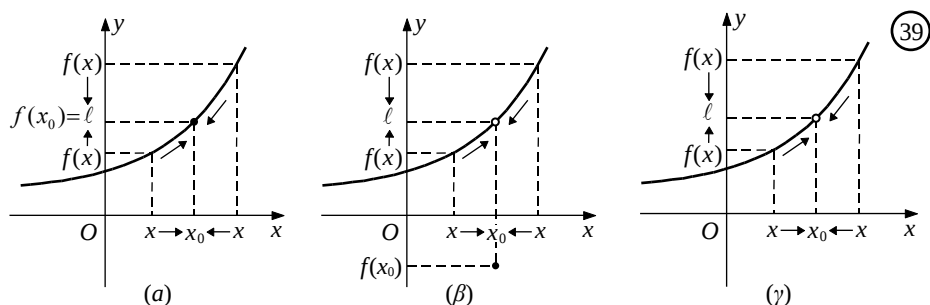


## Η έννοια του ορίου στο $x_0 \in \mathbb{R}$

### Διασθητικός ορισμός ορίου στο $x_0 \in \mathbb{R}$

Όταν οι τιμές μιας συνάρτησης  $f$  προσεγγίζουν όσο θέλουμε έναν πραγματικό αριθμό  $\ell$ , καθώς το  $x$  προσεγγίζει με οποιονδήποτε τρόπο τον αριθμό  $x_0$ , τότε γράφουμε  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$  και διαβάζουμε “το όριο της  $f(x)$ , όταν το  $x$  τείνει στο  $x_0$ , είναι  $\ell$ ” ή “το όριο της  $f(x)$  στο  $x_0$  είναι  $\ell$ ”.



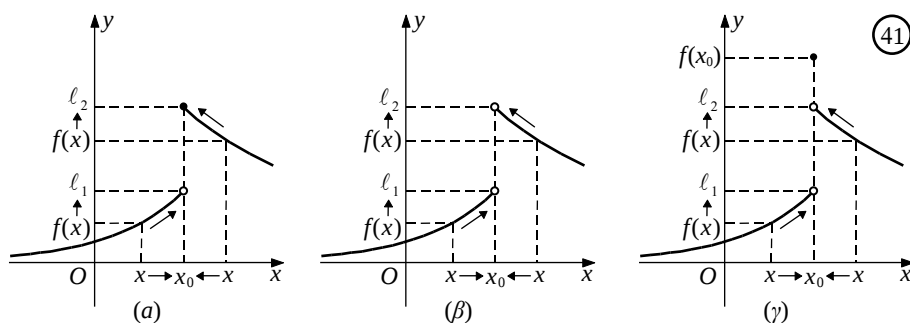
Αποδεικνύεται ότι, αν μια συνάρτηση  $f$  έχει όριο στο  $x_0$ , τότε αυτό είναι μοναδικό και συμβολίζεται, όπως είδαμε, με  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ . Στη συνέχεια, όταν γράφουμε  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ , θα εννοούμε ότι υπάρχει το όριο της  $f$  στο  $x_0$  και είναι ίσο με  $\ell$ . Συνέπεια του παραπάνω ορισμού είναι οι ακόλουθες ισοδυναμίες:

|     |                                                       |                   |                                              |
|-----|-------------------------------------------------------|-------------------|----------------------------------------------|
| (α) | $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$                | $\Leftrightarrow$ | $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - \ell) = 0$ |
| (β) | $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$                | $\Leftrightarrow$ | $\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = \ell$   |
| (γ) | $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ , $x_0 \neq 0$ | $\Leftrightarrow$ | $\lim_{h \rightarrow 1} f(x_0 h) = \ell$     |

### Πλευρικά όρια

— Όταν οι τιμές μιας συνάρτησης  $f$  προσεγγίζουν όσο θέλουμε τον πραγματικό αριθμό  $\ell_1$ , καθώς το  $x$  προσεγγίζει το  $x_0$  από μικρότερες τιμές ( $x < x_0$ ), τότε γράφουμε:  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \ell_1$  και διαβάζουμε: “το όριο της  $f(x)$ , όταν το  $x$  τείνει στο  $x_0$  από τα αριστερά, είναι  $\ell_1$ ”.

— Όταν οι τιμές μιας συνάρτησης  $f$  προσεγγίζουν όσο θέλουμε τον πραγματικό αριθμό  $\ell_2$ , καθώς το  $x$  προσεγγίζει το  $x_0$  από μεγαλύτερες τιμές ( $x > x_0$ ), τότε γράφουμε:  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \ell_2$  και διαβάζουμε: “το όριο της  $f(x)$ , όταν το  $x$  τείνει στο  $x_0$  από τα δεξιά, είναι  $\ell_2$ ”.



Τους αριθμούς  $\ell_1 = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$  και  $\ell_2 = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$  τους λέμε **πλευρικά όρια** της  $f$  στο  $x_0$  και συγκεκριμένα το  $\ell_1$  **αριστερό όριο** της  $f$  στο  $x_0$ , ενώ το  $\ell_2$  **δεξιό όριο** της  $f$  στο  $x_0$ . Αποδεικνύεται ότι:

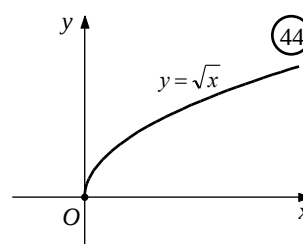
Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής  $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ , τότε ισχύει η ισοδυναμία:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \ell$$

- Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι ορισμένη σε ένα διάστημα της μορφής  $(x_0, \beta)$ , αλλά δεν ορίζεται σε διάστημα της μορφής  $(\alpha, x_0)$ , τότε ορίζουμε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x).$$

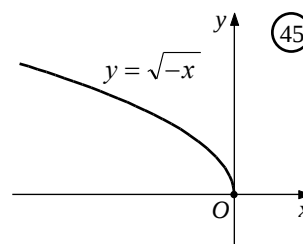
Για παράδειγμα,  $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0$  (Σχ. 44)



- Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι ορισμένη σε ένα διάστημα της μορφής  $(\alpha, x_0)$ , αλλά δεν ορίζεται σε διάστημα της μορφής  $(x_0, \beta)$ , τότε ορίζουμε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x).$$

Για παράδειγμα,  $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{-x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{-x} = 0$  (Σχ. 45)



