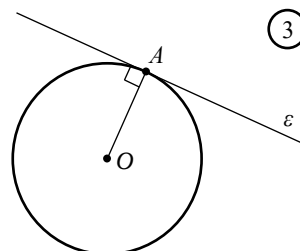


ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

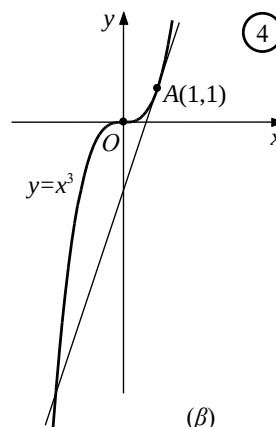
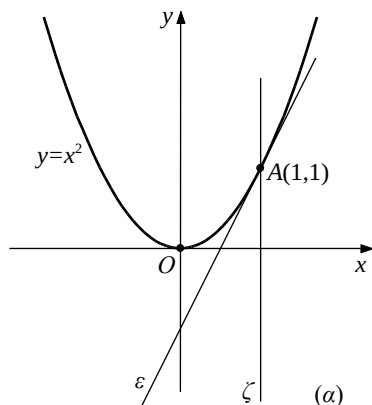
Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ

Πρόβλημα εφαπτομένης

Είναι γνωστό από την Ευκλείδεια Γεωμετρία ότι εφαπτομένη ενός κύκλου σε ένα σημείο του A ονομάζουμε την ευθεία η οποία έχει με τον κύκλο ένα μόνο κοινό σημείο, το A . Ο ορισμός αυτός δεν μπορεί να γενικευτεί για οποιαδήποτε καμπύλη, γιατί, με έναν τέτοιο ορισμό η παραβολή $y = x^2$ θα είχε στο σημείο $A(1,1)$ δύο εφαπτόμενες ε και ζ



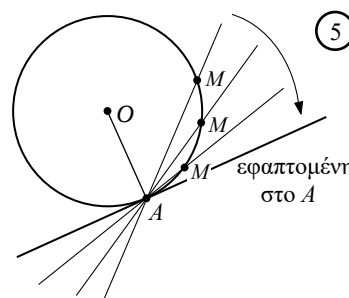
(Σχ. 4α), ενώ η $y = x^3$ δεν θα είχε στο σημείο $A(1,1)$ καμία εφαπτομένη (Σχ. 4β).



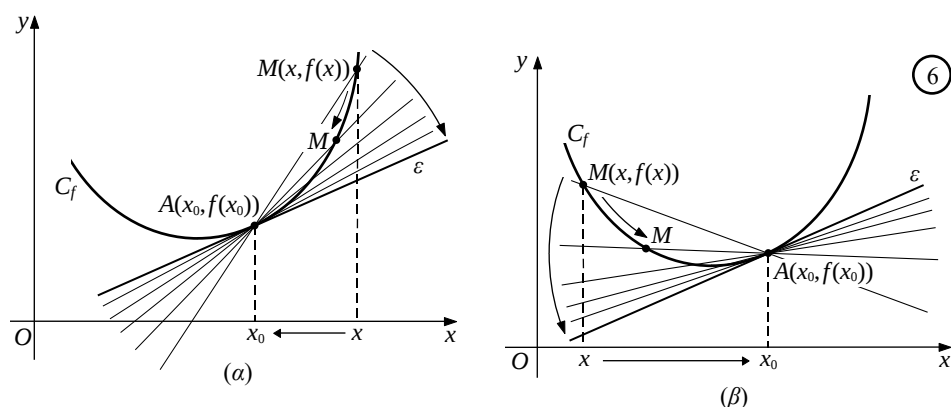
Επομένως, πρέπει να αναζητήσουμε έναν άλλον ορισμό της εφαπτομένης του κύκλου, ο οποίος να μπορεί να γενικευτεί για όλες τις καμπύλες.

