

Μονοτονία συνάρτησης

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι *συνεχής* σε ένα διάστημα Δ .

- Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε *εσωτερικό* σημείο x του Δ , τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ .
- Αν $f'(x) < 0$ σε κάθε *εσωτερικό* σημείο x του Δ , τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ .

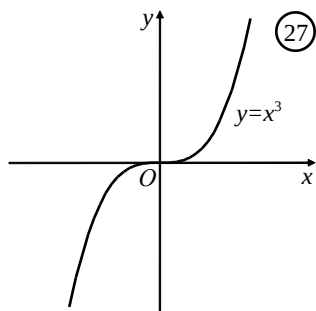
Γραφική ερμηνεία

Αν μία παραγωγίσιμη συνάρτηση έχει σε κάθε σημείο της γραφικής τα παράστασης θετική κλίση, δηλαδή η εφαπτομένη της σε οποιοδήποτε σημείο της σχηματίζει με τον $χχ'$ οξεία γωνία, τότε η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα. Αντίστοιχα αν έχει αρνητική κλίση δηλαδή κάθε εφαπτομένη της σχηματίζει αμβλεία γωνία με τον $χχ'$, είναι γνησίως φθίνουσα.

Παρατηρήσεις

1. Το αντίστροφο του παραπάνω θεωρήματος **δεν ισχύει**. Δηλαδή, αν η f είναι γνησίως αύξουσα (αντιστοίχως γνησίως φθίνουσα) στο Δ , η παράγωγός της ακόμα και αν υπάρχει (γιατί δεν είναι κάθε γνησίως μονότονη συνάρτηση και παραγωγίσιμη ή συνεχής) **δεν είναι υποχρεωτικά** θετική (αντιστοίχως αρνητική) στο εσωτερικό του Δ .

Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = x^3$, αν και είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, εντούτοις έχει παράγωγο $f'(x) = 3x^2$ η οποία δεν είναι θετική σε όλο το $\mathbb{R}$, αφού $f'(0) = 0$. Ισχύει όμως $f'(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.



2. Το θεώρημα ισχύει για διάστημα και όχι για ένωση διαστημάτων.

Έτσι π.χ. η $f(x) = \frac{1}{x}$ με $D_f = \mathbb{R}^* = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ παρόλο που έχει

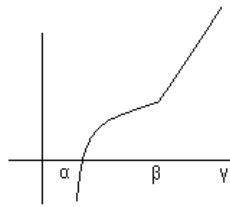
$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}^* \text{ δεν είναι γνησίως φθίνουσα στο } \mathbb{R}^*.$$

Η μη εφαρμογή του θεωρήματος οφείλεται στο ότι το $\mathbb{R}^*$ είναι ένωση διαστημάτων.

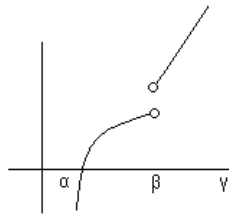
3. Αν $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta) \cup (\beta, \gamma)$ τότε η f γνησίως αύξουσα στο (α, β) , είναι γνησίως αύξουσα στο (β, γ) αλλά **δεν** λέμε ότι είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha, \beta) \cup (\beta, \gamma)$ (σχήμα 2,3).

- Αν η f είναι συνεχής στο β τότε είναι γνησίως αύξουσα και στο (α, γ) . Σχήμα 1
- Αν η f ορίζεται στο (α, γ) είναι ασυνεχής στο β τότε για να είναι γνησίως αύξουσα και στο (α, γ) θα πρέπει

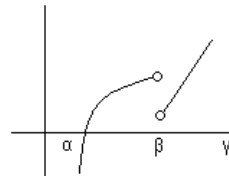
$$\lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x) \leq f(\beta) \leq \lim_{x \rightarrow \beta^+} f(x)$$
 (σχήμα 4,5), διαφορετικά **δεν** είναι γνησίως αύξουσα στο (α, γ) (σχήμα 6, 7)



