

Θέμα 1^ο Ερωτήσεις τύπου Σ – Λ

1. Η συνάρτηση $F(x) = x \ln x - x$ είναι μια παράγουσα της συνάρτησης $f(x) = \ln x$.
2. Κάθε συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ , έχει μόνο μια παράγουσα στο Δ .
3. Αν F_1, F_2 είναι δυο παράγουσες μιας συνάρτησης f , τότε αυτές διαφέρουν κατά μια σταθερά c .
4. Ισχύει: $\int_0^a x f'(x) dx = a f(a) - \int_0^a f(x) dx$.
5. Ισχύει: $\int_a^b f(x) dx + \int_b^a f(x) dx = 0$.
6. Ισχύει: $\int_b^a f(x) g'(x) dx = [f(x) g(x)]_a^b - \int_b^a f'(x) g(x) dx$.
7. Ισχύει: $\int_a^a f(x) dx = 0$.
8. Ισχύει $\int_2^4 c dx = \int_6^8 c dx$, c σταθερά
9. Ισχύει: $\int_0^1 \eta \mu x dx = 1 - \sigma \nu 1$.
10. Αν $a \geq b$, τότε $\int_a^b (e^x + 1) dx \geq 0$.
11. Αν $f(x) > 0$, τότε ισχύει $\int_1^{\ln 2} f(x) dx > 0$.
12. Αν $\int_a^b f(x) dx \geq 0$ τότε $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, b]$.
13. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση στο $[a, b]$ και ισχύει ότι $\int_a^b f^2(x) dx = 0$.
Ισχύει ότι $f(x) = 0$ στο $[a, b]$.
14. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ με $f(x) \neq 0, x \in \mathbb{R}$. Αν ισχύει ότι $\int_a^b f^2(x) dx = 0$ τότε $a = b$.
15. Αν η f είναι συνεχής στο $[1, 3]$, τότε ισχύει ότι $\int_1^3 f(x) dx < \int_1^2 f(x) dx + \int_2^3 f(x) dx$
16. Ισχύει: $\int_0^{2\pi} \eta \mu x dx = 0$.
17. Ισχύει: $\int_1^{x^2} \frac{1}{t} dt = 2 \ln x, x > 0$.
18. Αν $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx$, τότε $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$.
19. Η ιδιότητα του ορισμένου ολοκληρώματος $\int_a^b f(x) dx = \int_a^\gamma f(x) dx + \int_\gamma^b f(x) dx$,
ισχύει μόνο εφόσον $a < \gamma < b$.
20. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ και $a, b, \gamma \in \Delta$. Ισχύει
ότι $\int_a^\gamma f(x) dx = \int_a^b f(x) dx - \int_b^\gamma f(x) dx$

21. Έστω f, g συνεχείς συναρτήσεις στο $[a, \beta]$. Ισχύει ότι

$$\int_a^\beta f(x)g(x)dx = \int_a^\beta f(x)dx \cdot \int_a^\beta g(x)dx$$

22. Έστω f, g συνεχείς συναρτήσεις σε ένα διάστημα Δ και $f(x) \leq g(x)$ στο

$$\Delta. \text{ Τότε για κάθε } a, \beta \in \Delta \text{ είναι } \int_a^\beta f(x)dx \leq \int_a^\beta g(x)dx$$

23. Έστω f, g συνεχείς συναρτήσεις σε ένα διάστημα Δ και $f(x) \leq g(x)$ στο

$$\Delta. \text{ Τότε για κάθε } a, \beta \in \Delta \text{ με } a < \beta \text{ είναι } \int_a^\beta f(x)dx \leq \int_a^\beta g(x)dx$$

24. Αν $a < \beta$, τότε ισχύει ότι $\left| \int_a^\beta f(x) dx \right| \leq \int_a^\beta |f(x)| dx$.

25. Ισχύει: $\int_{\ln a}^{\ln \beta} e^x dx = \beta - a, a, \beta > 0$.

26. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0, 1]$ και $f(0) = f(1)$, τότε $\int_0^1 f'(x) dx = 0$.

