

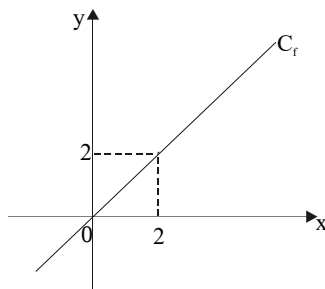
Θέμα 1^ο Χαρακτηρίστε με Σ ή Λ τις παρακάτω προτάσεις

- Μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, αν το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ είναι πραγματικός αριθμός.
- Αν ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$ ή $-\infty$, τότε η f **δεν** είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .
- Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 \in \mathbb{R}$, τότε ισχύει $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{h}$.
- Αν ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \neq \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, τότε η f **δεν** είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .

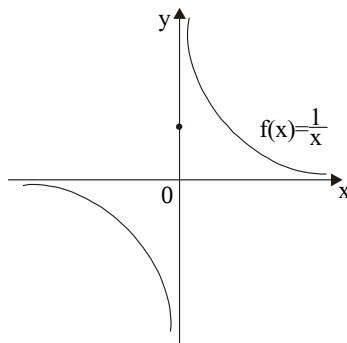
5. Αν $f(x) = e^x$, τότε $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x_0+h} - e^{x_0}}{h}$.

6. Η $f(x) = \sqrt{x}$ είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της

7. Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f δίνεται στο σχήμα. Η παράγωγος της f στο $x_0 = 2$ είναι ίση με 1.



8. Η συνάρτηση, της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο σχήμα, έχει παράγωγο στο $x_0 = 0$.

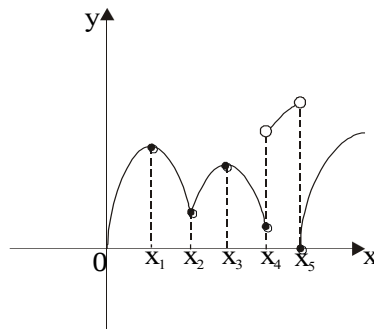


- Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε θα είναι συνεχής στο x_0 .
- Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 , τότε θα είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .
- Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο x_0 , τότε δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .
- Αν μια συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε δεν είναι συνεχής στο x_0 .
- Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε η f' είναι συνεχής στο x_0 .
- Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο 2, τότε $[f(2)]' = f'(2)$.
- $(\ln 5)' = \frac{1}{5}$
- $(e^{\phi \chi})' = 1 + e^{\phi^2 \chi}$
- $(f(g(x)))' = f'(x)g'(x)$
- Αν για τις παραγωγίσιμες συναρτήσεις f, g ισχύει ότι $f(0) = 4, f'(0) = 3, f'(5) = 6, g(0) = 5, g'(0) = 1, g'(4) = 2$ τότε $(f \circ g)'(0) = (g \circ f)'(0)$

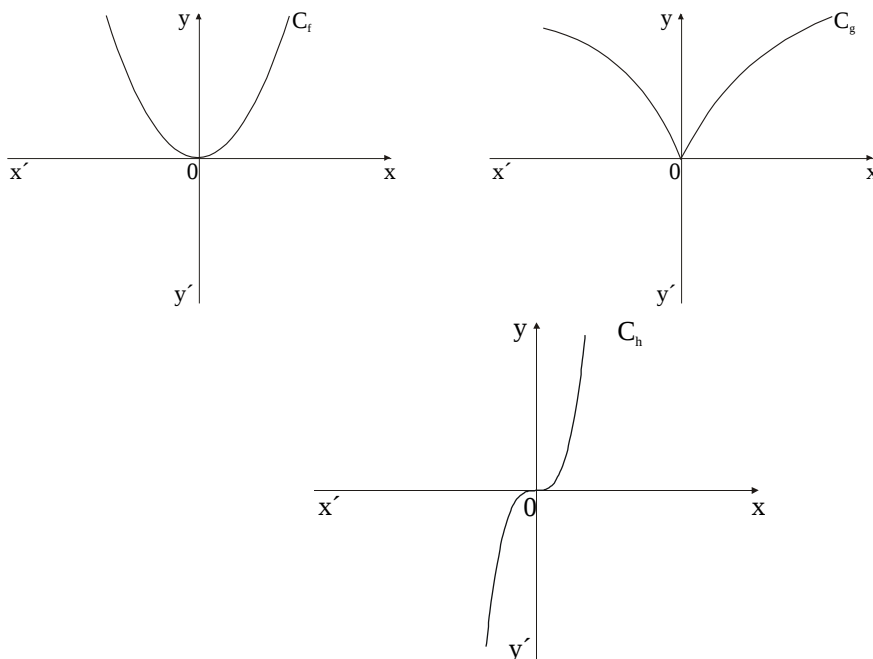
19. Η συνάρτηση $f(x) = a^x$, $a > 0$, είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $(a^x)' = x a^{x-1}$.
20. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, τότε ισχύει $(f(f(x)))' = (f'(x))^2$.
21. Αν το άθροισμα $f + g$ δύο συναρτήσεων είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση στο x_0 , τότε και οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 .
22. Αν η συνάρτηση $f(g(x))$ είναι παραγωγίσιμη, τότε οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες.
23. Ισχύει $\left. \frac{dc}{dx} \right|_{x=x_0} = 0$, όπου c σταθερά και $x_0 \in \mathbb{R}$.
24. Αν η συνάρτηση f είναι πολυωνυμική n -οστού βαθμού, τότε η συνάρτηση f' είναι επίσης πολυωνυμική $n-1$ βαθμού.
25. Αν $f'(x) = 3x^2$, τότε ισχύει πάντα $f(x) = x^3$.