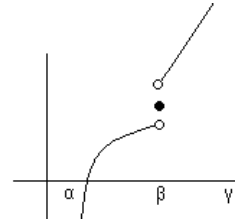
σχήμα 1



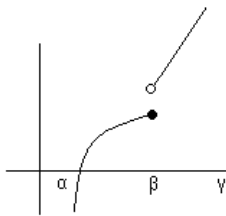
σχήμα 2



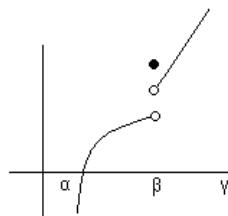
σχήμα 3



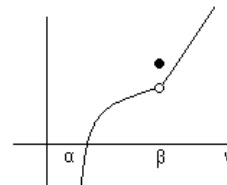
σχήμα 4



σχήμα 5



σχήμα 6



σχήμα 7

4. Ανάλογα συμπεράσματα έχουμε όταν $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta) \cup (\beta, \gamma)$, με την αντίστοιχη συνθήκη $\lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x) \geq \lim_{x \rightarrow \beta^+} f(x)$ που μας εξασφαλίζει ότι η C_f καθώς κατεβαίνει διακόπτεται και ξεκινάει από πιο χαμηλά και συνεχίζει να κατεβαίνει)
5. Την παραγωγισιμότητα την εξετάζουμε στα εσωτερικά σημεία του Δ , που σημαίνει ότι ακόμα και αν το Δ είναι κλειστό δεν μας ενδιαφέρει η συμπεριφορά της παραγώγου στα άκρα του Δ , ούτε ως προς την ύπαρξη ούτε ως προς το πρόσημο. Η συνέχεια όμως αναφέρεται σε όλο το Δ άρα και στα άκρα αν αυτό είναι κλειστό.
6. Αν μια παραγωγίσιμη συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ είναι γνησίως μονότονη τότε η παράγωγός της διατηρεί πρόσημο ή μπορεί και να μηδενίζεται αλλά σε μεμονωμένα σημεία του Δ (ακόμα και άπειρα) όχι όμως σε ολόκληρο υποδιάστημα του Δ , αφού κάτι τέτοιο θα σήμαινε ότι στο υποδιάστημα αυτό η συνάρτηση είναι σταθερή.
7. Αν $f'(x) \geq 0$ σε κάθε **εσωτερικό** σημείο x του Δ και η ισότητα $f'(x) = 0$ ισχύει σε μεμονωμένα σημεία του Δ τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ . (το ίδιο συμβαίνει αν η f' δεν ορίζεται σε μεμονωμένα σημεία του Δ αλλά είναι συνεχής σε αυτά)

Αντίστοιχα αν $f'(x) \leq 0$

8. Αν όμως $f'(x) \geq 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ χωρίς να ξέρουμε πότε ισχύει η ισότητα $f'(x) = 0$, τότε η f αύξουσα στο Δ (δηλαδή κάπου μπορεί να είναι γνησίως αύξουσα και κάπου σταθερή)

Αντίστοιχα αν $f'(x) \leq 0$

9. Με το πρόσημο λοιπόν της παραγώγου, μπορούμε να βρίσκουμε τη μονοτονία μιας συνάρτησης και κατ' επέκταση, το πρόσημο της, το πλήθος των ριζών της, το σύνολο τιμών της, να λύνουμε ανισώσεις ή και κάποιες εξισώσεις, να αποδεικνύουμε ανισότητες.

Τονίζουμε ότι ο συνδυασμός της μονοτονίας και των ριζών μιας συνάρτησης μας δίνει το πρόσημο αυτής, αφού ανάλογα με το αν αλλάζει μονοτονία εκατέρωθεν των ριζών ή όχι, δεν αλλάζει πρόσημο ή αλλάζει (το πρόσημο εξαρτάται από το είδος μονοτονίας).

Π.χ. αν f γνησίως αύξουσα στο Δ και $f(x_0) = 0$ για κάποιο $x_0 \in \Delta$ τότε για κάθε $x \in \Delta$ με $x < x_0$ είναι $f(x) < f(x_0) \Rightarrow f(x) < 0$ ενώ

για κάθε $x \in \Delta$ με $x > x_0$ είναι $f(x) > f(x_0) \Rightarrow f(x) > 0$

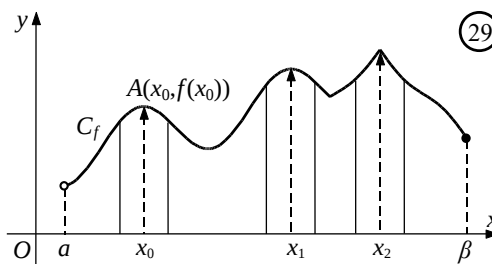
10. Αν δεν μπορούμε να βρούμε το πρόσημο της 1^{ης} παραγώγου, τότε βρίσκουμε το πρόσημο της 2^{ης} παραγώγου που σε συνδυασμό με τις ρίζες της 1^{ης} παραγώγου, θα μας δώσει τελικά το πρόσημο της 1^{ης} παραγώγου.