Θεωρούμε, λοιπόν, ένα άλλο σημείο M του κύκλου (Σχ. 5). Τα σημεία A, M ορίζουν μια τέμνουσα του κύκλου, την ευθεία AM . Καθώς το σημείο M , κινούμενο πάνω στον κύκλο πλησιάζει στο A , η τέμνουσα AM φαίνεται να έχει ως “οριακή θέση” την εφαπτομένη του κύκλου στο A .

Τη διαπίστωση αυτή θα δούμε, τώρα, πως μπορούμε να την αξιοποιήσουμε για να ορίσουμε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης σε ένα σημείο της.



- Έστω f μία συνάρτηση και $A(x_0, f(x_0))$ ένα σημείο της γραφικής της παράστασης.



Αν πάρουμε ένα ακόμη σημείο $M(x, f(x))$, $x \neq x_0$, της γραφικής παράστασης της f και την ευθεία AM που ορίζουν τα σημεία A και M , παρατηρούμε ότι:

Καθώς το x τείνει στο x_0 με $x > x_0$, η τέμνουσα AM φαίνεται να παίρνει μια οριακή θέση ε (Σχ. 6α). Την ίδια οριακή θέση φαίνεται να παίρνει και όταν το x τείνει στο x_0 με $x < x_0$ (Σχ. 6β). Την οριακή θέση της AM θα μπορούσαμε να την ονομάσουμε εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο A . Επειδή η κλίση της τέμνουσας AM είναι ίση με $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, είναι λογικό να αναμένουμε ότι η εφαπτομένη της C_f

στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ θα έχει κλίση το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Έτσι δίνουμε τον παρακάτω ορισμό.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω f μια συνάρτηση και $A(x_0, f(x_0))$ ένα σημείο της C_f . Αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ και είναι ένας πραγματικός αριθμός λ , τότε ορίζουμε ως εφαπτομένη της C_f στο σημείο της A , την ευθεία ε που διέρχεται από το A και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ .

Επομένως, η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι

$$y - f(x_0) = \lambda(x - x_0), \quad \text{όπου} \quad \lambda = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι **παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0** του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ και είναι πραγματικός αριθμός.

Το όριο αυτό ονομάζεται **παραγώγος της f στο x_0** και συμβολίζεται με $f'(x_0)$.

$$\text{Δηλαδή: } f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Την κλίση $f'(x_0)$ της εφαπτομένης ε στο $A(x_0, f(x_0))$ θα τη λέμε και **κλίση της C_f στο A ή κλίση της f στο x_0** .

- Αν, τώρα, στην ισότητα $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ θέσουμε $x = x_0 + h$, τότε έχουμε

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

- Αν, τώρα, στην ισότητα $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ θέσουμε $x = x_0 \cdot h$, $x_0 \neq 0$,

$$\text{τότε έχουμε } f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 1} \frac{f(x_0 h) - f(x_0)}{x_0(h-1)}.$$

Πολλές φορές το $h = x - x_0$ συμβολίζεται με Δx , ενώ το $f(x_0 + h) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ συμβολίζεται με $\Delta f(x_0)$, οπότε ο παραπάνω τύπος

γράφεται: $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$. Η τελευταία ισότητα οδήγησε το Leibniz να

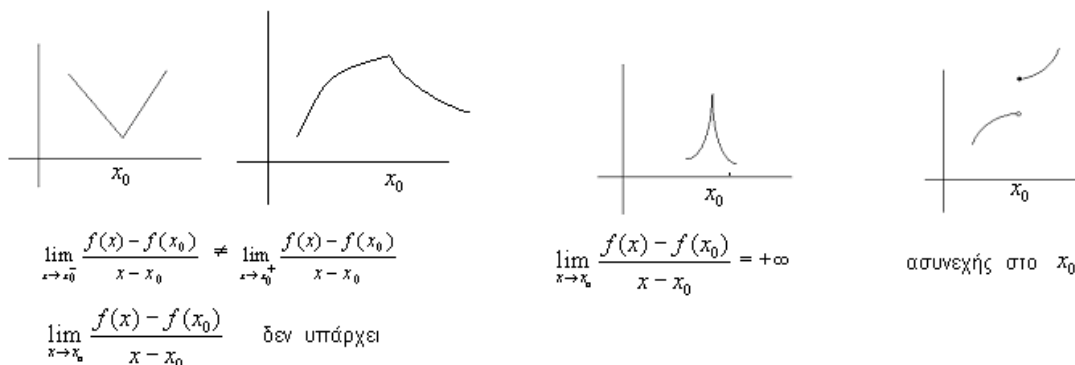
συμβολίσει την παράγωγο στο x_0 με $\frac{df(x_0)}{dx}$ ή $\left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_0}$. Ο συμβολισμός $f'(x_0)$ είναι μεταγενέστερος και οφείλεται στον Lagrange.