27. Αν $\int_0^5 f(x) dx = 10$, το ελάχιστο της f στο διάστημα $[0, 5]$ δεν μπορεί να είναι 3.

$$28. \int_1^5 \ln x dx = \int_5^1 \ln \frac{1}{x} dx$$

Θέμα 2ο Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. Το ολοκλήρωμα $I = \int_a^\beta (f(x)g(x))' dx$ ισούται με

- A. $f'(\beta)g(\beta) - f(a)g'(a)$ B. $f(\beta)g(\beta) - f(a)g(a)$
 Γ. $(f \cdot g)(a) - (f \cdot g)(\beta)$ Δ. $f(\beta)g'(\beta) - f'(a)g(a)$ E. $2(\beta - a)$

2. Αν $I = \int_0^{\pi/2} \eta\mu^2 x dx$ και $J = \int_0^{\pi/2} \sigma\upsilon\nu^2 x dx$ και $K = I + J$, τότε το K είναι ίσο με

- A. 1 B. 2 Γ. π Δ. 2π E. $\frac{\pi}{2}$

3. Το ολοκλήρωμα $I = \int_a^\beta f'(g(x))g'(x) dx$ είναι ίσο με

- A. $f'(g(\beta)) - f'(g(a))$ B. $f(g'(\beta)) - f(g'(a))$
 Γ. $f(g(\beta)) - f(g(a))$ Δ. $g(\beta) - g(a)$ E. $f(\beta) - f(a)$

4. Το $\int_a^\beta e^{x^2} dx$ είναι πάντα : A. θετικό B. αρνητικό

- Γ. ίσο με το 0 Δ. θετικό αν $\beta > a$ E. είναι θετικό αν $\beta < a$

5. Έστω f μια περιττή συνάρτηση. Τότε το ολοκλήρωμα $I = \int_{-a}^a f(x) dx$ είναι ίσο με

- A. 2 B. $2 \int_0^a f(x) dx$ Γ. 0 Δ. $2a$ E. $-2 \int_{-a}^a f(x) dx$

Θέμα 3^ο Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

Συνάρτηση f	Μια παράγουσα της f, F	$\int_a^b f(x) dx$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x}$	$\int_1^2 f(x) dx = F(2) - F(1)$
$f(x) = \eta\mu 2x$		$\int_0^\pi f(x) dx = \dots\dots\dots$
$f(x) = e^{3x}$		$\int_0^1 f(x) dx = \dots\dots\dots$
$f(x) = \frac{1}{\eta\mu^2 x}$		$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} f(x) dx = \dots\dots\dots$
$f(x) = \ln x$		$\int_1^e f(x) dx = \dots\dots\dots$
$f(x) = \frac{1}{x-1}$		$\int_0^{1/2} f(x) dx = \dots\dots\dots$
$f(x) = x^3 + 1$		$\int_{-2}^3 f(x) dx = \dots\dots\dots$
$f(x) = \frac{1}{x^2} - 1$		$\int_1^2 f(x) dx = \dots\dots\dots$
$f(x) = c$		$\int_a^b f(x) dx = \dots\dots\dots$

Θέμα 4^ο Στη στήλη Α φαίνονται οι παράγουσες κάποιων συναρτήσεων και στη στήλη Β οι συναρτήσεις αυτές. Να γίνει αντιστοίχιση.

Στήλη Α	Στήλη Β
παράγουσα F	συνάρτηση f
1. $\frac{1}{3} \sin 3x + 3$	α. $\frac{1}{3} \eta\mu 3x$
2. $\epsilon\phi x + \ln 2$	β. $2^x \ln 2$
3. $\ln 3x - 2 + 2$	γ. $\frac{1}{\sin^2 x}$
4. e^{2x+3}	δ. e^{2x+3}
5. 2^x	ε. $-\eta\mu 3x$
6. $\frac{2^x}{\ln 2}$	ζ. $\frac{3}{3x-2}$
	η. $\frac{2}{3x-2}$
	θ. 2^x
	ι. $2e^{2x+3}$

Θέμα 5^ο Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

	Γενική λύση $f(x)$	Αρχική συνθήκη	Μερική λύση $f(x)$ με εύρεση c
$f'(x) = 3x + 2$		$f(0) = 2$	
$f'(x) = \eta\mu x$		$f(0) = 1$	
$f'(x) = e^{-x}$		$f(0) = 0$	
$f'(x) = \frac{1}{x}, x > 0$		ηf διέρχεται από το $(1, e)$	
$f'(x) = x^2$		$f(0) = -1$	
$f'(x) = 5$		$f(2) = 8$	
$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}, x > 0$		$f(1) = -3$	

