

Θέμα 1^ο Ερωτήσεις Σ – Λ

1. Αν f συνεχής στο $[α, β]$ και υπάρχει $χ_0 ∈ (α, β)$ με $f(χ_0) = 0$ τότε απαραίτητα $f(α) f(β) < 0$.
2. Αν για μια συνεχή συνάρτηση f με πεδίο ορισμού $\mathcal{R}$ ισχύει ότι $f(χ) \neq 0$ για κάθε $χ \in \mathcal{R}$ και $f(2) > 0$, τότε $f(χ) > 0$ για κάθε $χ \in \mathcal{R}$.
3. Αν για μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού $\mathcal{R}$ ισχύει ότι $f(χ) \neq 0$ για κάθε $χ \in \mathcal{R}$ και υπάρχουν $α, β \in \mathcal{R}$ με $f(α) f(β) < 0$, τότε η f δεν είναι συνεχής
4. Αν $f(χ)$ μια συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση με πεδίο ορισμού $(α, β)$ τότε το σύνολο τιμών της είναι το $(f(α), f(β))$.
5. Κάθε συνεχής συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ έχει μέγιστη και ελάχιστη τιμή.
6. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής και μη σταθερή σε ένα διάστημα Δ και το Δ είναι ανοιχτό τότε και το $f(\Delta)$ είναι ανοιχτό.
7. Αν $f(χ)$ μια συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση με πεδίο ορισμού $(α, β)$ τότε το σύνολο τιμών της είναι το $(f(α), f(β))$.
8. Αν για μια συνεχή συνάρτηση $f(χ)$ με πεδίο ορισμού $\mathcal{R}$ ισχύει ότι $f(χ) \neq 0$ για κάθε $χ \in \mathcal{R}$ και $f(2) > 0$, τότε $f(χ) > 0$ για κάθε $χ \in \mathcal{R}$.
9. Αν μια συνάρτηση $f(χ)$ είναι ορισμένη στο $[2, 5]$ και ισχύει $f(2) = 5$ και $f(5) = 12$ τότε υπάρχει $χ_0 \in (2, 5)$ με $f(χ_0) = 10$
10. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[α, β]$, και παίρνει δύο διαφορετικές τιμές $f(x_1), f(x_2)$ με $x_1, x_2 \in [α, β]$, τότε παίρνει όλες τις τιμές μεταξύ των $f(x_1)$ και $f(x_2)$.
11. Αν για μια συνεχή συνάρτηση f στο $\mathbb{R}$, ισχύει $f(x_1) = 1$ και $f(x_2) = 4$, τότε υπάρχει $x_0 \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = e$.
12. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[α, β]$, τότε το σύνολο τιμών της είναι $[f(α), f(β)]$.
13. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[α, β]$, τότε το σύνολο τιμών της είναι $[f(β), f(α)]$.
14. Κάθε συνεχής συνάρτηση f στο $[α, β]$ με $f(α) \neq f(β)$, παίρνει μόνο τις τιμές μεταξύ των $f(α)$ και $f(β)$.
15. Αν η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$, τότε το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα $(\lim_{x \rightarrow 0} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x))$.
16. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 με $f(x_0) \neq 0$, τότε κοντά στο x_0 οι τιμές της f είναι ομόσημες του $f(x_0)$.
17. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο διάστημα Δ , τότε η αντίστροφή της είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $f(\Delta)$.
18. Αν η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα διάστημα Δ είναι συνεχής και 1 - 1 στο Δ , τότε η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη στο Δ .
19. Κάθε συνεχής συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ έχει μέγιστη και ελάχιστη τιμή.
20. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής και μη σταθερή σε ένα διάστημα Δ και το Δ είναι ανοιχτό τότε και το $f(\Delta)$ είναι ανοιχτό.
21. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(α, β)$, τότε το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα $[\lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x), \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x)]$.
22. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[α, β]$ και το σύνολο τιμών της είναι $[f(α), f(β)]$ τότε η f είναι γνησίως αύξουσα.

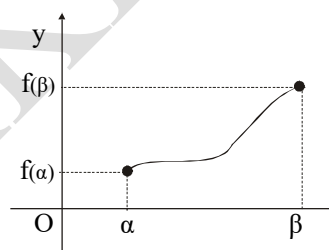
Θέμα 2^ο Ερωτήσεις αντιστοίχισης

Δίνεται μια συνάρτηση f συνεχής και γνησίως φθίνουσα σ' ένα διάστημα Δ . Να αντιστοιχίσετε κάθε στοιχείο της στήλης Α με ένα στοιχείο της στήλης Β