Είναι φανερό ότι, αν το x_0 είναι εσωτερικό σημείο ενός διαστήματος του πεδίου ορισμού της f , τότε:

Η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , αν και μόνο αν υπάρχουν στο $\mathbb{R}$ τα όρια

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{και είναι ίσα.}$$

- Μια συνάρτηση f δεν θα είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, αν το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ δεν υπάρχει ή υπάρχει αλλά δεν είναι πεπερασμένο. Γραφικά αυτό σημαίνει το σημείο $(x_0, f(x_0))$ είναι ένα γωνιακό σημείο ή σημείο ασυνέχειας



ΣΧΟΛΙΑ

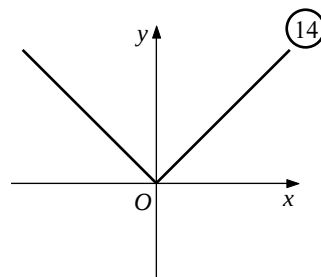
- Η στιγμιαία ταχύτητα ενός κινητού, τη χρονική στιγμή t_0 , είναι η παράγωγος της συνάρτησης θέσης $x = S(t)$ τη χρονική στιγμή t_0 . Δηλαδή, είναι $v(t_0) = S'(t_0)$.

- Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης ε της C_f μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης f , στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι η παράγωγος της f στο x_0 . Δηλαδή, είναι $\lambda = f'(x_0)$, οπότε η εξίσωση της ε φαπτομένης ε είναι: $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

Παράγωγος και συνέχεια

Έστω η συνάρτηση $f(x) = |x|$. Η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό, αφού

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1, \text{ ενώ}$$
$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1.$$



Παρατηρούμε, δηλαδή, ότι μια συνάρτηση f μπορεί να είναι συνεχής σ' ένα σημείο x_0 χωρίς να είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό. Αν, όμως, η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε θα είναι και συνεχής στο x_0 , δηλαδή ισχύει το παρακάτω θεώρημα:

ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 , τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

ΣΧΟΛΙΟ

Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σ' ένα σημείο x_0 , τότε, σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα, δεν μπορεί να είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .

ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΙΜΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ - ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

• Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A . Θα λέμε ότι:

— Η f είναι παραγωγίσιμη στο A ή, απλά, **παραγωγίσιμη**, όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_0 \in A$.

— Η f είναι **παραγωγίσιμη σε ένα ανοικτό διάστημα** (α, β) του πεδίου ορισμού της, όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_0 \in (\alpha, \beta)$.

— Η f είναι **παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα** $[\alpha, \beta]$ του πεδίου ορισμού της, όταν είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) και επιπλέον ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow \alpha^+} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow \beta^-} \frac{f(x) - f(\beta)}{x - \beta} \in \mathbb{R}.$$

• Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού A και A_1 το σύνολο των σημείων του A στα οποία αυτή είναι παραγωγίσιμη. Αντιστοιχίζοντας κάθε $x \in A_1$ στο $f'(x)$, ορίζουμε τη συνάρτηση $f': A_1 \rightarrow \mathbb{R}$ $x \rightarrow f'(x)$,