11. Αν μια συνάρτηση δεν είναι παραγωγίσιμη βρίσκουμε τη μονοτονία της αναγκαστικά με τον ορισμό.

ΤΟΠΙΚΑ ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Η έννοια του τοπικού ακροτάτου

Στο διπλανό σχήμα έχουμε τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f σ' ένα διάστημα $(\alpha, \beta]$. Παρατηρούμε ότι στο σημείο $x = x_0$ η τιμή της συνάρτησης είναι μεγαλύτερη από την τιμή της σε κάθε “γειτονικό” σημείο του x_0 .



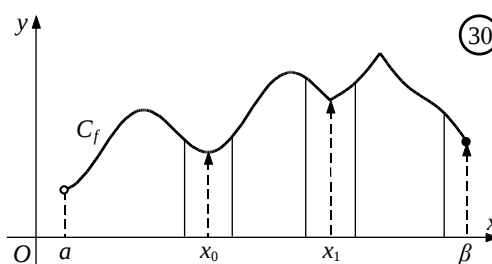
Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η f παρουσιάζει στο x_0 τοπικό μέγιστο. Το ίδιο συμβαίνει και στα σημεία x_1 και x_2 . Γενικά έχουμε τον ακόλουθο ορισμό:

ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού A , θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ **τοπικό μέγιστο**, όταν υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Το x_0 λέγεται **θέση ή σημείο τοπικού μεγίστου**, ενώ το $f(x_0)$ **τοπικό μέγιστο της f** .

Αν η ανισότητα $f(x) \leq f(x_0)$ ισχύει για κάθε $x \in A$, τότε, όπως είδαμε στην παράγραφο 1.3, η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ **ολικό μέγιστο** ή απλά **μέγιστο**, το $f(x_0)$.

Στο διπλανό σχήμα παρατηρούμε ότι στο σημείο $x = x_0$ η τιμή της συνάρτησης είναι μικρότερη από την τιμή της σε κάθε “γειτονικό” σημείο του x_0 . Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η f παρουσιάζει στο x_0 τοπικό ελάχιστο. Το ίδιο συμβαίνει και στα σημεία x_1 και β . Γενικά, έχουμε τον ακόλουθο ορισμό:



ΟΡΙΣΜΟΣ

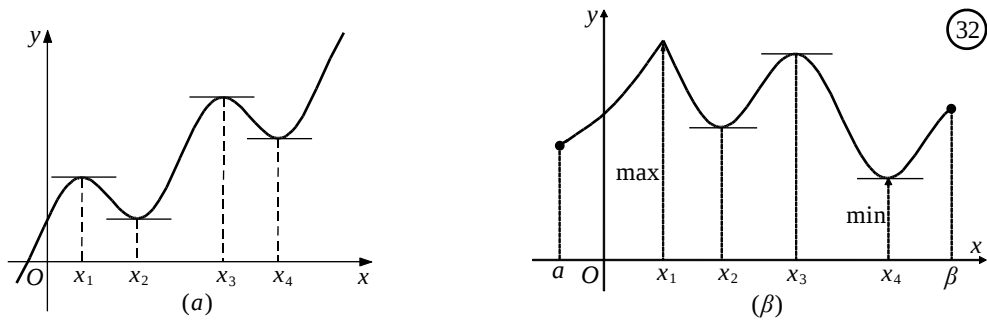
Μία συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού A , θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ **τοπικό ελάχιστο**, όταν υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε $f(x) \geq f(x_0)$, για κάθε $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Το x_0 λέγεται **θέση ή σημείο τοπικού ελαχίστου**, ενώ το $f(x_0)$ **τοπικό ελάχιστο της f** .

Αν η ανισότητα $f(x) \geq f(x_0)$ ισχύει για κάθε $x \in A$, τότε, όπως είδαμε στην παράγραφο 1.3, η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ **ολικό ελάχιστο** ή απλά **ελάχιστο**, το $f(x_0)$.