Θέμα 2^ο Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. Αν $f(x) = \eta \mu^2 x$ τότε η $f'(x)$ ισούται με
 α) $2\eta \mu x$ β) $2\sigma \nu x$ γ) $2\eta \mu x \sigma \nu x$ δ) $-2\eta \mu x \sigma \nu x$ ε) $\sigma \nu^2 x$
2. Η παράσταση $(\sigma \nu \frac{\pi}{3})'$ ισούται με
 α) $\frac{1}{2}$ β) $-\frac{1}{2}$ γ) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ δ) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ε) 0
3. Το $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{h+1} - e}{h}$ ισούται με
 α) 1 β) -1 γ) e δ) $-e$ ε) 0
4. Το $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h}$ ισούται με
 α) $\frac{1}{x^2}$ β) $-\frac{2}{x^2}$ γ) $-\frac{1}{x^2}$ δ) $-\frac{2}{x}$ ε) 0
5. Η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in [0, +\infty)$ είναι παραγωγίσιμη
 α) στο πεδίο ορισμού της β) στο $x_0 = 0$ γ) στο $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ δ) στο $(0, +\infty)$
 ε) σε κανένα σημείο του πεδίου ορισμού της
6. Η γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης f είναι αυτή που φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Τότε **λάθος** είναι ότι
 Α. η f είναι παραγωγίσιμη στο x_1
 Β. η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_2
 Γ. η C_f δέχεται εφαπτομένη στο x_3
 Δ. η f είναι παραγωγίσιμη στο x_4
 Ε. η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_5



7. Δίνονται οι συναρτήσεις f , g , h των οποίων οι γραφικές παραστάσεις φαίνονται στα παρακάτω σχήματα.



Στο σημείο $x_0 = 0$ δεν είναι παραγωγίσιμη η συνάρτηση

- A. f B. g Γ. h Δ. όλες Ε. καμία

8. Ο τύπος $(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) g'(x_0)$ ισχύει, όταν

- A. οι f και g είναι παραγωγίσιμες στο x_0
 B. η g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και η f παραγωγίσιμη στο $g(x_0)$
 Γ. η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και η g παραγωγίσιμη στο $f(x_0)$
 Δ. οι f και g είναι παραγωγίσιμες στο $g(x_0)$
 Ε. οι f και g είναι συνεχείς στο $g(x_0)$

9. Από τις παρακάτω συναρτήσεις έχει παράγωγο την συνάρτηση $f(x) = -3\eta\mu 3x$

- A. $g(x) = \sigma\upsilon\nu^3 x$ B. $h(x) = \sigma\upsilon\nu x^3$ Γ. $\varphi(x) = 3\sigma\upsilon\nu x$ Δ. $s(x) = \sigma\upsilon\nu 3x$

E. $\sigma(x) = \sigma\upsilon\nu \frac{x}{3}$

10. Από τις παρακάτω συναρτήσεις έχει παράγωγο την συνάρτηση

$$f(x) = \alpha^x \ln \alpha, \alpha > 0, x \in \mathbb{R}, \eta$$

- A. x^α B. $\log_\alpha x$ Γ. $e^{\alpha \ln x}$ Δ. $\log x^\alpha$ Ε. α^x

11. Για τις παραγωγίσιμες συναρτήσεις f , g στο διάστημα $[0, \pi]$ ισχύει

$$g(x) = f(\eta\mu x). \text{ Η τιμή } g'\left(\frac{\pi}{2}\right) \text{ είναι ίση με}$$

