολογήσετε γιατί $f'(1) = 0$.

β) Να αιτιολογήσετε ότι $f'(x) > 0$ για κάθε $x > 1$ και $f'(x) < 0$ για κάθε $x < 1$.

γ) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ΘΕΜΑ 12ο

Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, κοίλη που παρουσιάζει ακρότατο για $x=1$.

α) Να αιτιολογήσετε γιατί $f'(1) = 0$.

β) Να αιτιολογήσετε ότι $f'(x) < 0$ για κάθε $x > 1$ και $f'(x) > 0$ για κάθε $x < 1$.

γ) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το είδος του ακροτάτου στο 1.

ΘΕΜΑ 13ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 2023 - \frac{\eta\mu x}{x}, & x \neq 0 \\ \alpha, & x = 0 \end{cases}$, η οποία είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι $\alpha = 2022$.

β) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 2022$.

ΘΕΜΑ 14ο

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln(e^x - 1) + x - 1$, $x > 0$ και $g(x) = e^{3-x} + 1$, $x \in \mathbb{R}$

α) Να τις μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

β) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) < \ln \frac{2}{e}$.

γ) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f , g έχουν μοναδικό κοινό σημείο.

δ) Να αποδείξετε ότι: i. Υπάρχει μοναδικό $x_0 > 0$ ώστε $f(x_0) = 2$.

ii. $g(x_0) = e^{x_0}$

ΘΕΜΑ 15ο

Στον παρακάτω πίνακα φαίνεται το πρόσημο της παραγώγου μιας συνάρτησης f που είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$					2		$+\infty$
	-2		0					
$f'(x)$	0	+		-		0	+	-
	0		0		0			

Αν είναι γνωστό ότι η f είναι άρτια και επιπλέον ισχύουν:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \quad f(0) = 1 \quad \text{και} \quad f(x) = 5$$

τότε:

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της.

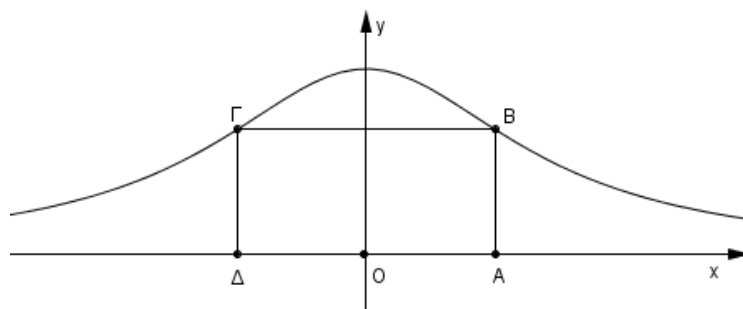
γ) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = e$.

ΘΕΜΑ 16ο

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

α) Να αιτιολογήσετε γιατί η C_f είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$ και να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών B, Γ, Δ του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$ με τη βοήθεια της τετμημένης α , $\alpha > 0$ του σημείου $A(\alpha, 0)$.



β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν $E(\alpha)$ του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$ δίνεται από τον τύπο

$$E(\alpha) = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + 1}, \quad \alpha > 0.$$

γ) Να βρείτε για ποια τιμή του α το εμβαδόν του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$ γίνεται μέγιστο.

δ) Να εξετάσετε αν υπάρχει θετικός αριθμός α , ώστε $E(\alpha) = \frac{1}{\pi}$.

ΘΕΜΑ 17ο

Έστω $f:(1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση ώστε για κάθε $x > 1$ να ισχύει

$$xf(x)f'(x) = \frac{1}{2} \text{ και } f(e) = 1.$$

α) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης.

Έστω $f(x) = \sqrt{\ln x}$, $x > 1$

β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $A(-e, 0)$ και $B(e, 1)$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της f στο B .

γ) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 1$ ισχύει $\frac{1}{x+1} < f^2(x+1) - f^2(x) < \frac{1}{x}$.

δ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f , $g(x) = -\frac{1}{2\sqrt{\ln x}}$ και τις κατακόρυφες ευθείες $x = e$, $x = e^4$.

ΘΕΜΑ 18ο

Έστω $f:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση και α, β πραγματικοί αριθμοί με $\alpha < \beta$ ώστε $2f(\alpha) + f(\beta) = 3$

α) Να διατάξετε από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο τους αριθμούς $f(\alpha)$, $f(\beta)$ και 1.

β) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(\beta)x - | \eta \mu x - x |}{\sqrt{x} + 1}$

γ) i. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ ώστε $f(x_0) = 1$,

ii. Να λύσετε την εξίσωση $f(e^{x-1} + f^{-1}(1) + x) = f(3 - x^3 + x_0)$

δ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{f(x)-1}{x-\alpha} + \frac{1-f(2\beta-x)}{x-\beta} = 12$

έχει ρίζα στο διάστημα (α, β) .

ΘΕΜΑ 19ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + \frac{x^3}{6}$. Να αποδείξετε ότι

α) η f'' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β) η f έχει ένα ακριβώς σημείο καμπής $K(x_0, f(x_0))$ με $x_0 \in (-1, -\frac{1}{2})$ που βρίσκεται στο 2ο τεταρτημόριο.