Θέμα 6^ο Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

$f(x)$	$F(x) + c$
$2x + 5$	
$x^3 + x^2 + 1$	
$\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2}$	
$e^x + \frac{1}{x}$	
$2\eta\mu x - 3\sigma\upsilon\nu x$	
$\frac{1}{\eta\mu^2 x} + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$	
$(x + 1)^9$	
$(x^2 - 3x + 5)^2 (2x - 3)$	
$\eta\mu x \sigma\upsilon\nu^3 x$	
$x e^{x^2 + 1}$	
$\frac{1}{2x + 1}$	
$\frac{2x + 1}{x^2 + x + 1}$	
$\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$	

Θέμα 7^ο

Αν F είναι μια παράγουσα της f στο $\mathbb{R}$, τότε να αποδείξετε ότι και η συνάρτηση

$$G(x) = \frac{1}{\alpha} F(\alpha x + \beta) \text{ είναι μια παράγουσα της } h(x) = f(\alpha x + \beta), \quad \alpha \neq 0 \text{ στο } \mathbb{R}.$$

Θέμα 8^ο

Θεωρείται γνωστό ότι ο ρυθμός με τον οποίο διαδίδεται μια είδηση σε μια πόλη με συνολικό πληθυσμό A είναι ανάλογος του αριθμού των κατοίκων που δεν γνωρίζουν την είδηση. Να εκφράσετε τον αριθμό των κατοίκων που έχουν πληροφορηθεί την είδηση ως συνάρτηση του χρόνου t .

Θέμα 9^ο

Αν $P(t)$ είναι ο πληθυσμός μιας χώρας, όπου t ο χρόνος σε έτη, ένας «νόμος της αύξησης» εκφράζεται από τη σχέση $P'(t) = \kappa P(t)$ (1), όπου $\kappa > 0$ σταθερά που εξαρτάται από πολλούς παράγοντες. Αν θεωρήσουμε ότι η συνάρτηση $P(t)$ είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο: α) Να βρείτε τη συνάρτηση $P(t)$.

β) Αν υποθέσουμε ότι για τον πληθυσμό της Ελλάδας ισχύει ο νόμος της αύξησης από το 1920 και μετά, που ο πληθυσμός ήταν 5.000.000 και ότι το 1990 ο πληθυσμός ήταν 10.000.000, να βρεθεί η σταθερά κ για την Ελλάδα.

Θέμα 10^ο

Αν f μια συνεχής συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ με $\int_2^3 f(x)dx = 2$, $\int_1^3 f(x)dx = 4$ και

$\int_1^7 f(x)dx = 10$ να βρείτε τα παρακάτω ολοκληρώματα:

$$\alpha) \int_3^2 f(x)dx. \quad \beta) \int_3^7 f(x)dx. \quad \gamma) \int_7^2 f(x)dx. \quad \delta) \int_1^3 (f(x) - x)dx.$$

Θέμα 11^ο

Η εφαπτομένη του διαγράμματος μιας συνάρτησης f στο σημείο με τετμημένη $x = \alpha$ σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\frac{\pi}{3}$ και στο σημείο με τετμημένη $x = \beta$ γωνία $\frac{\pi}{4}$.

Αν η f'' είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{\beta} f''(x) dx$.

Θέμα 12^ο Υπολογίστε τα ολοκληρώματα :

$$\text{i)} \int_4^5 \frac{2x-5}{x^2-5x+6} dx \quad \text{ii)} \int_{-1}^1 f(x) dx, \text{ όπου } f(x) = \begin{cases} 2x-1, & x \leq 0 \\ 3x^2-1, & x > 0 \end{cases}$$

$$\text{iii)} \int_0^5 |x^2-5x+6| dx \quad \text{iv)} \int_{-2}^2 (|x|+|x-1|) dx .$$