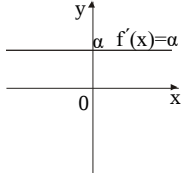
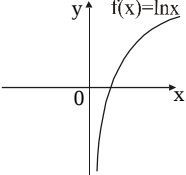
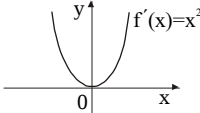
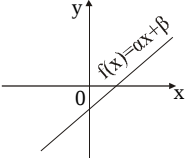
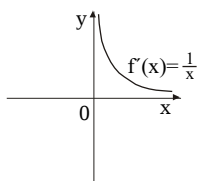
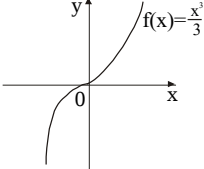
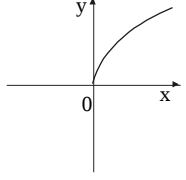
- A. 1 B. $f'(1)$ Γ. 0 Δ. $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ Ε. $\frac{\pi}{2} f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$

Θέμα 3^ο

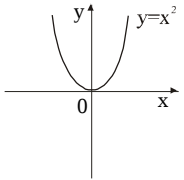
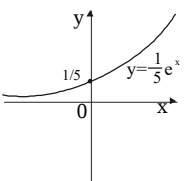
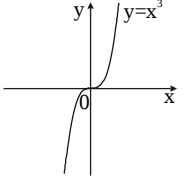
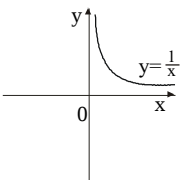
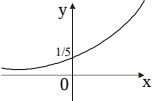
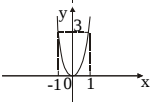
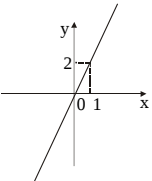
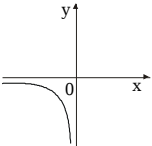
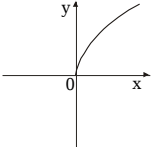
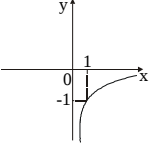
A) Σε κάθε σύμβολο της στήλης A του παρακάτω πίνακα να αντιστοιχίσετε το σύμβολο από τη στήλη B που έχει την ίδια σημασία

Στήλη A	Στήλη B
1. $\frac{df}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$ 2. $\frac{d^2f}{dx^2}$ 3. $\frac{df^2}{dx}$ 4. $\left(\frac{df}{dx}\right)^2$	α. $2 f(x) \cdot f'(x)$ β. $f'(x)$ γ. $f^2(x) \cdot f'(x)$ δ. $f''(x)$ ε. $(f'(x))^2$

B) Στη στήλη A δίνονται οι γραφικές παραστάσεις παραγώγων συναρτήσεων f' . Στη στήλη B δίνονται οι γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων f . Να αντιστοιχίσετε σε κάθε γραφική παράσταση f' της στήλης A τη γραφική παράσταση από τη στήλη B του

Στήλη A	Στήλη B
γραφικές παραστάσεις f'	γραφικές παραστάσεις f
1. 	α. 
2. 	β. 
3. 	γ. 
	δ. 

Γ) Να αντιστοιχίσετε κάθε γραφική παράσταση συνάρτησης που φαίνεται στη στήλη Α του πίνακα με τη γραφική παράσταση της παραγώγου της που φαίνεται στη στήλη Β

Στήλη Α	Στήλη Β
γραφικές παραστάσεις f	γραφικές παραστάσεις f'
1.  2.  3.  4. 	α.  β.  γ.  δ.  ε.  στ. 

Θέμα 4^ο

Α) Έστω οι συναρτήσεις f και g οι οποίες είναι παραγωγίσιμες στο $x_0 \in (\alpha, \beta)$ με $f'(x_0) = g'(x_0)$ και $f(x_0) = g(x_0)$. Αν ισχύει $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$, να αποδείξετε ότι και η h είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και μάλιστα ισχύει $h'(x_0) = f'(x_0)$.

Β) Δίνεται η συνάρτηση f με την ιδιότητα : $5x - x^2 \leq f(x) \leq 5x + x^4$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 και να βρείτε την $f'(0)$.

Θέμα 5^ο

Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο 1, η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο 1 και ισχύει $f(x) = |x - 1| \cdot g(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Να βρεθεί η τιμή $g(1)$.

Θέμα 6^ο

Να παραγωγίσετε τις παρακάτω συναρτήσεις

- i) $f(x) = (x^2 - 3x + 8) \cdot \sin x$ ii) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{\eta \mu x}$ iii) $f(x) = \sqrt[4]{x^3} - e^{x^2 + 2}$
- iv) $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x} - \ln(x^3 + x)$ v) $f(x) = \eta \mu^3(x^2 + 3x)$ vi) $f(x) = \ln^3(x^2 + 1)$
- vii) $f(x) = 5^{x^2 + 1} - \log_2(2x - 1)$ viii) $f(x) = (x^3 + 2)^{x^2 + 1}$ ix) $f(x) = x|x + 1|$

Θέμα 7^ο

Έστω συνάρτηση f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $f(x^3) = \eta \mu(\pi x)$. Να βρείτε το $f'(-1)$.