### Παρατηρήσεις

1. Η έννοια του ορίου είναι ταυτόσημη με την έννοια του προσεγγίζω, του πλησιάζω, του τείνω. Όταν λέμε ότι το  $x$  τείνει στο  $x_0$  και συμβολίζουμε  $x \rightarrow x_0$ , εννοούμε ότι το  $x$  πλησιάζει το  $x_0$  κατά οποιοδήποτε τρόπο δηλαδή το  $x$  μπορεί να πάρει τιμές πολύ κοντά στο  $x_0$  ( είτε λίγο μικρότερες, είτε λίγο μεγαλύτερες είτε και τα δύο ) χωρίς όμως ποτέ να γίνει ίσο με  $x_0$ . Όταν λέμε ότι το όριο της  $f$  στο  $x_0$  είναι  $\lambda$  και γράφουμε  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lambda$  εννοούμε ότι το  $f(x)$  πλησιάζει τον αριθμό  $\lambda$  χωρίς ποτέ και αυτό να γίνει ίσο με  $\lambda$ . Δηλαδή το  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lambda$  σημαίνει ότι  $f(x) \rightarrow \lambda$  και όχι ότι  $f(x) = \lambda$ .
2. Για να αναζητήσουμε το όριο της  $f$  στο  $x_0$ , πρέπει η  $f$  να ορίζεται όσο θέλουμε “κοντά στο  $x_0$ ”, δηλαδή η  $f$  να είναι ορισμένη σ’ ένα σύνολο της μορφής  $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$  ή  $(\alpha, x_0)$  ή  $(x_0, \beta)$  (Αποδεικνύεται ότι το  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  είναι ανεξάρτητο των άκρων  $\alpha, \beta$  των διαστημάτων  $(\alpha, x_0)$  και  $(x_0, \beta)$  στα οποία θεωρούμε ότι είναι ορισμένη η  $f$ ).
3. Το  $x_0$  μπορεί να ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης ή να μην ανήκει σ’ αυτό. Δεν μας ενδιαφέρει δηλαδή αν η  $f$  ορίζεται στο  $x_0$ , αρκεί να ορίζεται όσο κοντά θέλουμε στο  $x_0$  δηλαδή να είναι ορισμένη σε σύνολα της μορφής της προηγούμενης παρατήρησης.

4. Το όριο μιας συνάρτησης στο  $x_0$  δεν υπάρχει πάντα όπως στην περίπτωση που τα πλευρικά όρια υπάρχουν και είναι διαφορετικά .

Αν όμως υπάρχει είναι μοναδικό

5. Η τιμή της  $f$  στο  $x_0$ , όταν υπάρχει, μπορεί να είναι ίση με το όριό της στο  $x_0$  ή διαφορετική από αυτό. Δηλαδή αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lambda$  τότε μπορεί να είναι

$f(x_0) = \lambda$  , μπορεί και  $f(x_0) \neq \lambda$  , μπορεί και να μην ορίζεται καν το  $f(x_0)$  στην περίπτωση που το  $x_0$  δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της  $f$ .

## ΣΥΜΒΑΣΗ

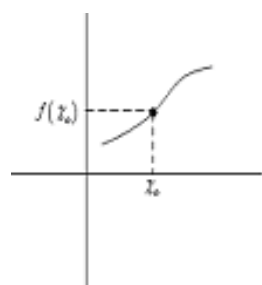
Στη συνέχεια, όταν λέμε ότι μια συνάρτηση  $f$  έχει **κοντά στο  $x_0$**  μια ιδιότητα  $P$  θα εννοούμε ότι ισχύει μια από τις παρακάτω τρεις συνθήκες:

α) Η  $f$  είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής  $(a, x_0) \cup (x_0, \beta)$  και στο σύνολο αυτό έχει την ιδιότητα  $P$ .

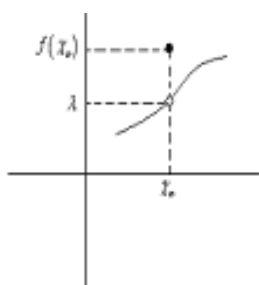
β) Η  $f$  είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής  $(a, x_0)$ , έχει σ' αυτό την ιδιότητα  $P$ , αλλά δεν ορίζεται σε σύνολο της μορφής  $(x_0, \beta)$ .

γ) Η  $f$  είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής  $(x_0, \beta)$ , έχει σ' αυτό την ιδιότητα  $P$ , αλλά δεν ορίζεται σε σύνολο της μορφής  $(a, x_0)$ .

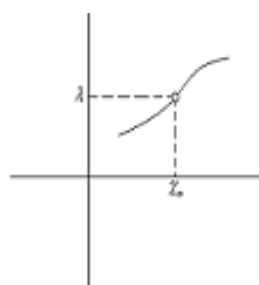
## • Γραφική ερμηνεία



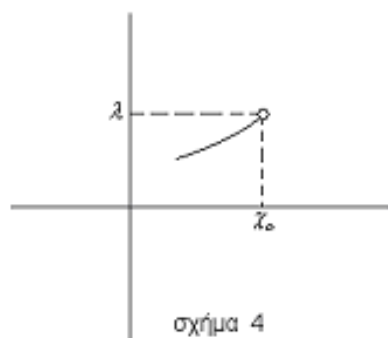
σχήμα 1  
 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lambda$  με  $\lambda = f(x_0)$



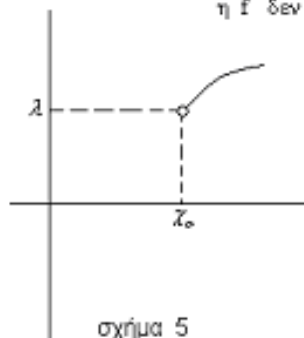
σχήμα 2  
 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lambda$  με  $\lambda \neq f(x_0)$



σχήμα 3  
 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lambda$  ενώ  
η  $f$  δεν ορίζεται στο  $x_0$



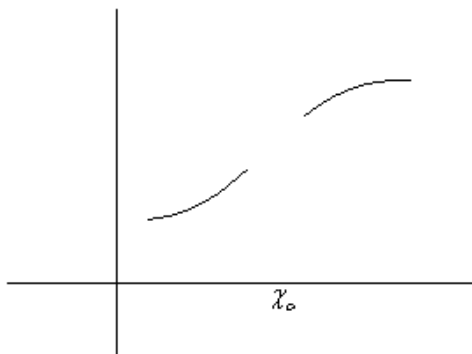
η  $f$  ορίζεται μόνο αριστερά του  $x_0$   
οπότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lambda$



η  $f$  ορίζεται μόνο δεξιά του  $x_0$   
οπότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lambda$