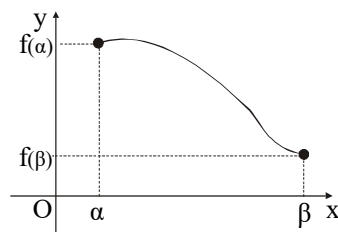
Στήλη Α	Στήλη Β
πεδίο ορισμού	σύνολο τιμών
1. $\Delta = [\alpha, \beta]$	α. $(\lim_{x \rightarrow \beta} f(x), \lim_{x \rightarrow \alpha} f(x))$
2. $\Delta = [\alpha, \beta)$	β. $[f(\alpha), \lim_{x \rightarrow \beta} f(x))$
3. $\Delta = (\alpha, \beta]$	γ. $(\lim_{x \rightarrow \beta} f(x), f(\alpha)]$
4. $\Delta = (\alpha, \beta)$	δ. $[f(\beta), f(\alpha)]$
	ε. $[f(\beta), \lim_{x \rightarrow \alpha} f(x))$
	ζ. $(\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x), f(\beta)]$

Θέμα 3^ο Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

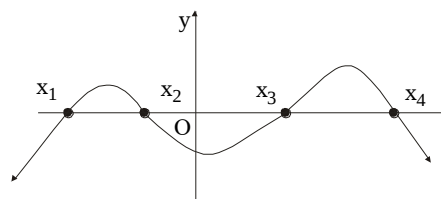
1. Η γραφική παράσταση της συνεχούς συνάρτησης f είναι αυτή που φαίνεται στο σχήμα. Το σύνολο τιμών της f είναι
- A. $(f(\alpha), f(\beta))$ B. $[f(\alpha), f(\beta)]$
 Γ. $(f(\beta), f(\alpha))$ Δ. $[f(\beta), f(\alpha)]$
 E. κανένα από τα προηγούμενα



2. Η γραφική παράσταση της συνεχούς συνάρτησης f είναι αυτή που φαίνεται στο σχήμα. Το σύνολο τιμών της f είναι
- A. $(f(\alpha), f(\beta))$ B. $[f(\alpha), f(\beta)]$
 Γ. $(f(\beta), f(\alpha))$ Δ. $[f(\beta), f(\alpha)]$
 E. κανένα από τα προηγούμενα

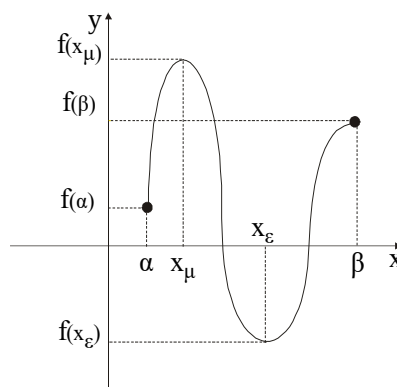


3. Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f φαίνεται στο σχήμα, τότε **δεν** ισχύει ότι
- A. στο διάστημα (x_1, x_2) η $f(x) > 0$
 B. στο διάστημα (x_2, x_3) η $f(x) < 0$
 Γ. στο διάστημα (x_3, x_4) η $f(x) > 0$
 Δ. στα διαστήματα $(-\infty, x_1)$ και $(x_4, +\infty)$ η $f(x) < 0$
 E. στο διάστημα (x_2, x_4) η $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον δύο ρίζες



4. Η γραφική παράσταση της συνεχούς συνάρτησης f είναι αυτή που φαίνεται στο σχήμα. Το σύνολο τιμών της f είναι

A. $[f(\alpha), f(\beta)]$ B. $(f(x_\epsilon), f(x_\mu))$
 Γ. $[f(\beta), f(\alpha)]$ Δ. $[f(x_\epsilon), f(x_\mu)]$
 E. κανένα από τα προηγούμενα



5. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και γνησίως φθίνουσα. Τότε το σύνολο τιμών της f είναι
- A. $[f(\alpha), f(\beta)]$ B. $[f(\beta), f(\alpha)]$ Γ. $[\beta, \alpha]$ Δ. $(f(\beta), f(\alpha))$ E. το $\mathbb{R}$

Θέμα 4^ο

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^3 - \alpha x^2 + \beta = 0$ με $\beta > 0$ και $\beta + 8 < 4\alpha$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο $(-2, 2)$.

Θέμα 5^ο

Αν $f(x), g(x)$ είναι δύο συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha, \beta]$ για τις οποίες ισχύει $f(\alpha) + f(\beta) = g(\alpha) + g(\beta)$ να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in [\alpha, \beta]$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = g(\xi)$

Θέμα 6^ο

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\ln x - \frac{1}{x-1} - 3x = 0$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο $(0, 1)$

Θέμα 7^ο

Θεωρούμε την εξίσωση: $\frac{\kappa^2}{x} + \frac{\lambda^2}{x+1} + \frac{\mu^2}{x-1} = 0$, $\kappa, \lambda, \mu \neq 0$

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ακριβώς δύο ρίζες στο διάστημα $(-1, 1)$.