η οποία ονομάζεται **πρώτη παράγωγος της f** ή απλά **παράγωγος της f** . Η πρώτη παράγωγος της f συμβολίζεται και με $\frac{df}{dx}$ που διαβάζεται “ντε εφ προς ντε χι”. Για πρακτικούς λόγους την παράγωγο συνάρτηση $y = f'(x)$ θα τη συμβολίζουμε και με $y = (f(x))'$. Αν υποθέσουμε ότι το A_1 είναι διάστημα ή ένωση διαστημάτων, τότε η παράγωγος της f' , αν υπάρχει, λέγεται **δεύτερη παράγωγος της f** και συμβολίζεται με f'' . Επαγωγικά ορίζεται η **νιοστή παράγωγος της f** , με $n \geq 3$, και συμβολίζεται με $f^{(n)}$. Δηλαδή $f^{(n)} = [f^{(n-1)}]'$, $n \geq 3$.

Παράγωγος μερικών βασικών συναρτήσεων

- Έστω η σταθερή συνάρτηση $f(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = 0$, δηλαδή $(c)' = 0$
- Έστω η συνάρτηση $f(x) = x$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = 1$, δηλαδή $(x)' = 1$
- Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^\nu$, $\nu \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = \nu x^{\nu-1}$, δηλαδή $(x^\nu)' = \nu x^{\nu-1}$
- Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και ισχύει $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, δηλαδή $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Η $f(x) = \sqrt{x}$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.
- Έστω συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = \sigma\upsilon\nu x$, δηλαδή $(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$
- Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = -\eta\mu x$, δηλαδή $(\sigma\upsilon\nu x)' = -\eta\mu x$

ΣΧΟΛΙΟ

Τα όρια $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 0$, τα οποία χρησιμοποιήσαμε για να υπολογίσουμε την παράγωγο των συναρτήσεων $f(x) = \eta\mu x$, $g(x) = \sigma\upsilon\nu x$ είναι η παράγωγος στο $x_0 = 0$ των συναρτήσεων f, g αντιστοίχως, αφού

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x - \eta\mu 0}{x - 0} = f'(0) \quad , \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma\upsilon\nu x - \sigma\upsilon\nu 0}{x - 0} = g'(0) .$$

- Έστω η συνάρτηση $f(x) = e^x$. Αποδεικνύεται ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = e^x$, δηλαδή $(e^x)' = e^x$
- Έστω η συνάρτηση $f(x) = \ln x$. Αποδεικνύεται ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και ισχύει $f'(x) = \frac{1}{x}$, δηλαδή $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

Προσοχή

$f'(x) = (f(x))'$ όμως $f'(x_0) \neq (f(x_0))'$ αφού $f(x_0)$ αριθμός οπότε $(f(x_0))' = 0$ ενώ $f'(x_0)$ είναι η παράγωγος της f στο x_0 και δεν είναι απαραίτητα 0. Με λίγα λόγια πρώτα παραγωγίζουμε την f και μετά αντικαθιστούμε το x_0

π.χ. $(\ln 5)' = 0$ και όχι $\frac{1}{5}$, $(\eta\mu \frac{\pi}{3})' = 0$ και όχι $\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{3}$, $(\sqrt{2})' = 0$ και όχι $\frac{1}{2\sqrt{2}}$

ΚΑΝΟΝΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗΣ

Παράγωγος αθροίσματος

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , τότε η συνάρτηση $f+g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει: $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες σ' ένα διάστημα Δ , τότε για κάθε $x \in \Delta$ ισχύει: $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.

Το παραπάνω θεώρημα ισχύει και για περισσότερες από δύο συναρτήσεις. Δηλαδή, αν $f_1, f_2, \dots, f_k$, είναι παραγωγίσιμες στο Δ , τότε

$$(f_1 + f_2 + \dots + f_k)'(x) = f_1'(x) + f_2'(x) + \dots + f_k'(x).$$

Παράγωγος γινομένου

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , τότε και η συνάρτηση $f \cdot g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει: $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες σ' ένα διάστημα Δ , τότε για κάθε $x \in \Delta$ ισχύει: $(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.