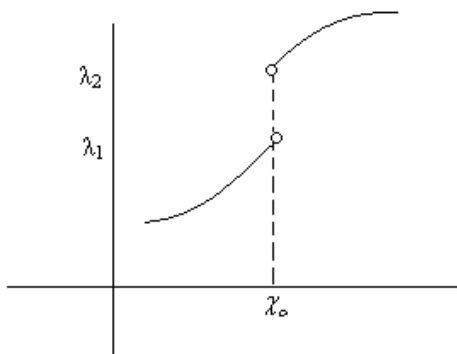
- Δεν έχει νόημα να αναζητήσουμε το όριο της  $f$  αν αυτή δεν ορίζεται όσο κοντά στο  $x_0$  θέλουμε δηλαδή δεν ορίζεται σε κανένα σύνολο της μορφής  $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$  ή  $(\alpha, x_0)$  ή  $(x_0, \beta)$

Γραφικά έχει ως εξής :



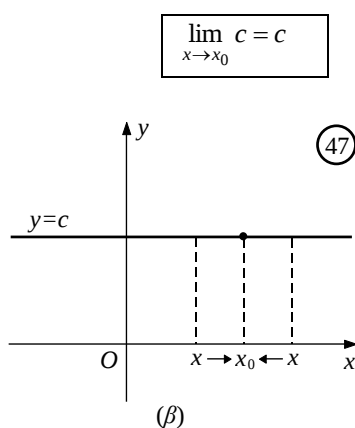
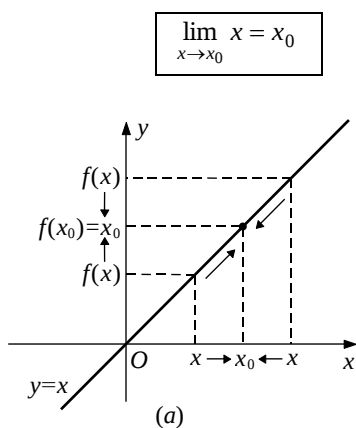
- Αν τα πλευρικά όρια της  $f$  στο  $x_0$  υπάρχουν και είναι διαφορετικά τότε δεν υπάρχει

Γραφικά έχει ως εξής :



### Όριο ταυτοτικής- σταθερής συνάρτησης

Με τη βοήθεια του ορισμού του ορίου αποδεικνύεται ότι:



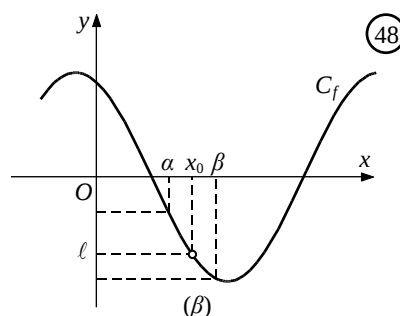
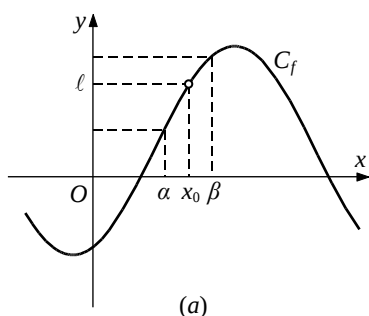
## ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΟΡΙΩΝ

### Όριο και διάταξη

Για το όριο και τη διάταξη αποδεικνύεται ότι ισχύουν τα παρακάτω θεωρήματα.

#### ΘΕΩΡΗΜΑ 1ο

- Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$ , τότε  $f(x) > 0$  κοντά στο  $x_0$  (Σχ. 48α)
- Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < 0$ , τότε  $f(x) < 0$  κοντά στο  $x_0$  (Σχ. 48β)

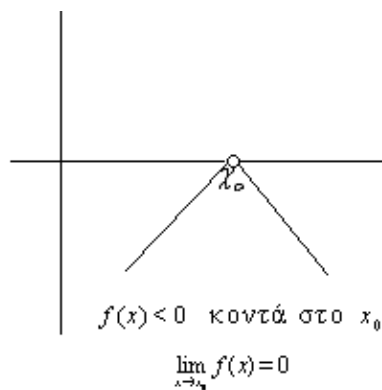
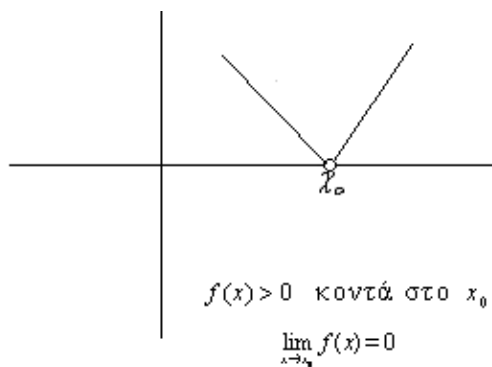


#### Παρατήρηση

Το αντίστροφο του θεωρήματος δεν ισχύει. Αφενός αν  $f(x) > 0$  κοντά στο  $x_0$  δεν σημαίνει απαραίτητα ότι υπάρχει και το  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ , αφετέρου και αν ακόμα υπάρχει δεν είναι σίγουρο ότι θα είναι θετικό, διότι μπορεί να είναι και μηδέν, δηλαδή

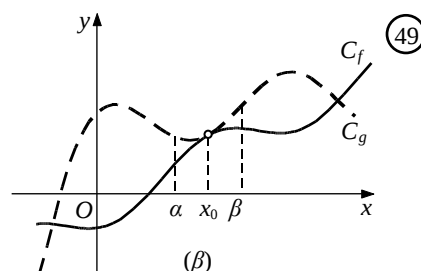
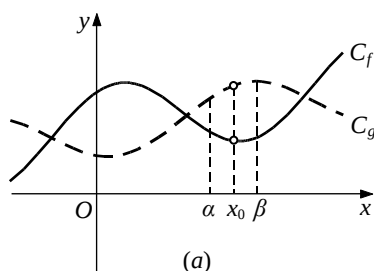
Αν  $f(x) > 0$  κοντά στο  $x_0$  και υπάρχει το  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq 0$ .

Όμοια, Αν  $f(x) < 0$  κοντά στο  $x_0$  και υπάρχει το  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq 0$ .



## ΘΕΩΡΗΜΑ 2ο

Αν οι συναρτήσεις  $f, g$  έχουν όριο στο  $x_0$  και ισχύει  $f(x) \leq g(x)$  κοντά στο  $x_0$ , τότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$


### Παρατήρηση

Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$  τότε είναι και  $f(x) < g(x)$  κοντά στο  $x_0$ , αφού

( με τη βοήθεια ιδιοτήτων που θα δούμε παρακάτω) έχουμε :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) < 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - g(x)) < 0 \Rightarrow$$

$$f(x) - g(x) < 0 \text{ κοντά στο } x_0 \text{ και άρα } f(x) < g(x) \text{ κοντά στο } x_0$$

Συνεπώς αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ , τότε  $f(x) > g(x)$  κοντά στο  $x_0$  και

$$\text{αν } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < \lim_{x \rightarrow x_0} g(x), \text{ τότε } f(x) < g(x) \text{ κοντά στο } x_0$$

### Όρια και πράξεις

Τα δύο βασικά όρια  $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$  και το θεώρημα που ακολουθεί διευκολύνουν τον υπολογισμό των ορίων.

### ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν υπάρχουν τα όρια των συναρτήσεων  $f$  και  $g$  στο  $x_0$ , τότε:

- $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} (kf(x)) = k \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ , για κάθε σταθερά  $k \in \mathbb{R}$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}$ , εφόσον  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = \left| \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right|$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[k]{f(x)} = \sqrt[k]{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}$ , εφόσον  $f(x) \geq 0$  κοντά στο  $x_0$ .

## Παρατηρήσεις

1. Οι ιδιότητες 1 και 3 του θεωρήματος ισχύουν και για περισσότερες από δυο συναρτήσεις. Άμεση συνέπεια αυτού είναι:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^v = \left[ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right]^v, \quad v \in \mathbb{N}^*$$

Για παράδειγμα,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} x^v = x_0^v.$$

— Έστω τώρα το πολυώνυμο  $P(x) = a_v x^v + a_{v-1} x^{v-1} + \dots + a_1 x + a_0$  και  $x_0 \in \mathbb{R}$ .

Σύμφωνα με τις παραπάνω ιδιότητες έχουμε:  $\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$ .

— Έστω η ρητή συνάρτηση  $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ , όπου  $P(x)$ ,  $Q(x)$  πολυώνυμα του  $x$  και

$x_0 \in \mathbb{R}$  με  $Q(x_0) \neq 0$ . Τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$ , εφόσον  $Q(x_0) \neq 0$

2. Όταν  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ , τότε δεν εφαρμόζεται η ιδιότητα 4 του παραπάνω

θεωρήματος. Όταν όμως  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0$  τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) > 0$  ή  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) < 0$

και αντίστοιχα  $g(x) > 0$  ή  $g(x) < 0$  κοντά στο  $x_0$  δηλαδή  $g(x) \neq 0$  κοντά στο  $x_0$

3. Τα αντίστροφα των ιδιοτήτων 1,2,3,4,5 δεν ισχύουν πάντοτε. Μπορεί δηλαδή να υπάρχει το όριο του αθροίσματος ή του γινομένου δύο συναρτήσεων στο  $x_0$  και να μην υπάρχει το όριο της κάθε μιας ξεχωριστά στο  $x_0$ .

π.χ.  $f(x) = \frac{|x|}{x}$ ,  $g(x) = x$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \cdot g(x) = 0$  όμως το  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  δεν υπάρχει

αφού  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1$  και  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-1) = -1$

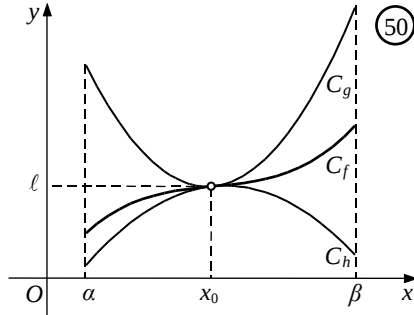
π.χ.  $f(x) = \frac{|x|}{x}$ ,  $g(x) = -\frac{|x|}{x}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) + g(x)) = 0$  όμως ούτε το  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  υπάρχει ούτε το  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$

4. Μπορεί  $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = \lambda$  και να μην υπάρχει το  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$

π.χ.  $f(x) = \frac{|x|}{x}$ , υπάρχει το  $\lim_{x \rightarrow 0} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{x}{x} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} |1| = 1$  όμως όπως δείξαμε το  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  δεν υπάρχει

### Κριτήριο παρεμβολής

Υποθέτουμε ότι “κοντά στο  $x_0$ ” μια συνάρτηση  $f$  “εγκλωβίζεται” (Σχ. 50) ανάμεσα σε δύο συναρτήσεις  $h$  και  $g$ . Αν, καθώς το  $x$  τείνει στο  $x_0$ , οι  $g$  και  $h$  έχουν κοινό όριο  $\ell$ , τότε, όπως φαίνεται και στο σχήμα, η  $f$  θα έχει το ίδιο όριο  $\ell$ . Αυτό δίνει την ιδέα του παρακάτω θεωρήματος που είναι γνωστό ως **κριτήριο παρεμβολής**.



### ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω οι συναρτήσεις  $f, g, h$ . Αν

- $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$  κοντά στο  $x_0$  και •  $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell$ ,  
τότε και  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$

### Παρατηρήσεις

1. Το θεώρημα ισχύει και στην περίπτωση όπου  $h(x) < f(x) < g(x)$  αφού το σύμβολο  $\leq$  ισχύει και όταν ισχύει μόνο το  $<$

2. Με βάση το κριτήριο παρεμβολής αποδεικνύεται ότι

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0. \text{ Πράγματι από ιδιότητες απολύτων έχουμε ότι}$$

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)| \text{ οπότε αν } \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0 \text{ είναι και } \lim_{x \rightarrow x_0} -|f(x)| = 0 \text{ και}$$

από κριτήριο παρεμβολής είναι και  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ .

Αν τώρα  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$  από ιδιότητες ορίων είναι και

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = \left| \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right| = |0| = 0$$

3. Με βάση τώρα την παραπάνω ιδιότητα που αποδείξαμε έχουμε ότι αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f^2(x) = 0$  τότε από ιδιότητες ορίων είναι και

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{f^2(x)} = \sqrt{0} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \text{ ενώ γενικά τονίζουμε ότι}$$

μπορεί να υπάρχει το  $\lim_{x \rightarrow x_0} f^2(x) = \lambda$  και να μην υπάρχει το  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  ή

και αν ακόμα υπάρχει να μην είναι ίσο με  $\sqrt{\lambda}$

## Τριγωνομετρικά όρια

Το κριτήριο παρεμβολής είναι πολύ χρήσιμο για τον υπολογισμό ορισμένων τριγωνομετρικών ορίων. Αρχικά αποδεικνύεται ότι:

$$\begin{array}{c} |\eta\mu x| \leq |x|, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \\ \text{(η ισότητα ισχύει μόνο όταν } x=0 \text{)} \end{array}$$

Με τη βοήθεια της παραπάνω ανισότητας και του κριτηρίου παρεμβολής

αποδεικνύεται ότι: α)  $\lim_{x \rightarrow x_0} \eta\mu x = \eta\mu x_0$  β)  $\lim_{x \rightarrow x_0} \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu x_0$  γ)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$

$$\delta) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 0$$

Επίσης με τη βοήθεια του κριτηρίου παρεμβολής υπολογίζουμε όρια της μορφής ‘μηδενική επί φραγμένη’ δηλαδή συναρτήσεων που έχουν προκύψει από το γινόμενο μιας φραγμένης συνάρτησης με μία που τείνει στο 0. Φραγμένες συναρτήσεις είναι αυτές για τις οποίες υπάρχουν  $\mu, M$  έτσι ώστε  $\mu \leq f(x) \leq M$  για κάθε  $x \in D_f$ , π.χ.  $\eta\mu x$ ,  $\sigma\upsilon\nu x$ ,  $\eta\mu g(x)$ ,  $\sigma\upsilon\nu g(x)$ .