β) Αν οι δύο ρίζες είναι οι ρ_1, ρ_2 , να δείξετε ότι: $\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = \frac{\mu^2 - \lambda^2}{\kappa^2}$.

Θέμα 8ο

Αν $f(x)$ μια συνάρτηση συνεχής στο $\Delta = [\alpha, \beta]$ με $\alpha\beta > 0$ και $f(\Delta) = [\alpha, \beta]$ να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\chi_0 \in [\alpha, \beta]$ τέτοιο ώστε να ισχύει

$$\frac{f(\chi_0)}{\alpha} = \frac{\beta}{\chi_0}.$$

Θέμα 9ο

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2x\eta\mu\frac{1}{x}=1$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο $(0, +\infty)$

Θέμα 10ο

Να δείξετε ότι: η εξίσωση $x^3 - 6x^2 + 3 = 0$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο $(-1, 1)$.

Θέμα 11ο

Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x$ και

$g(x) = \sin 2x$ τέμνονται σε ένα τουλάχιστον σημείο του διαστήματος $(0, \frac{\pi}{4})$.

Θέμα 12ο

Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[a, b]$ και $x_1, x_2, x_3 \in [a, b]$. Αποδείξτε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in [a, b]$ τέτοιο ώστε: $3f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) = 9f(\xi)$

Θέμα 13ο

Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[a, b]$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[a, b]$. Να

αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in (a, b)$ τέτοιο ώστε: $f(\xi) = \frac{f(a) + f(b) + f(\frac{a+b}{2})}{3}$

Θέμα 14ο

Να βρεθεί το πρόσημο της συνάρτησης $f(x) = 2\eta\mu x - 1$ στο $[0, 2\pi]$

Θέμα 15ο

Να βρείτε σε κάθε ερώτημα ξεχωριστά όλες τις συνεχείς συναρτήσεις f για τις οποίες ισχύει

α) $f^2(x) = 1 + x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

β) $f^2(x) = 4e^x f(x) + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 2 - \sqrt{5}$

γ) $f^2(x) - 2e^x = e^{2x} + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

δ) $f^2(x) = 3f(x) - 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

ε) $f^2(x) = 2\eta\mu x \cdot f(x) + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 1$

στ) $f^2(x) = (x-1)^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

ζ) $f^2(x) + 2\eta\mu^2 x = 2\eta\mu x \cdot f(x) + x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(\pi) < 0$, $f(-\pi) > 0$

Θέμα 16ο

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ με

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \gamma \in \mathbb{R}$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \delta \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι υπάρχει μόνο ένας αριθμός

$x_0 > 0$ τέτοιος ώστε να ισχύει: $f(x_0) + e^{x_0+1} + \ln x_0 = 1$.

Θέμα 17ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x + e^{x-1} - 1$.

α) Να δείξετε ότι είναι γνησίως αύξουσα

β) Να βρεθεί το σύνολο τιμών της

γ) Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό χ_0 τέτοιο ώστε $f(\chi_0) = 0$.

δ) Να λυθεί η εξίσωση $\ln x + e^{x-1} = 1$

Θέμα 18ο

Έστω $f: (-\infty, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2 + \frac{1}{x} + 8$

α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f

β) Να δείξετε ότι υπάρχει η f^{-1} και να δείξετε ότι είναι γνησίως φθίνουσα

γ) Να βρείτε τα $\lim_{x \rightarrow -\infty} f^{-1}(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f^{-1}(x)$ αν θεωρήσουμε γνωστό ότι η f^{-1} είναι συνεχής

δ) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f^{-1}(x) - x}{x + f^{-1}(x)}$

Θέμα 19ο

Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$, η οποία είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, -1]$

γνησίως αύξουσα στο $[-1, 1]$, γνησίως φθίνουσα στο $[1, +\infty)$ και ισχύουν

$$f(-1) = -3, \quad f(1) = 5, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

A) Να βρεθεί το σύνολο τιμών της

B) Να βρεθεί το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = \lambda$ για τις διάφορες του πραγματικού αριθμού λ .

Θέμα 20ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x + x^2 - \frac{1}{x}$.

α) Να δείξετε ότι είναι γνησίως αύξουσα

β) Να βρεθεί το σύνολο τιμών της

γ) Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό χ_0 τέτοιο ώστε $f(\chi_0) = 2022$.

δ) Να λυθεί η εξίσωση $f(x) = 0$

ε) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να δείξετε ότι η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα

στ) Να βρείτε τα $\lim_{x \rightarrow -\infty} f^{-1}(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f^{-1}(x)$ αν θεωρήσουμε γνωστό ότι η f^{-1}

είναι συνεχής.