Θέμα 8^ο

Να δείξετε ότι: α) αν $f(x) = 3\sin x - 2\sin^2 x$, τότε $f'(x) + f(x) \sin x - \eta \mu 2x = 0$.

β) αν $f(x) = \ln \frac{1}{1+x}$, τότε $x f'(x) + 1 = e^{f(x)}$.

Θέμα 9^ο

Αν f είναι μια πολυωνυμική συνάρτηση για την οποία ισχύουν: $f'(4) = 0$ και

$(f'(x))^2 = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να βρεθεί ο τύπος της f .

Θέμα 10^ο

Μια συνάρτηση είναι περιττή και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι:

α) η γραφική της παράσταση διέρχεται από το $(0, 0)$. β) $f''(0) = 0$.

Θέμα 11^ο

Να βρείτε πολυώνυμο $P(x)$ τρίτου βαθμού, τέτοιο ώστε $P(0) = -1$, $P'(1) = 5$, $P'(0) = 2$, $P''(1) = 2$.

Θέμα 12^ο

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = e^{ax}$, $a \in \mathbb{R}$. Να βρείτε: α) Την $f'(x)$, β) Την $f''(x)$
 γ) Τις τιμές του a , ώστε να ισχύει η σχέση $f''(x) + 2f'(x) = 3f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Θέμα 13^ο

Αν η συνάρτηση g είναι δύο φορές παραγωγίσιμη σε κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(x) = (x-3)^2 g(2x-1)$ με $g(5) = 5$ να βρείτε την $f''(3)$

Θέμα 14^ο

Δύο συναρτήσεις f και g συνδέονται με τη σχέση $f(x) = (\ln(g(x)))^2$. Αν $g(3) = e$ και $g'(3) = 5$ να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της f ως προς x για $x = 3$.

Θέμα 15^ο

Έστω συνάρτηση f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $x_0 \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι :

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + 3h) - f(x_0 - h)}{4h}$$

Θέμα 16^ο

Έστω συνάρτηση f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $x_0 \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι :

$$f(x_0) - x_0 f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x f(x_0) - x_0 f(x)}{x - x_0}$$

Θέμα 17^ο

Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε να είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$, η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 1, & x < 0 \\ ax - \beta, & x \geq 0 \end{cases}.$$

Θέμα 18^ο

Αν $f(3) = 10$ και $f'(3) = 6$, να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(f(x))^2 - 100}{x^2 - 9}$.

Θέμα 19^ο

Αν η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο 0 και ισχύει $f^3(x) + xf^2(x) = 2x^3$ για κάθε $x \in \mathcal{R}$, να δείξετε ότι $f'(0) = 1$

Θέμα 20^ο

Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(1) = 2$, $f'(1) = 3$ και $g(x) = x^3 f^2(x)$.

Να βρείτε τη $g'(1)$.

Θέμα 21^ο

Αν $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f'(\alpha) < 0$ να δείξετε ότι το $f(\alpha)$ δεν είναι ελάχιστο.

Θέμα 22^ο

Έστω συνάρτηση f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $x_0 \in \mathcal{R}$. Να δείξετε ότι :

$$3f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + 2h) - f(x_0 - h)}{h}$$

Θέμα 23^ο

Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x) \cdot \eta\mu\pi x + 2x^2 - 2x}{x-1}$ όπου f συνάρτηση ορισμένη στο $\mathbb{R}$ με $f(1) = 0$. Αν είναι $g(1) = 2$, $g'(1) = 4$ να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 1 και να βρείτε το $f'(1)$.

Θέμα 24^ο

Έστω f, g, h συναρτήσεις ορισμένες στο $\mathcal{R}$ για τις οποίες ισχύει

i) $f(x) < h(x) < g(x)$ για κάθε $x \in \mathcal{R}$, ii) $f(1) = g(1) = h(1)$, iii) $f'(1) = g'(1)$

Να αποδείξετε ότι η h είναι παραγωγίσιμη στο 1.

Θέμα 25^ο

Έστω συνάρτηση f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $\alpha > 0$. Να δείξετε ότι :

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x) \ln x - f(\alpha) \ln \alpha}{x - \alpha} = f'(\alpha) \ln \alpha + \frac{f(\alpha)}{\alpha}$$

Θέμα 26^ο

Να βρείτε το πεδίο ορισμού και την παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων

i) $f(x) = |x-1|$, ii) $g(x) = \sqrt{x-1}$, ii) $h(x) = (\ln x)^x$, ii) $s(x) = \sqrt[5]{x^6}$