Τα όρια αυτά υπολογίζονται αποκλειστικά με κριτήριο παρεμβολής που πρέπει πρώτα να δημιουργήσουμε εμείς στηριζόμενοι σε ιδιότητες απολύτων και βγάζουν πάντα 0.

Συνεπώς αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$  τότε και  $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot \eta\mu g(x)] = 0$ ,

$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot \sigma\upsilon\nu g(x)] = 0$  (η πρόταση αυτή δεν χρησιμοποιείται σε ασκήσεις, αλλά μας λέει πως πρέπει να τα αντιμετωπίσουμε με κριτήριο παρεμβολής)

## Όριο σύνθετης συνάρτησης

Με τις ιδιότητες που αναφέρουμε μέχρι τώρα μπορούμε να προσδιορίσουμε τα όρια απλών συναρτήσεων. Αν, όμως, θέλουμε να υπολογίσουμε το  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x))$ , της σύνθετης συνάρτησης  $f \circ g$  στο σημείο  $x_0$ , τότε εργαζόμαστε

ως εξής:

1. Θέτουμε  $u = g(x)$ .
2. Υπολογίζουμε (αν υπάρχει) το  $u_0 = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$  και
3. Υπολογίζουμε (αν υπάρχει) το  $\ell = \lim_{u \rightarrow u_0} f(u)$ .

Αποδεικνύεται ότι, αν  $g(x) \neq u_0$  κοντά στο  $x_0$ , τότε το ζητούμενο όριο είναι ίσο με  $\ell$ , δηλαδή ισχύει:  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = \lim_{u \rightarrow u_0} f(u)$ .

## ΠΡΟΣΟΧΗ

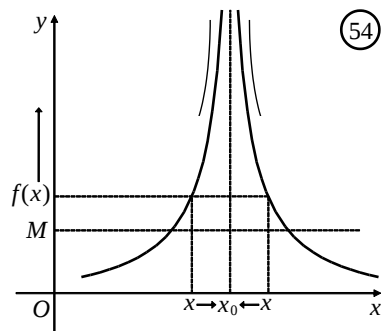
Στη συνέχεια και σε όλη την έκταση του βιβλίου τα όρια της μορφής  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x))$  με τα οποία θα ασχοληθούμε θα είναι τέτοια, ώστε να

ικανοποιείται η συνθήκη: “ $g(x) \neq u_0$  κοντά στο  $x_0$ ” και για αυτό δεν θα ελέγχεται.

## ΜΗ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟ ΟΡΙΟ ΣΤΟ $x_0 \in \mathbb{R}$

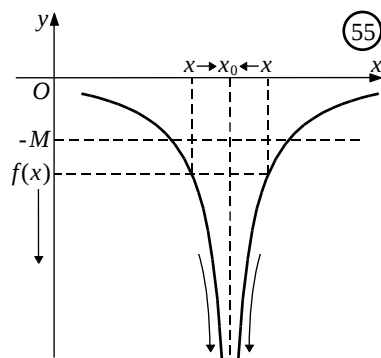
— Στο σχήμα 54 έχουμε τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης  $f$  κοντά στο  $x_0$ . Παρατηρούμε ότι, καθώς το  $x$  κινούμενο με οποιονδήποτε τρόπο πάνω στον άξονα  $x$  πλησιάζει τον πραγματικό αριθμό  $x_0$ , οι τιμές  $f(x)$  αυξάνονται απεριόριστα και γίνονται μεγαλύτερες από οποιονδήποτε θετικό αριθμό  $M$ . Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η συνάρτηση  $f$  έχει στο  $x_0$  όριο  $+\infty$  και γράφουμε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty.$$



— Στο σχήμα 55 έχουμε τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης  $f$  κοντά στο  $x_0$ . Παρατηρούμε ότι, καθώς το  $x$  κινούμενο με οποιονδήποτε τρόπο πάνω στον άξονα  $x$  πλησιάζει τον πραγματικό αριθμό  $x_0$ , οι τιμές  $f(x)$  ελαττώνονται απεριόριστα και γίνονται μικρότερες από οποιονδήποτε αρνητικό αριθμό  $-M$  ( $M > 0$ ). Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η συνάρτηση  $f$  έχει στο  $x_0$  όριο  $-\infty$  και γράφουμε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty.$$

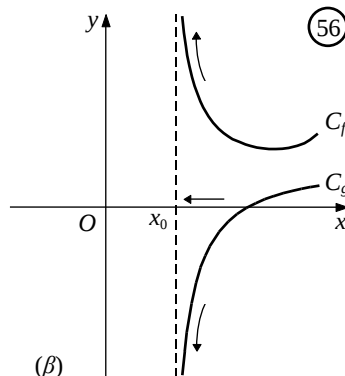
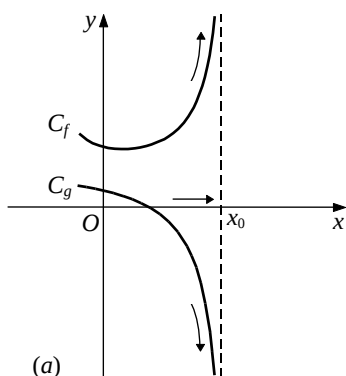


### ΟΡΙΣΜΟΣ\*

Έστω μια συνάρτηση  $f$  που είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής  $(a, x_0) \cup (x_0, \beta)$ . Ορίζουμε

- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ , όταν για κάθε  $M > 0$  υπάρχει  $\delta > 0$  τέτοιο, ώστε για κάθε  $x \in (a, x_0) \cup (x_0, \beta)$ , με  $0 < |x - x_0| < \delta$  να ισχύει  $f(x) > M$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ , όταν για κάθε  $M > 0$  υπάρχει  $\delta > 0$  τέτοιο, ώστε για κάθε  $x \in (a, x_0) \cup (x_0, \beta)$ , με  $0 < |x - x_0| < \delta$  να ισχύει  $f(x) < -M$

Ανάλογοι ορισμοί μπορούν να διατυπωθούν όταν  $x \rightarrow x_0^-$  και  $x \rightarrow x_0^+$ .