Τα τοπικά μέγιστα και τοπικά ελάχιστα της f λέγονται **τοπικά ακρότατα** αυτής, ενώ τα σημεία στα οποία η f παρουσιάζει τοπικά ακρότατα λέγονται **θέσεις τοπικών ακροτάτων**. Το μέγιστο και το ελάχιστο της f λέγονται **ολικά ακρότατα** ή απλά **ακρότατα** αυτής.

ΣΧΟΛΙΑ

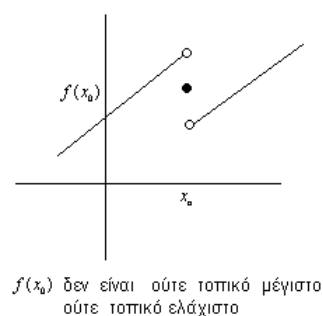
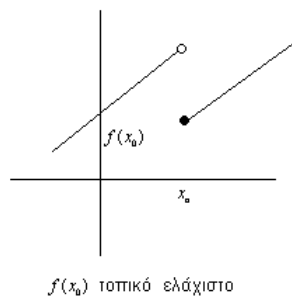
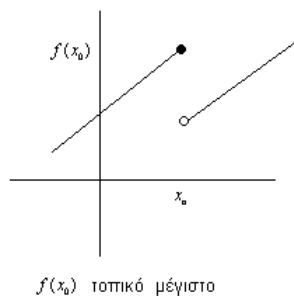
1. Ένα τοπικό μέγιστο μπορεί να είναι μικρότερο από ένα τοπικό ελάχιστο



2. Αν μια συνάρτηση f παρουσιάζει μέγιστο, τότε αυτό θα είναι το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα, ενώ αν παρουσιάζει, ελάχιστο, τότε αυτό θα είναι το μικρότερο από τα τοπικά ελάχιστα. (Σχ. 32β). Το μεγαλύτερο όμως από τα τοπικά μέγιστα μίας συνάρτησης δεν είναι πάντοτε μέγιστο αυτής, αφού μπορεί να μην έχει ολικό μέγιστο.

Επίσης το μικρότερο από τα τοπικά ελάχιστα μίας συνάρτησης δεν είναι πάντοτε ελάχιστο της συνάρτησης (Σχ. 32α), αφού μπορεί να μην έχει ολικό ελάχιστο.

3. Αν $f(x) \geq m$ για κάθε $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, δεν σημαίνει απαραίτητα ότι το m είναι τοπικό ελάχιστο, αφού μπορεί το m να μην αποτελεί τιμή της συνάρτησης. Πρέπει επίσης να εξασφαλίσουμε ότι υπάρχει $x_0 \in A$ με $f(x_0) = m$. Αντίστοιχα αν $f(x) \leq M$
4. Ο ορισμός που δόθηκε για τα τοπικά ακρότατα αφορά και σε συναρτήσεις που δεν παραγωγίζουμε, ή που δεν είναι καν συνεχείς. Μη περδεύουμε λοιπόν τον ορισμό με τα κριτήρια που θα μάθουμε παρακάτω για τον προσδιορισμό των ακροτάτων.
5. Μια συνάρτηση μπορεί να έχει πολλά τοπικά ακρότατα, ακόμα και άπειρα. Τα ολικά της ακρότατα όμως είναι δύο, ένα μέγιστο και ένα ελάχιστο, τα οποία όμως μπορεί να τα παρουσιάζει σε άπειρες θέσεις. (π.χ. $\eta\mu x$, $\sigma\upsilon\nu x$)
6. Η σταθερή συνάρτηση $f(x) = c, c \in \mathbb{R}$, έχει σε κάθε σημείο της και ολικό μέγιστο και ολικό ελάχιστο. Και αντίστροφα, αν μιας συνάρτησης το ολικό μέγιστο και το ολικό ελάχιστο ισούνται, τότε αυτή είναι η σταθερή συνάρτηση.
7. Προσοχή στα παρακάτω σχήματα



ΘΕΩΡΗΜΑ (Fermat)

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα **εσωτερικό** σημείο του Δ . Αν η f παρουσιάζει **τοπικό ακρότατο** στο x_0 και είναι **παραγωγίσιμη** στο σημείο αυτό, τότε: $f'(x_0)=0$