γ) η εφαπτομένη στο K έχει εξίσωση $y = (-x_0 + \frac{x_0^2}{2})x + x_0^2 - \frac{x_0^3}{3} - x_0$.

δ) $\frac{1}{e} - \frac{1}{6} < \frac{x_0^2}{2} - \frac{x_0^3}{3}$.

ΘΕΜΑ 20ο

Τα άκρα $A(x(t), 0)$ και $B(0, y(t))$ ενός ευθύγραμμου τμήματος AB μήκους 5 μονάδων, ολισθαίνουν στους άξονες Ox και Oy ενός ορθοκανονικού συστήματος, με φορά προς τα δεξιά και προς τα κάτω αντίστοιχα, όπως δείχνουν τα βέλη στο παρακάτω σχήμα. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ είναι $OA = 3$ και τη χρονική στιγμή $t = 2$ είναι $OA = 5$ όπου και τα ακινητοποιούνται. Οι συναρτήσεις $x(t), y(t)$ είναι παραγωγίσιμες.

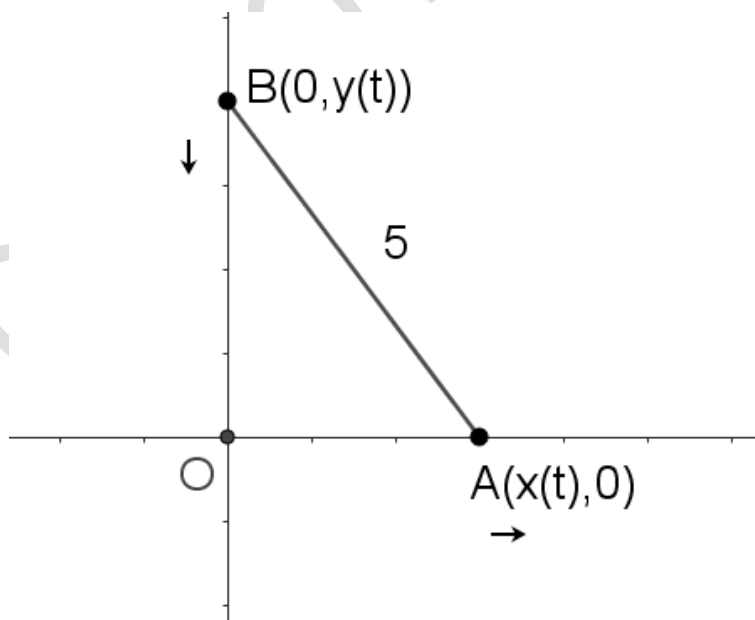
α) Να αποδείξετε ότι υπάρχει χρονική στιγμή $t_0 \in (0, 5)$ όπου το σημείο A κινείται με ρυθμό 1 μονάδα μήκους ανά μονάδα χρόνου, δηλαδή ίσο με τη μέση ταχύτητα του κατά το χρονικό διάστημα $[0, 5]$.

β) Αν είναι γνωστό ότι τη χρονική στιγμή t_0 είναι $OA = 4$, να βρείτε το ρυθμό με τον οποίο κινείται το σημείο B τη χρονική στιγμή t_0 .

γ) Έστω ότι το σημείο A κινείται με σταθερό ρυθμό. Να αποδείξετε ότι

i. $x(t) = t + 3, t \in [0, 5]$.

ii. το εμβαδόν του τριγώνου OAB γίνεται μέγιστο όταν αυτό γίνεται ισοσκελές.



ΘΕΜΑ 21ο

Έστω συνάρτηση g παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $g(0) = 1$ και

$$(1+x^2)g'(x) + 2xg^3(x) = 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

α) Να αποδείξετε ότι $g(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) Να μελετήσετε την g ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

γ) Να αποδείξετε ότι $\frac{1}{g^2(x)} = 2\ln(1+x^2) + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και κατόπιν να βρείτε τον τύπο της g .

δ) Να υπολογίσετε το $\int_0^1 g'(x) \cdot \ln(x^2 + 1) dx$.

ΘΕΜΑ 22ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x$ και το σημείο $A(0, 2)$. Αν $K(x, \ln x)$ με $x > 0$ τυχαίο σημείο της C_f και $M(x_0, \ln x_0)$ με $x_0 > 0$ το σημείο εκείνο της C_f που απέχει την ελάχιστη απόσταση από το σημείο A , να αποδείξετε ότι:

α) η απόσταση AK συναρτήσει του $x > 0$ είναι $d(x) = \sqrt{x^2 + \ln^2 x - 4\ln x + 4}$.

β) $x_0^2 + \ln x_0 - 2 = 0$.

γ) η εφαπτομένη της C_f στο M

i. είναι κάθετη στην AM .

ii. τέμνει τον άξονα xx' στο σημείο $(x_0^3 - x_0, 0)$.

ΘΕΜΑ 23ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - \ln x$. Να αποδείξετε ότι

α) η f είναι κυρτή.