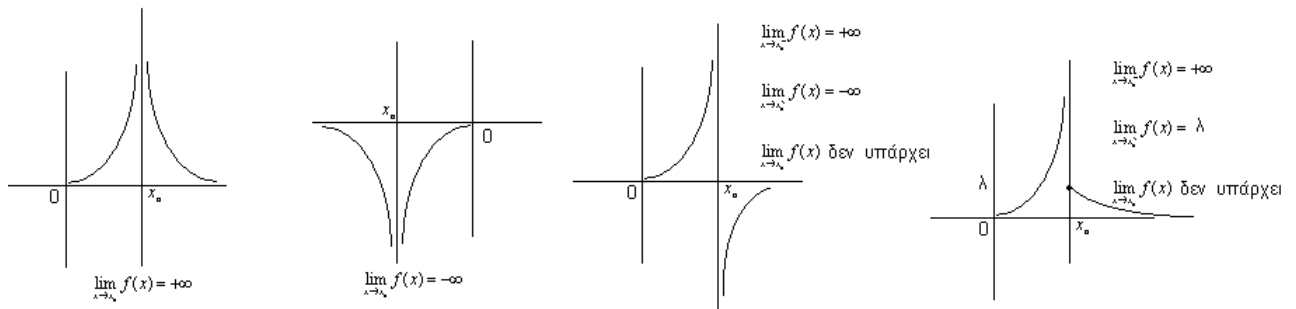


Όπως στην περίπτωση των πεπερασμένων ορίων έτσι και για τα άπειρα όρια συναρτήσεων, που ορίζονται σε ένα σύνολο της μορφής  $(a, x_0) \cup (x_0, \beta)$ , ισχύουν οι παρακάτω ισοδυναμίες:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty.$$

Γραφική ερμηνεία :



Με τη βοήθεια του ορισμού αποδεικνύονται οι παρακάτω ιδιότητες:

- Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ , τότε  $f(x) > 0$  κοντά στο  $x_0$ , ενώ  
αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ , τότε  $f(x) < 0$  κοντά στο  $x_0$ .
- Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} (-f(x)) = -\infty$ , ενώ  
αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} (-f(x)) = +\infty$ .
- Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$  ή  $-\infty$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$ .
- Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$  και  $f(x) > 0$  κοντά στο  $x_0$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$ , ενώ αν  
 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$  και  $f(x) < 0$  κοντά στο  $x_0$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty$ .
- Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$  ή  $-\infty$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = +\infty$ .
- Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[k]{f(x)} = +\infty$ .
- Επίσης ισχύουν και οι παρακάτω ιδιότητες που μπορεί να χρησιμοποιηθούν χωρίς απόδειξη

Αν  $f(x) \leq g(x)$  κοντά στο  $x_0$  και  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$  τότε και  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$

Αν  $f(x) \leq g(x)$  κοντά στο  $x_0$  και  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty$  τότε και  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$

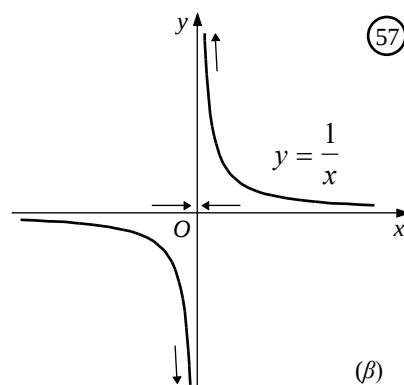
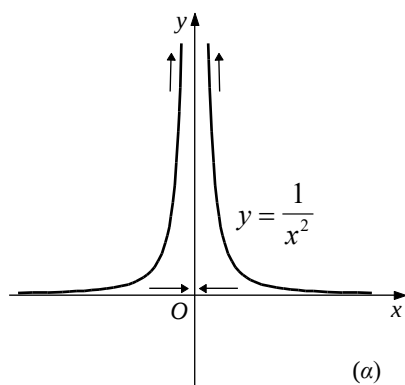
- Σύμφωνα με τις ιδιότητες αυτές έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty \text{ και γενικά } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{2\nu}} = +\infty, \quad \nu \in \mathbb{N}^* \quad (\Sigma\chi. 57\alpha)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \text{ και γενικά } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^{2\nu+1}} = +\infty, \quad \nu \in \mathbb{N} \quad \text{ενώ}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \text{ και γενικά } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^{2\nu+1}} = -\infty, \quad \nu \in \mathbb{N} \quad (\Sigma\chi. 57\beta).$$

Επομένως, δεν υπάρχει στο μηδέν το όριο της  $f(x) = \frac{1}{x^{2\nu+1}}, \nu \in \mathbb{N}$ .



Γενίκευση των παραπάνω :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{(x-x_0)^2} = +\infty \text{ και γενικά } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{(x-x_0)^{2\nu}} = +\infty, \quad \nu \in \mathbb{N}^*$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{1}{(x-x_0)} = +\infty \text{ και γενικά } \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{1}{(x-x_0)^{2\nu+1}} = +\infty, \quad \nu \in \mathbb{N} \quad \text{ενώ}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{1}{(x-x_0)} = -\infty \text{ και γενικά } \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{1}{(x-x_0)^{2\nu+1}} = -\infty, \quad \nu \in \mathbb{N}$$

Επομένως, δεν υπάρχει στο  $x_0$  το όριο της  $f(x) = \frac{1}{(x-x_0)^{2\nu+1}}, \nu \in \mathbb{N}$ .