Γραφική ερμηνεία

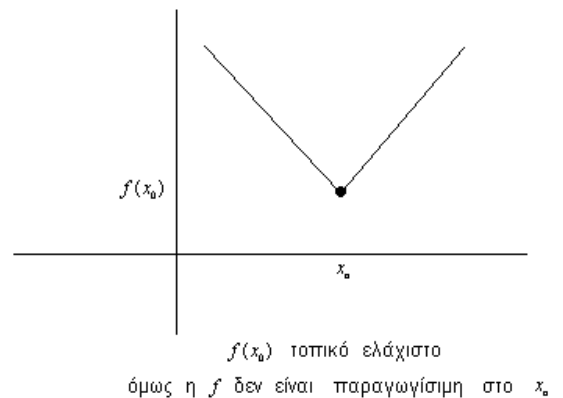
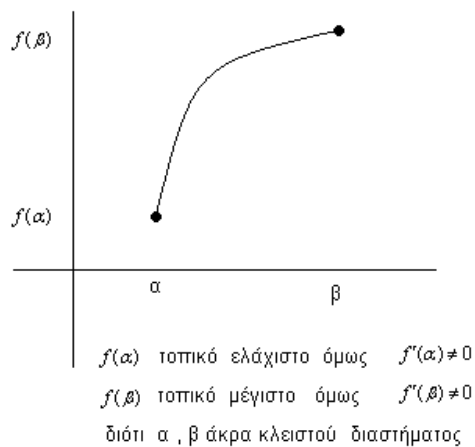
Αν σ' ένα εσωτερικό σημείο x_0 ενός διαστήματος του πεδίου ορισμού της f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο και επιπλέον είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ η εφαπτομένη (ε) της γραφικής παράστασης της f είναι οριζόντια, αφού ισχύει $\lambda_\varepsilon = f'(x_0) = 0$. (σχήμα 32β)

Παρατηρήσεις

1. Το θεώρημα δεν ισχύει αντιστρόφως. Δηλαδή αν $f'(x_0)=0$ τότε δεν σημαίνει απαραίτητα ότι το $f(x_0)$ είναι τοπικό ακρότατο .

π.χ. η $f(x)=x^3$, έχει παράγωγο $f'(x)=3x^2$ και παρόλο που $f'(0)=0$, δεν παρουσιάζει στο 0 ακρότατο.

2. Το θεώρημα αναφέρεται μόνο σε εσωτερικά σημεία διαστήματος, στα οποία μάλιστα είναι και παραγωγίσιμη. Δηλαδή μπορεί μία συνάρτηση να παρουσιάζει ακρότατο στο χ_0 αλλά να μην ισχύει ότι $f'(x_0)=0$, είτε γιατί το χ_0 είναι άκρο κλειστού διαστήματος (και άρα όχι εσωτερικό σημείο) είτε γιατί δεν είναι παραγωγίσιμη σε αυτό και άρα η παράγωγος δεν είναι μηδέν αφού στο σημείο αυτό δεν υπάρχει καν.



3. Συνοψίζοντας αν μία συνάρτηση παρουσιάζει ακρότατο σε ένα σημείο x_0 , τότε θα ισχύει κάτι από τα παρακάτω:

$$\alpha) \quad f'(x_0) = 0 \quad \text{ή}$$

β) δεν ορίζεται η παράγωγος στο x_0 . (μπορεί να είναι συνεχής στο x_0 μπορεί και όχι) ή

γ) το χ_0 είναι άκρο κλειστού διαστήματος (άσχετα αν είναι παραγωγίσιμη σε αυτό ή όχι)

Προσδιορισμός των τοπικών ακροτάτων

Σύμφωνα με το θεώρημα Fermat, τα εσωτερικά σημεία του Δ , στα οποία η f' είναι διαφορετική από το μηδέν, δεν είναι θέσεις τοπικών ακροτάτων. Επομένως, όπως φαίνεται και στα σχήματα 29 και 30,

οι πιθανές θέσεις των τοπικών ακροτάτων μιας συνάρτησης f σ' ένα διάστημα Δ είναι:

1. Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η παράγωγος της f μηδενίζεται.
2. Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f δεν παραγωγίζεται.
3. Τα άκρα του Δ (αν ανήκουν στο πεδίο ορισμού της).