Θέμα 13^ο Υπολογίστε τα ολοκληρώματα :

$$\text{i)} \int_1^2 \frac{2x^2-5x+3}{2x^2} dx \quad \text{ii)} \int_{-1}^1 \sqrt[3]{x^2} dx \quad \text{iii)} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \varepsilon \phi^2 x dx \quad \text{iv)} \int_0^1 (x^2 e^x + 2x e^x) dx$$

$$\text{v)} \int_1^2 \frac{x e^x - e^x}{x^2} dx \quad \text{vi)} \int_0^1 (2x+1) \sigma \nu (x^2+x+3) dx \quad \text{vii)} \int_e^{e^2} \frac{1}{x \sqrt{\ln x}} dx \quad \text{viii)} \int_0^1 \frac{1}{2e^{-x}+1} dx$$

Θέμα 14^ο

$$\text{Να δείξετε ότι } \int_0^{\pi} \frac{2}{1+\sigma \nu^2(x+2)} dx \geq \pi .$$

Θέμα 15^ο

Να βρείτε τη συνεχή συνάρτηση $g : [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$\int_1^3 e^{4g(x)} dx + 2 = 2 \cdot \int_1^3 e^{2g(x)} dx$$

Θέμα 16^ο

Έστω συνάρτηση f 2 φορές παραγωγίσιμη με συνεχή 2^η παράγωγο στο

$[\alpha , \beta]$ για την οποία ισχύει ότι : $\int_{\alpha}^{\beta} x f''(x) dx = 0$. Να δείξετε ότι :

Οι εφαπτομένες της γραφικής παράστασης της f στα σημεία με τετμημένες α και β τέμνονται πάνω στον $\psi\psi'$

Θέμα 17^ο

Έστω f συνεχής συνάρτηση στο $[0, \alpha]$, $\alpha > 0$, τέτοια ώστε $\int_0^{\alpha} f(x) dx = \frac{\alpha^2}{2}$.

Αποδείξτε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, \alpha)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = \xi$.

Θέμα 18°

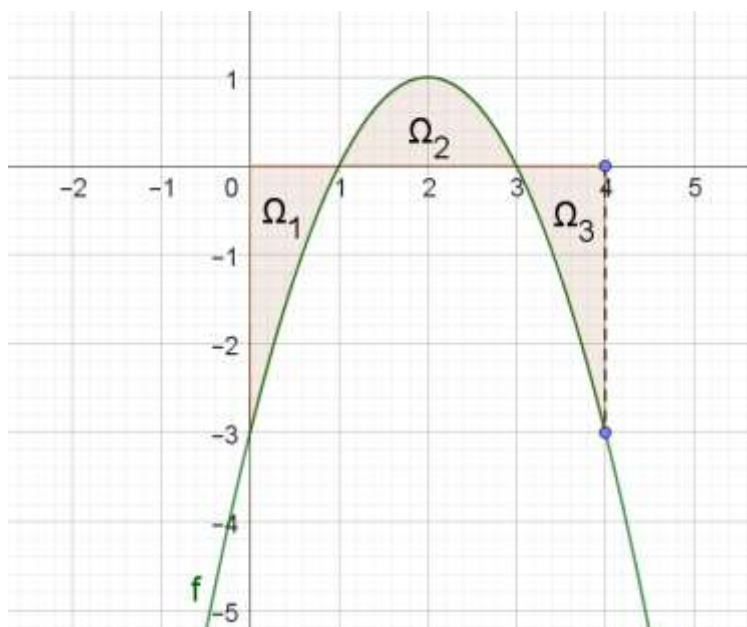
Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Για τα εμβαδά των περιοχών $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ του παρακάτω

σχήματος ισχύει $E(\Omega_1) = E(\Omega_2) = E(\Omega_3) = \frac{4}{3}$.

α) Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα:

i. $\int_0^1 f(x)dx$. ii. $\int_1^3 f(x)dx$. iii. $\int_1^4 f(x)dx$.

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\int_0^{2023} f(x)dx - \int_4^{2023} f(x)dx$.



Θέμα 19°

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 1 + \frac{1}{x^2}$.

α) Να μελετηθεί και να παρασταθεί γραφικά.

β) Να αποδείξετε ότι $\frac{5}{4} \leq \int_1^2 f(x) dx \leq 2$.

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 2$ και $x = 4$.