### ΘΕΩΡΗΜΑ 1ο (όριο αθροίσματος)

|                               |                         |                         |           |           |           |           |
|-------------------------------|-------------------------|-------------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| Αν στο $x_0 \in \mathbb{R}$   |                         |                         |           |           |           |           |
| το όριο της $f$ είναι:        | $\alpha \in \mathbb{O}$ | $\alpha \in \mathbb{O}$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
| και το όριο της $g$ είναι:    | $+\infty$               | $-\infty$               | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
| τότε το όριο της $f+g$ είναι: | $+\infty$               | $-\infty$               | $+\infty$ | $-\infty$ | ;         | ;         |

## ΘΕΩΡΗΜΑ 2ο (όριο γινομένου)

|                                           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |
|-------------------------------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| Αν στο $x_0 \in \mathbb{R}$<br>,          |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |
| το όριο της $f$<br>είναι:                 | $a > 0$   | $a < 0$   | $a > 0$   | $a < 0$   | 0         | 0         | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ |
| και το όριο<br>της $g$<br>είναι:          | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
| τότε το όριο<br>της<br>$f \cdot g$ είναι: | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | ;         | ;         | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ |

Στους πίνακες των παραπάνω θεωρημάτων, όπου υπάρχει ερωτηματικό, σημαίνει ότι το όριο (αν υπάρχει) εξαρτάται κάθε φορά από τις συναρτήσεις που παίρνουμε. Στις περιπτώσεις αυτές λέμε ότι έχουμε **απροσδιόριστη μορφή**. Δηλαδή, απροσδιόριστες μορφές για τα όρια αθροίσματος και γινομένου συναρτήσεων είναι οι:  $(+\infty)+(-\infty)$  και  $0 \cdot (\pm\infty)$ .

Επειδή  $f - g = f + (-g)$  και  $\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$ , απροσδιόριστες μορφές για τα όρια της διαφοράς και του πηλίκου συναρτήσεων είναι οι:  $(+\infty) - (+\infty)$ ,  $(-\infty) - (-\infty)$  και  $\frac{0}{0}$ ,  $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ .

## Παρατηρήσεις

- Όταν λέμε απροσδιόριστες μορφές εννοούμε ότι δεν είναι σίγουρο τι αποτέλεσμα θα δώσουν. Δηλαδή μια απροσδιόριστη μορφή  $(+\infty) - (+\infty)$ , μπορεί άλλοτε να δώσει αποτέλεσμα  $+\infty$ , άλλοτε  $-\infty$  και άλλοτε πραγματικό αριθμό.

$$\text{π.χ. } f(x) = \frac{3}{|x|}, \quad g(x) = \frac{2}{|x|} \quad \text{με} \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{|x|} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{|x|} = +\infty$$

$$\text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 0} (f(x) - g(x)) \stackrel{(+\infty) - (+\infty)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{3}{|x|} - \frac{2}{|x|} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x|} = +\infty$$

$$\text{π.χ. } f(x) = 5 + \frac{3}{|x|}, \quad g(x) = 3 + \frac{3}{|x|} \quad \text{με} \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( 5 + \frac{3}{|x|} \right) = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( 3 + \frac{3}{|x|} \right) = +\infty \quad \text{και}$$

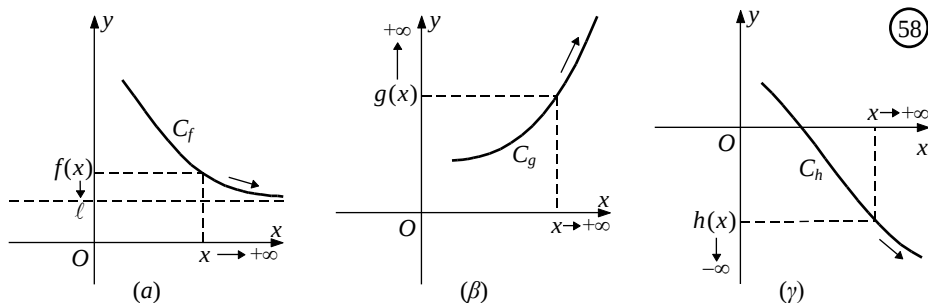
$$\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) - g(x)) \stackrel{(+\infty) - (+\infty)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \left( 5 + \frac{3}{|x|} - 3 - \frac{3}{|x|} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} 2 = 2$$

- Κάποιες μορφές φαινομενικά απροσδιόριστες, δεν είναι τελικά

$$\text{Π.χ. } \frac{0}{\pm\infty} = 0 \cdot \frac{1}{\pm\infty} = 0 \cdot 0 = 0$$

## ΟΡΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΤΟ ΑΠΕΙΡΟ

Στα παρακάτω σχήματα έχουμε τις γραφικές παραστάσεις τριών συναρτήσεων  $f, g, h$  σε ένα διάστημα της μορφής  $(a, +\infty)$ .



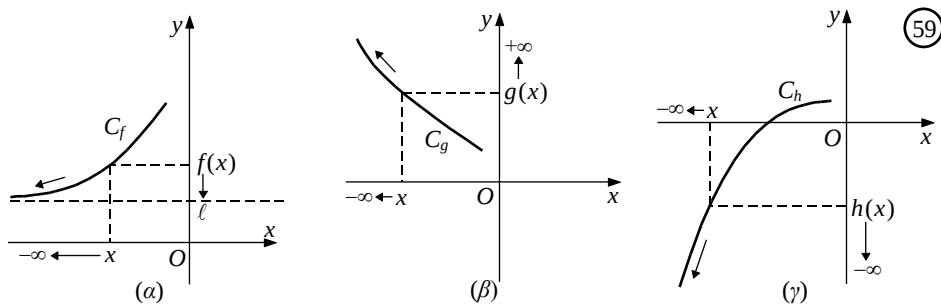
Παρατηρούμε ότι καθώς το  $x$  αυξάνεται απεριόριστα με οποιονδήποτε τρόπο,

— το  $f(x)$  προσεγγίζει όσο θέλουμε τον πραγματικό αριθμό  $\ell$ . Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η  $f$  έχει στο  $+\infty$  όριο το  $\ell$  και γράφουμε  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$

— το  $g(x)$  αυξάνεται απεριόριστα. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η  $g$  έχει στο  $+\infty$  όριο το  $+\infty$  και γράφουμε  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$

— το  $h(x)$  μειώνεται απεριόριστα. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η  $h$  έχει στο  $+\infty$  όριο το  $-\infty$  και γράφουμε  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = -\infty$ .