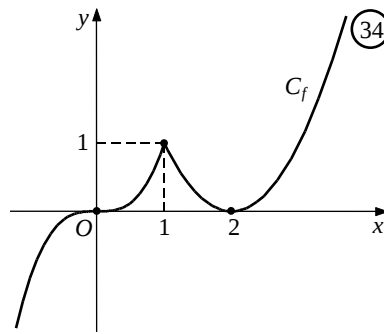
Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f δεν παραγωγίζεται ή η παράγωγός της είναι ίση με το μηδέν, λέγονται **κρίσιμα σημεία** της f στο διάστημα Δ . (ειδικά τα σημεία στα οποία μηδενίζεται λέγονται στάσιμα)

Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & , x < 1 \\ (x-2)^2 & , x \geq 1 \end{cases}.$$

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R} - \{1\}$ με

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 & , x < 1 \\ 2(x-2) & , x > 1 \end{cases}.$$



Οι ρίζες της $f'(x)=0$ είναι οι 0 και 2.

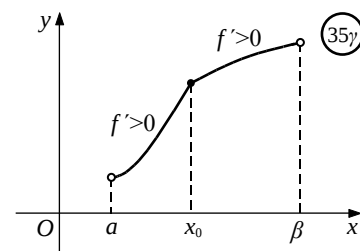
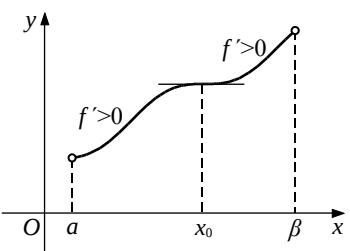
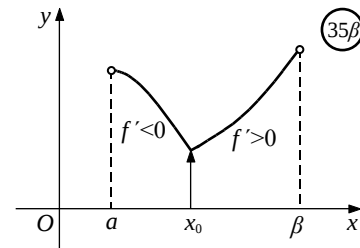
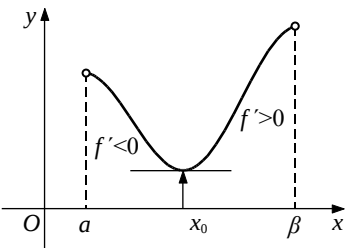
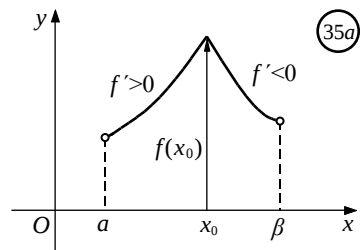
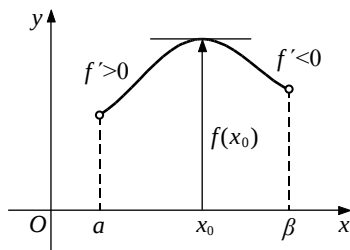
Επειδή η f' μηδενίζεται στα σημεία 0 και 2, ενώ δεν υπάρχει στο 1, τα κρίσιμα σημεία της f είναι οι αριθμοί 0, 1 και 2. Όμως, όπως φαίνεται στο σχήμα, τα σημεία 1 και 2 είναι θέσεις τοπικών ακροτάτων, ενώ το σημείο 0 δεν είναι θέση τοπικού ακροτάτου. Άρα δεν είναι όλα τα κρίσιμα σημεία θέσεις τοπικών ακροτάτων της f .

- Επομένως, χρειαζόμαστε ένα κριτήριο το οποίο να μας πληροφορεί ποια από τα κρίσιμα σημεία της f είναι θέσεις τοπικών ακροτάτων αυτής. Σχετικά ισχύει το παρακάτω θεώρημα:

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 , στο οποίο όμως η f είναι **συνεχής**.

- i) Αν $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β) , τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f . (Σχ. 35α)
- ii) Αν $f'(x) < 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) > 0$ στο (x_0, β) , τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f . (Σχ. 35β)
- iii) Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, τότε το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α, β) . (Σχ. 35γ).



ΣΧΟΛΙΟ

Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα κλειστό διάστημα $[a, \beta]$, όπως γνωρίζουμε (Θεώρημα § 1.8), η f παρουσιάζει μέγιστο και ελάχιστο. Για την εύρεση του μέγιστου και ελάχιστου εργαζόμαστε ως εξής:

1. Βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία της f .
2. Υπολογίζουμε τις τιμές της f στα σημεία αυτά και στα άκρα των διαστημάτων.
3. Από αυτές τις τιμές η μεγαλύτερη είναι το μέγιστο και η μικρότερη το ελάχιστο της f .