β) η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο σε κάποιο $x_0 \in (\frac{1}{2}, 1)$ το οποίο είναι μοναδικό.

γ) το ολικό ελάχιστο είναι το $\frac{1}{x_0} + x_0$.

δ) η εξίσωση $f(x) = 2$ είναι αδύνατη.

ΘΕΜΑ 24ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - \ln x - \lambda x$, $x > 0$ όπου $\lambda \in \mathbb{R}$. Αν ισχύει $e - \lambda = e^e - 1 - \lambda e$, να αποδείξετε ότι :

α) η f είναι κυρτή.

β) υπάρχει ακριβώς ένα $x_0 \in (1, e)$ με $f'(x_0) = 0$.

γ) για την f' ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο $[1, e]$.

δ) η f παρουσιάζει ολικό ακρότατο στο x_0 που είναι το $e^{x_0}(1 - x_0) + 1 - \ln x_0$.

ΘΕΜΑ 25ο

Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη, για την οποία ισχύει $f(x) \geq x^2 - x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) i. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$.

ii. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν έχει ασύμπτωτες.

iii. Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq \frac{3}{4}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) Αν επιπλέον $f(1) = 1$ και $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$ να αποδείξετε ότι:

i. $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$. ii. η f δεν είναι κοίλη.

ΘΕΜΑ 26ο

Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο, και η συνάρτηση $g(x) = (x^2 - 1)f(x)$ για την οποία ισχύει $g(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

α) η g παρουσιάζει ελάχιστο για $x = 1$ και για $x = -1$ και στη συνέχεια ότι $f(1) = f(-1) = 0$.

β) $f'(1) \geq 0$ και $f'(-1) \leq 0$.

γ) η f δεν είναι κοίλη.

δ) $\int_{-1}^1 (x^3 - 3x)f'(x)dx \leq 0$.

ΘΕΜΑ 27ο

Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο για την οποία ισχύει ότι $f'(x) > f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 0$. Έστω επίσης η συνάρτηση $g(x) = e^{-x} f(x)$.

- α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
- β) Να αποδείξετε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x > 0$ και $f(x) < 0$ για κάθε $x < 0$.
- γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(|\eta\mu x| + 1) = f(|x| + 1)$.
- δ) Αν E το εμβαδόν που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f τον άξονα x' και τις ευθείες $x = 0$ και $x = 1$, να αποδείξετε ότι $E < f(1)$.

ΘΕΜΑ 28ο

Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία $f(0) = 1$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x) + 2x = f'(x) + x^2$

- α) Να αποδείξετε ότι αν $g(x) = f(x) - x^2$, τότε ισχύει
 - i. $g'(x) = g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
 - ii. $f(x) = e^x + x^2$, $x \in \mathbb{R}$
- β) Να αποδείξετε ότι
 - i. Υπάρχει μοναδικό σημείο $M(x_0, f(x_0))$, $x_0 \in (-1, 0)$ στο οποίο η εφαπτομένη της C_f είναι οριζόντια.
 - ii. Η f παρουσιάζει ελάχιστο στο x_0 και για την ελάχιστη τιμή m της συνάρτησης ισχύει $e^{-1} < m < 2$.

ΘΕΜΑ 29ο

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln^2 x$ και $g(x) = \ln x$, $x > 0$.

- α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, κυρτότητα και τα σημεία καμπής.
- β) Να βρείτε, αν υπάρχουν, τις ασύμπτωτές της C_f και να σχεδιάσετε τις C_f , C_g .
- γ) Η ευθεία $x = \alpha$, $1 < \alpha < e$ τέμνει τις C_f , C_g στα σημεία A , B .
 - i. Να βρείτε για ποια τιμή του α το μήκος του τμήματος AB γίνεται μέγιστο.
 - ii. Να αποδείξετε ότι όταν το τμήμα AB είναι μέγιστο, τότε οι εφαπτόμενες των C_f , C_g στα A , B είναι μεταξύ τους παράλληλες.

ΘΕΜΑ 30ο

Για μια συνεχή συνάρτηση $f: [-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύουν:

- $(f(x) + x)^2 = x^2(x + 1)$, για κάθε $x \in [-1, +\infty)$,
- $f(1) > -1$ και $f\left(-\frac{1}{2}\right) < \frac{1}{2}$.

α) Αν $g(x) = f(x) + x$, $x \in [-1, +\infty)$ τότε

- Να βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης $g(x) = 0$.
- Να αποδείξετε ότι $g(x) < 0$ για κάθε $x \in (-1, 0)$ και $g(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = x(\sqrt{x+1} - 1)$, $x \geq -1$.

γ) Αν η συνάρτηση f είναι κυρτή τότε να αποδείξετε ότι η $h(x) = f(x+1) - f(x)$, $x \in (-1, +\infty)$ είναι γνησίως αύξουσα και έπειτα ότι

$$\int_{2023}^{2024} (f(x+1) - f(x)) dx < \int_{2023}^{2024} (f(x+2) - f(x+1)) dx.$$