δ) Να προσδιορίσετε την κάθετη ευθεία στον άξονα $x'x$ που χωρίζει το χωρίο του προηγούμενου ερωτήματος σε δύο ισεμβαδικά χωρία.

Θέμα 20°

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 4x + 3$. Να βρεθεί το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται :

- α) από την C_f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 2$, $x = 3$
- β) από την C_f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 0$, $x = 1$
- γ) από την C_f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = -1$, $x = 4$
- δ) από την C_f και τον άξονα $x'x$.

Θέμα 21°

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 2x^2 + 5x$, $g(x) = x^2 + 8x - 2$. Να βρεθεί το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται :

- α) από την C_f , την C_g και τις ευθείες $x = 0$, $x = 4$
- β) από την C_f , την C_g και τις ευθείες $x = -1$, $x = 1$
- γ) από την C_f και την C_g .

Θέμα 22°

Να βρείτε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = e^x$, τον άξονα $y'y$ και τις ευθείες $y = x$, $y = e$.

Θέμα 23°

Δίνεται συνάρτηση $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο $[0, 2]$, παραγωγίσιμη στο $(0, 2)$ και ισχύουν $f(1) = 1$ και $f(x) \cdot f'(x) = -x + 1$, για κάθε $x \in (0, 2)$.

- α) Να αποδείξετε ότι $f^2(x) = -x^2 + 2x$ για κάθε $x \in [0, 2]$.
- β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \sqrt{-x^2 + 2x}$ για κάθε $x \in [0, 2]$.
- γ) Αφού αιτιολογήσετε ότι η γραφική παράσταση της f είναι ημικύκλιο με κέντρο $K(1, 0)$ και ακτίνα 1, να τη σχεδιάσετε σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων.

- δ) Να υπολογίσετε το $\int_0^2 f(x) dx$.

Θέμα 24°

Δίνεται η πολυωνυμική συνάρτηση $P(x) = x^3 + 3x^2 - \lambda x + 1$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η $P(x)$ παρουσιάζει σημείο καμπής για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου καμπής K .

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η $P(x)$ παρουσιάζει τοπικά ακρότατα και να προσδιορίσετε το είδος τους.

γ) Έστω ότι $K(-1, \lambda + 3)$ και ότι η $P(x)$ παρουσιάζει τοπικά ακρότατα στις θέσεις x_1, x_2 , με $x_1 < -1 < x_2$.

i. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της C_p στο σημείο K και κατόπιν να αιτιολογήσετε ότι βρίσκεται στο 2ο και 4ο τεταρτημόριο.

ii. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν E_1 που περικλείεται μεταξύ των (ε), C_p και των ευθειών $x = x_1, x = -1$ είναι ίσο με το εμβαδόν E_2 που περικλείεται μεταξύ των (ε), C_p και των ευθειών $x = x_2, x = -1$.

Θέμα 25°

Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο, η οποία είναι κυρτή και ισχύει $f(1) = f'(1) = 2$.

α) Να βρεθεί η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $(1, f(1))$ και κατόπιν να αποδείξετε ότι $f(x) \geq 2x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

γ) Να αποδείξετε ότι : i. $\int_0^1 f(x) dx > 1$ ii. $\int_0^1 x f'(x) dx < 1$.

Θέμα 26°

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

α) Να τη μελετήσετε ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής

β) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f που διέρχεται από το $A(-1, 0)$

γ) Να δείξετε ότι $\int_0^1 f(x) dx > \frac{3\sqrt{2}}{4}$

Θέμα 27°

$$\text{Δίνονται οι συναρτήσεις } f(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu x}{x} & , \quad x \in [-\pi, 0) \cup (0, \pi] \\ 1 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

$$\text{και } \phi(x) = x \sin x - \eta\mu x, \quad x \in [-\pi, \pi].$$

α) Να αποδείξετε ότι η ϕ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-\pi, \pi]$ και να βρείτε το πρόσημό της.

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

γ) Να βρείτε τις τιμές του $\kappa \in (-\pi, \pi)$ για τις οποίες ισχύει $\int_0^{\kappa} \phi(x) dx = 0$.