- Το παραπάνω θεώρημα επεκτείνεται και για περισσότερες από δύο συναρτήσεις. Έτσι, για τρεις παραγωγίσιμες συναρτήσεις ισχύει:

$$\begin{aligned} (f(x)g(x)h(x))' &= [(f(x)g(x)) \cdot h(x)]' = (f(x)g(x))' \cdot h(x) + (f(x)g(x)) \cdot h'(x) = \\ &= [f'(x)g(x) + f(x)g'(x)]h(x) + f(x)g(x)h'(x) = f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x). \end{aligned}$$

- Αν f είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση σ' ένα διάστημα Δ και $c \in \mathbb{R}$, επειδή $(c)' = 0$, σύμφωνα με το θεώρημα (2) έχουμε: $(cf(x))' = cf'(x)$

Παράγωγος πηλίκου

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 και $g(x_0) \neq 0$, τότε και η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$$

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες σ' ένα διάστημα Δ και για κάθε $x \in \Delta$ ισχύει $g(x) \neq 0$, τότε για κάθε $x \in \Delta$ έχουμε: $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$.

- Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^{-\nu}$, $\nu \in \mathbb{N}^*$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει $f'(x) = -\nu x^{-\nu-1}$, δηλαδή $(x^{-\nu})' = -\nu x^{-\nu-1}$

Είδαμε, όμως, πιο πριν ότι $(x^\nu)' = \nu x^{\nu-1}$, για κάθε φυσικό $\nu > 1$. Επομένως, αν $\kappa \in \mathbb{Z} - \{0, 1\}$, τότε $(x^\kappa)' = \kappa x^{\kappa-1}$.

• Έστω η συνάρτηση $f(x) = \varepsilon\varphi x$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}_1 = \mathbb{R} - \{x \mid \sin x = 0\}$ και ισχύει $f'(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$, δηλαδή $(\varepsilon\varphi x)' = \frac{1}{\sin^2 x}$

• Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sigma\varphi x$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}_2 = \mathbb{R} - \{x \mid \eta\mu x = 0\}$ και ισχύει $f'(x) = -\frac{1}{\eta\mu^2 x}$, δηλαδή $(\sigma\varphi x)' = -\frac{1}{\eta\mu^2 x}$

Παράγωγος σύνθετης συνάρτησης

Αν η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και η f είναι παραγωγίσιμη στο $g(x_0)$, τότε η συνάρτηση $f \circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

Γενικά, αν μια συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και η f είναι παραγωγίσιμη στο $g(\Delta)$, τότε η συνάρτηση $f \circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x). \quad \text{Δηλαδή, αν } u = g(x), \text{ τότε } (f(u))' = f'(u) \cdot u'.$$

Με το συμβολισμό του Leibniz, αν $y = f(u)$ και $u = g(x)$, έχουμε τον τύπο

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \quad \text{που είναι γνωστός ως κανόνας της αλυσίδας.}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Το σύμβολο $\frac{dy}{dx}$ δεν είναι πηλίκο. Στον κανόνα της αλυσίδας απλά συμπεριφέρεται ως πηλίκο, πράγμα που ευκολύνει την απομνημόνευση του κανόνα.

• Η συνάρτηση $f(x) = x^a$, $a \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και ισχύει $f'(x) = ax^{a-1}$, δηλαδή $(x^a)' = ax^{a-1}$

Αποδεικνύεται ότι, για $a > 1$ η f είναι παραγωγίσιμη και στο σημείο $x_0 = 0$ και η παράγωγός της είναι ίση με 0, επομένως δίνεται από τον ίδιο τύπο.

• Η συνάρτηση $f(x) = a^x$, $a > 0$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = a^x \ln a$, δηλαδή $(a^x)' = a^x \ln a$

• Η συνάρτηση $f(x) = \ln |x|$, $x \in \mathbb{R}^*$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ με $(\ln |x|)' = \frac{1}{x}$

Προσοχή !