Ανάλογοι ορισμοί μπορούν να διατυπωθούν, όταν  $x \rightarrow -\infty$  για μια συνάρτηση που είναι ορισμένη σε διάστημα της μορφής  $(-\infty, \beta)$ . Έτσι, για τις συναρτήσεις  $f, g, h$  των παρακάτω σχημάτων έχουμε:



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$$

και

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -\infty.$$

## ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

- Από τα παραπάνω προκύπτει ότι για να αναζητήσουμε το όριο μιας συνάρτησης  $f$  στο  $+\infty$ , πρέπει η  $f$  να είναι ορισμένη σε διάστημα της μορφής  $(a, +\infty)$ . Αντίστοιχα για να αναζητήσουμε το όριο μιας συνάρτησης  $f$  στο  $-\infty$ , πρέπει η  $f$  να είναι ορισμένη σε διάστημα της μορφής  $(-\infty, \beta)$

2. Πλευρικά όρια δεν υπάρχουν αφού δεν έχει νόημα να αναζητήσουμε όρια για  $x \rightarrow +\infty^+$  ή  $x \rightarrow -\infty^-$
- Για τον υπολογισμό του ορίου στο  $+\infty$  ή  $-\infty$  ενός μεγάλου αριθμού συναρτήσεων χρειαζόμαστε τα παρακάτω βασικά όρια:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^v = +\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^v} = 0, \quad v \in \mathbb{N}^*$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^v = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } v \text{ άρτιος} \\ -\infty, & \text{αν } v \text{ περιττός} \end{cases} \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^v} = 0, \quad v \in \mathbb{N}^*.$$

- Για τα όρια στο  $+\infty$ ,  $-\infty$  ισχύουν οι γνωστές ιδιότητες των ορίων στο  $x_0$  με την προϋπόθεση ότι: α) οι συναρτήσεις είναι ορισμένες σε κατάλληλα σύνολα και β) δεν καταλήγουμε σε απροσδιόριστη μορφή.

Έτσι για το όριο και διάταξη :

- Αν  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$  ή  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lambda > 0$  τότε υπάρχει αριθμός  $\alpha < 0$  ώστε  $f(x) > 0$  για κάθε  $x < \alpha$
- Αν  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$  ή  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lambda < 0$  τότε υπάρχει αριθμός  $\alpha < 0$  ώστε  $f(x) < 0$  για κάθε  $x < \alpha$
- Αν  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  ή  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lambda > 0$  τότε υπάρχει αριθμός  $\alpha > 0$  ώστε  $f(x) > 0$  για κάθε  $x > \alpha$
- Αν  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$  ή  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lambda < 0$  τότε υπάρχει αριθμός  $\alpha > 0$  ώστε  $f(x) < 0$  για κάθε  $x > \alpha$

### Όριο πολυωνυμικής και ρητής συνάρτησης

Για την πολυωνυμική συνάρτηση  $P(x) = \alpha_v x^v + \alpha_{v-1} x^{v-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$ , με  $\alpha_v \neq 0$  ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\alpha_v x^v) \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\alpha_v x^v)$$

Για τη ρητή συνάρτηση  $f(x) = \frac{\alpha_v x^v + \alpha_{v-1} x^{v-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0}{\beta_\kappa x^\kappa + \beta_{\kappa-1} x^{\kappa-1} + \dots + \beta_1 x + \beta_0}$ ,  $\alpha_v \neq 0$ ,  $\beta_\kappa \neq 0$  ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\alpha_v x^v}{\beta_\kappa x^\kappa} \right) \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{\alpha_v x^v}{\beta_\kappa x^\kappa} \right)$$

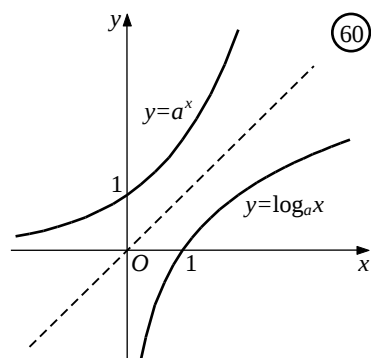
- Αν  $\text{βαθμ.} P(x) > \text{βαθμ.} Q(x)$  τότε  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = +\infty$  ή  $-\infty$
- Αν  $\text{βαθμ.} P(x) = \text{βαθμ.} Q(x)$  τότε  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lambda \in \mathbb{R}^*$
- Αν  $\text{βαθμ.} P(x) < \text{βαθμ.} Q(x)$  τότε  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = 0$

όπου  $P(x)$ ,  $Q(x)$  πολώνυμα .

## Όρια εκθετικής - λογαριθμικής συνάρτησης

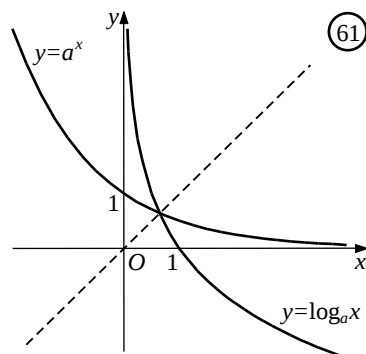
- Αν  $a > 1$  (Σχ. 60), τότε

|                                              |                                                   |
|----------------------------------------------|---------------------------------------------------|
| $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0,$      | $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$      |
| $\lim_{x \rightarrow 0} \log_a x = -\infty,$ | $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty$ |



- Αν  $0 < a < 1$  (Σχ. 61), τότε

|                                               |                                                   |
|-----------------------------------------------|---------------------------------------------------|
| $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty,$ | $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$            |
| $\lim_{x \rightarrow 0} \log_a x = +\infty,$  | $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = -\infty$ |



## Πεπερασμένο όριο ακολουθίας

### ΟΡΙΣΜΟΣ

**Ακολουθία** ονομάζεται κάθε πραγματική συνάρτηση  $a : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$ .

Η εικόνα  $a(v)$  της ακολουθίας  $a$  συμβολίζεται συνήθως με  $a_v$ , ενώ η ακολουθία  $a$  συμβολίζεται με  $(a_v)$ . Για παράδειγμα, η συνάρτηση  $a_v = \frac{1}{v}$ ,  $v \in \mathbb{N}^*$  είναι μια ακολουθία.

Επειδή το πεδίο ορισμού κάθε ακολουθίας, είναι το  $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ , έχει νόημα να μελετήσουμε τη συμπεριφορά της για πολύ μεγάλες τιμές του  $v$ , δηλαδή όταν  $v \rightarrow +\infty$ .

### ΟΡΙΣΜΟΣ

Θα λέμε ότι η ακολουθία  $(a_v)$  έχει όριο το  $\ell \in \mathbb{R}$  και θα γράφουμε  $\lim_{v \rightarrow \infty} a_v = \ell$ , όταν για κάθε  $\varepsilon > 0$ , υπάρχει  $v_0 \in \mathbb{N}^*$  τέτοιο, ώστε για κάθε  $v > v_0$  να ισχύει

$$|a_v - \ell| < \varepsilon$$

Οι γνωστές ιδιότητες των ορίων συναρτήσεων όταν  $x \rightarrow +\infty$ , που μελετήσαμε στα προηγούμενα, ισχύουν και για τις ακολουθίες. Με τη βοήθεια των ιδιοτήτων αυτών μπορούμε να υπολογίζουμε όρια ακολουθιών.

Για παράδειγμα,  $\lim_{v \rightarrow \infty} \frac{2v^2 - 3v + 5}{4v^2 + v - 1} = \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{2v^2}{4v^2} = \frac{1}{2}$ .