Θέμα 28°

Έστω συνάρτηση $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο για την οποία

$$\text{ισχύει } f(0) = 1 \text{ και } \int_0^1 (f'(x))^2 dx + \int_0^1 f^2(x) dx = f^2(1) - 1$$

i. Να αποδείξετε ότι $f(x) = e^x$ για κάθε $x \in [0, 1]$.

ii. Να βρείτε την εφαπτομένη (ε) της C_f που διέρχεται από την αρχή των αξόνων iii.

Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , τον άξονα xx' , την εφαπτομένη (ε) και την ευθεία $x = -1$

Θέμα 29°

Έστω μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία διέρχεται από το σημείο $(0, 1)$ και σε κάθε σημείο της γραφικής της παράστασης ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της είναι διπλάσιος της τεταγμένης της.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = e^{2x}$.

β) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f που διέρχεται από την αρχή των αξόνων είναι η ευθεία (ε): $y = 2ex$.

γ) Να βρείτε το εμβαδόν της επιφάνειας που περικλείεται από τη C_f , την ευθεία

(ε), τον άξονα xx' και την ευθεία $x = \lambda$, όπου $\lambda < 0$ είναι $E(\lambda) = \frac{e}{4} - \frac{e^{2\lambda}}{2}$.

δ) Να βρείτε το $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} E(\lambda)$

Θέμα 30°

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνεχούς και γνησίως αύξουσας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $[0,1]$, η οποία διέρχεται από τα σημεία $(0,0)$ και $(1,1)$. Το χωρίο Ω περικλείεται από τον άξονα yy' την ευθεία $y=1$ και τη γραφική παράσταση της f .

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1} .

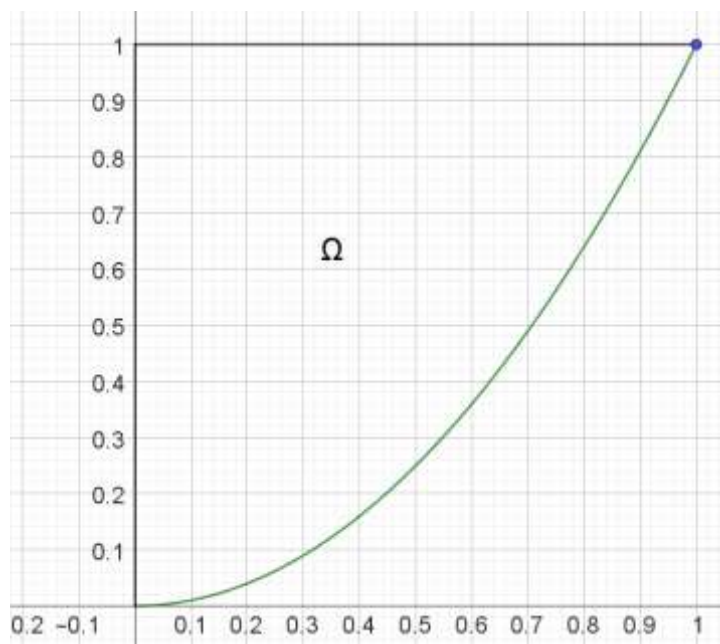
β) Να μεταφέρετε στην κόλλα σας το παρακάτω σχήμα και σχεδιάσετε σε αυτό τη γραφική παράσταση της f^{-1} .

γ) Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 f(x)dx < \frac{1}{2}$.

δ) Αν θεωρήσουμε ότι η f^{-1} είναι συνεχής αξιοποιώντας το παρακάτω σχήμα να αποδείξετε ότι

i. $\int_0^1 f^{-1}(x)dx = 1 - \int_0^1 f(x)dx$.

ii. $E(\Omega) = \int_0^1 f^{-1}(x)dx$, όπου $E(\Omega)$ το εμβαδόν του χωρίου Ω .



Θέμα 31^ο

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη, κυρτή, γνησίως αύξουσα και διέρχεται από τα σημεία $A(1,2)$ και $B(2,4)$.

α) Να αποδείξετε αλγεβρικά ότι για το εμβαδόν της γραμμοσκιασμένης περιοχής Ω , ισχύει $2 < E(\Omega) < 3$.