Αν συναρτήσεις f, g παραγωγίσιμες στο A και ισχύει $f(x) = g(x)$ για κάθε

$x \in A$, τότε είναι και $f'(x) = g'(x)$ για κάθε $x \in A$. Με λίγα λόγια μπορούμε να παραγωγίζουμε τα μέλη μιας ισότητας, εφόσον είναι και τα δύο μέλη παραγωγίσιμα. Το αντίστροφο όμως δεν ισχύει απαραίτητα. Δηλαδή αν $f'(x) = g'(x)$ για κάθε $x \in A$, τότε δεν είναι και $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in A$

Επίσης δεν μπορούμε να παραγωγίζουμε τα μέλη μιας ανισότητας. Δηλαδή αν $f(x) < g(x)$ για κάθε $x \in A$ τότε ακόμα και αν f, g παραγωγίσιμες στο A δεν ισχύει ότι $f'(x) < g'(x)$ για κάθε $x \in A$

- Με βάση την παραπάνω παρατήρηση μπορούμε να βρίσκουμε την παράγωγο της αντίστροφης συνάρτησης ακόμα και αν δεν ξέρουμε τον τύπο της

Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα A , η οποία είναι 1-1 και παραγωγίσιμη με $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in A$. Τότε ορίζεται η αντίστροφή της $f^{-1}: f(A) \rightarrow A$ και με την προϋπόθεση ότι είναι παραγωγίσιμη έχουμε ότι

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}, \quad x \in f(A). \text{ Πράγματι για κάθε } x \in f(A) \text{ ισχύει ότι:}$$

$f(f^{-1}(x)) = x$ οπότε παραγωγίζοντας τη σχέση αυτή έχουμε

$$(f(f^{-1}(x)))' = (x)' \Rightarrow f'(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1}(x))' = 1 \Rightarrow (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}, \quad x \in f(A)$$

Παρατηρήσεις για τη εφαπτομένη

Έστω μια συνάρτηση f και $A(x_0, f(x_0))$ ένα σημείο της C_f . Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο χ_0 , τότε η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι $(\epsilon): y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

1. Η (ϵ) είναι παράλληλη στο $\chi\chi'$ $\Leftrightarrow f'(x_0) = 0$
2. Η (ϵ) σχηματίζει με $\chi\chi'$ γωνία $\omega \neq 90^\circ$ $\Leftrightarrow f'(x_0) = \varepsilon\varphi\omega$
3. Η (ϵ) σχηματίζει με $\chi\chi'$ οξεία γωνία $\Leftrightarrow f'(x_0) > 0$
4. Η (ϵ) σχηματίζει με $\chi\chi'$ αμβλεία γωνία $\Leftrightarrow f'(x_0) < 0$
5. Η (ϵ) είναι παράλληλη στην ευθεία $\psi = \lambda\chi + \beta$ $\Leftrightarrow f'(x_0) = \lambda$
6. Η (ϵ) είναι κάθετη στην ευθεία $\psi = \lambda\chi + \beta$ $\Leftrightarrow f'(x_0) \cdot \lambda = -1$
7. Η (ϵ) διέρχεται από την αρχή των αξόνων $\Leftrightarrow x_0 \cdot f'(x_0) = f(x_0)$
8. Σε ασκήσεις όπου δεν δίνεται το σημείο επαφής, το θεωρούμε εμείς ως $(x_0, f(x_0))$, γράφουμε την εξίσωση της εφαπτομένης $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ και από τις απαιτήσεις του προβλήματος βρίσκουμε τις τιμές του x_0
9. Έλεγχος αν μια δοσμένη ευθεία εφάπτεται στην C_f
Η ευθεία $(\eta) \psi = \lambda\chi + \beta$ εφάπτεται της C_f αν και μόνο αν υπάρχει $x_0 \in D_f$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = \lambda$ και $(x_0, f(x_0)) \in (\eta)$ δηλαδή $f(x_0) = \lambda \cdot x_0 + \beta$
10. Η C_f εφάπτεται στον $\chi\chi'$ αν και μόνο αν υπάρχει $x_0 \in D_f$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = 0$ και $f(x_0) = 0$