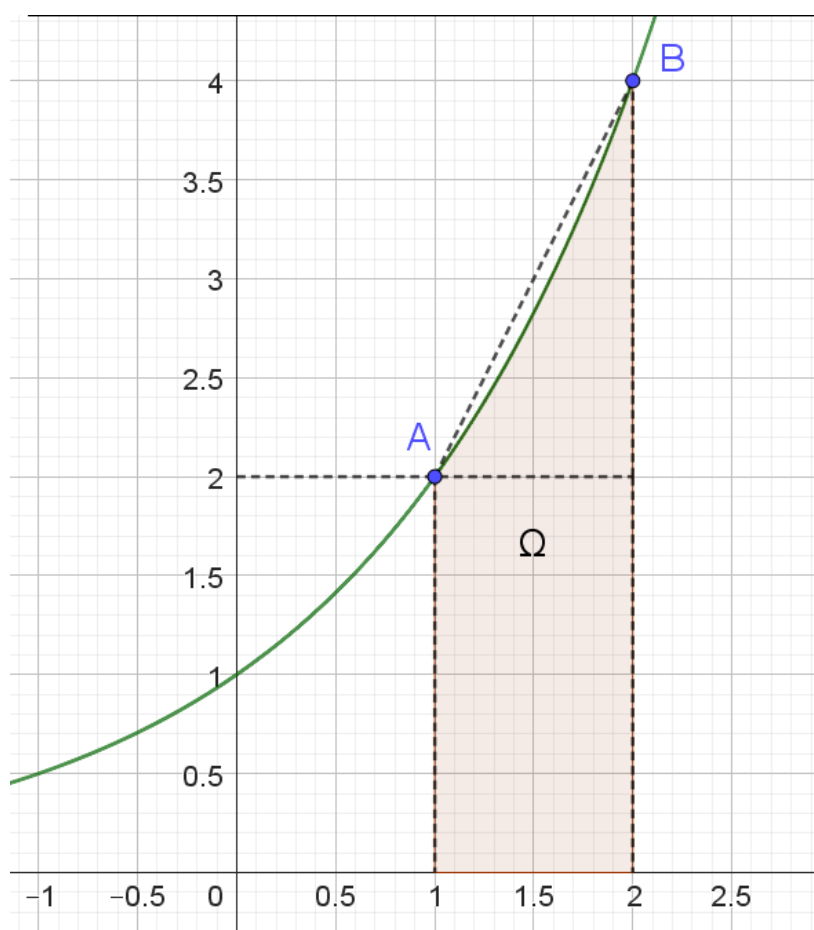
β) Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά με βάση το παρακάτω σχήμα την ανισότητα $2 < E(\Omega) < 3$.

γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $\xi \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $\int_1^2 f(x)dx = f(\xi)$.

δ) Ένας μαθητής παρατηρώντας το παρακάτω σχήμα διατύπωσε τον εξής ισχυρισμό:

«Η ευθεία $x = \frac{3}{2}$ χωρίζει το χωρίο Ω σε δύο ισεμβαδικά χωρία.»

Να εξετάσετε αν ο ισχυρισμός του μαθητή είναι σωστός αιτιολογώντας την απάντησή σας.



Θέμα 32°

Έστω $I = \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta \mu^2 x dx$ και $J = \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma \nu^2 x dx$.

α) Να αποδείξετε ότι $I + J = \frac{\pi^2}{4}$.

β) Με χρήση της αντικατάστασης $u = \frac{\pi}{2} - x$ να αποδείξετε ότι $I = J$ και κατόπιν ότι

$$I = J = \frac{\pi^2}{8}.$$

γ) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{\pi}{2} \eta \mu^2 x \text{ στο διάστημα } \left[0, \frac{\pi}{2}\right]. \text{ Η ευθεία } OA \text{ τέμνει τη } C_f \text{ στα σημεία } O(0,0)$$

, $A\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $K(x_0, f(x_0))$ και ορίζει με τη C_f τα χωρία Ω_1, Ω_2 . Να αποδείξετε ότι :

i. το εμβαδόν που περικλείεται μεταξύ της C_f , του άξονα yy' και της ευθείας

$$y = \frac{\pi}{2} x \text{ είναι το } J.$$

ii. τα εμβαδά των χωρίων Ω_1, Ω_2 είναι ίσα .

iii. να δείξετε ότι το K είναι σημείο καμπής και ότι $x_0 = \frac{\pi}{4}$