11. Κοινή εφαπτομένη σε κοινό σημείο δύο γραφικών παραστάσεων

Έστω δύο συναρτήσεις f, g παραγωγίσιμες στο x_0 . Οι C_f, C_g έχουν κοινή εφαπτομένη στο κοινό τους σημείο με τετμημένη x_0 αν και μόνο αν ισχύει ότι $f(x_0) = g(x_0)$ και $f'(x_0) = g'(x_0)$

12. Κοινή εφαπτομένη σε μη κοινό σημείο δύο γραφικών παραστάσεων

Έστω δύο συναρτήσεις f, g παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$. Οι C_f, C_g έχουν κοινή εφαπτομένη αν και μόνο αν υπάρχουν σημεία $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$ τέτοια ώστε η ευθεία $y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1)$ να ταυτίζεται με την ευθεία $y - g(x_2) = g'(x_2)(x - x_2)$ που ισοδύναμα σημαίνει ότι :

$$f'(x_1) = g'(x_2) \quad \text{και} \quad f(x_1) - x_1 f'(x_1) = g(x_2) - x_2 g'(x_2)$$

ΡΥΘΜΟΣ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ

Αν δύο μεταβλητά μεγέθη x, y συνδέονται με τη σχέση $y = f(x)$, όταν f είναι μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε ονομάζουμε **ρυθμό μεταβολής του y ως προς το x στο σημείο x_0** την παράγωγο $f'(x_0)$.

Για παράδειγμα, ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας v ως προς το χρόνο t τη χρονική στιγμή t_0 είναι η παράγωγος $v'(t_0)$, της ταχύτητας v ως προς το χρόνο t τη χρονική στιγμή t_0 . Η παράγωγος $v'(t_0)$ λέγεται **επιτάχυνση** του κινητού τη χρονική στιγμή t_0 και συμβολίζεται με $a(t_0)$. Είναι δηλαδή $a(t_0) = v'(t_0) = s''(t_0)$.

- Το κινητό είναι ακίνητο σημαίνει $v(t) = 0$
- Το κινητό κινείται στη θετική κατεύθυνση σημαίνει $v(t) > 0$
- Το κινητό κινείται στη αρνητική κατεύθυνση σημαίνει $v(t) < 0$
- Η ταχύτητα αυξάνεται σημαίνει ότι $a(t) > 0$
- Η ταχύτητα μειώνεται σημαίνει ότι $a(t) < 0$
- Το διάστημα που διανύει το κινητό κατά το χρονικό διάστημα από t_1 έως t_2 με την προϋπόθεση ότι κινείται πάντα κατά την ίδια κατεύθυνση είναι $|s(t_2) - s(t_1)|$. Αν το κινητό δεν έχει σταθερή κατεύθυνση, τότε υπολογίζουμε τα επιμέρους διαστήματα κατά τα χρονικά διαστήματα που έχει την ίδια κατεύθυνση και στο τέλος προσθέτουμε τα επιμέρους διαστήματα.
- Στην οικονομία, το κόστος παραγωγής K , η είσπραξη E και το κέρδος P εκφράζονται συναρτήσεις της ποσότητας x του παραγόμενου προϊόντος. Έτσι, η παράγωγος $K'(x_0)$ παριστάνει το ρυθμό μεταβολής του κόστους K ως προς την ποσότητα x , όταν $x = x_0$ και λέγεται **οριακό κόστος στο x_0** . Ανάλογα, ορίζονται και οι έννοιες **οριακή είσπραξη στο x_0** και **οριακό κέρδος στο x_0** .
- Αν ένα μέγεθος ψ εξαρτάται από το χ , τότε $\psi = \psi(\chi)$. Αν επιπλέον το χ εξαρτάται από το t τότε $\chi = \chi(t)$ οπότε τελικά $\psi = \psi(t)$
- Αν τα μεταβλητά μεγέθη ψ, χ συνδέονται με τη σχέση $\psi = f(\chi)$, τότε το ότι το ψ **αυξάνεται** ως προς χ με ρυθμό $\alpha > 0$ σημαίνει ότι $f'(\chi) = \alpha$, ενώ αν **μειώνεται** σημαίνει ότι $f'(\chi) = -\alpha$