• Για να εφαρμόσουμε το προηγούμενο θεώρημα απαιτείται να προσδιορίσουμε το πρόσημο της f' εκατέρωθεν του x_0 . Όταν ο προσδιορισμός αυτός δεν είναι εύκολος ή είναι αδύνατος, τότε το παρακάτω θεώρημα, του οποίου η απόδειξη παραλείπεται, μπορεί να μας πληροφορήσει αν το x_0 είναι θέση τοπικού ακρότατου.

ΘΕΩΡΗΜΑ *

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β) και x_0 ένα σημείο του (α, β) στο οποίο η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη.

- Αν $f'(x_0) = 0$ και $f''(x_0) < 0$, τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο.
- Αν $f'(x_0) = 0$ και $f''(x_0) > 0$, τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο.

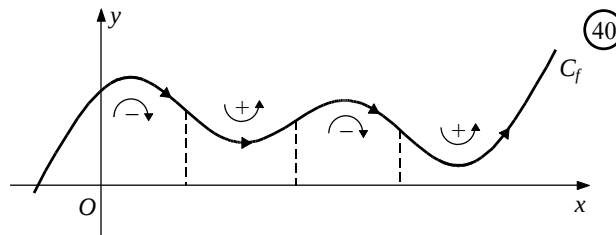
Κοίλα - κυρτά συνάρτησης

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω μία συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ . Θα λέμε ότι:

- Η συνάρτηση f στρέφεται **κοίλα προς τα άνω** ή είναι **κυρτή** στο Δ , αν η f' είναι γνησίως αύξουσα στο εσωτερικό του Δ .
- Η συνάρτηση f στρέφεται **κοίλα προς τα κάτω** ή είναι **κοίλη** στο Δ , αν η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο εσωτερικό του Δ .

Εποπτικά, μία συνάρτηση f είναι κυρτή (αντιστοίχως κοίλη) σε ένα διάστημα Δ , όταν ένα κινητό, που κινείται πάνω στη C_f , για να διαγράψει το τόξο που αντιστοιχεί στο διάστημα Δ πρέπει να στραφεί κατά τη θετική (αντιστοίχως αρνητική) φορά. (Σχ. 40)



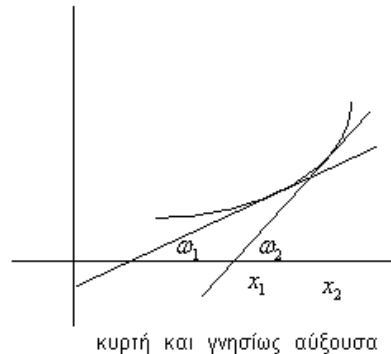
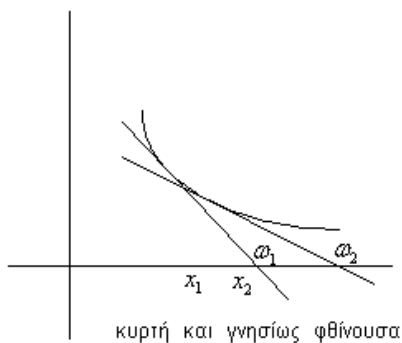
Για να δηλώσουμε στον πίνακα μεταβολών ότι μια συνάρτηση f είναι κυρτή (αντιστοίχως κοίλη) σε ένα διάστημα Δ , χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $\curvearrowright$ (αντιστοίχως $\curvearrowleft$).

Γραφική ερμηνεία

- Αν μία συνάρτηση είναι κυρτή και γνησίως μονότονη τότε όσο κινούμαστε δεξιότερα πάνω στην γραφική παράσταση της, τόσο η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης γίνεται πιο οριζόντια, δηλαδή σχηματίζει μεγαλύτερη γωνία με τον $χχ'$, δηλαδή έχει μεγαλύτερο συντελεστή διεύθυνσης, δηλαδή τόσο μεγαλώνει η παράγωγός στα σημεία επαφής.

Για κάθε $x_1, x_2 \in D_f$ με $x_1 < x_2$ είναι

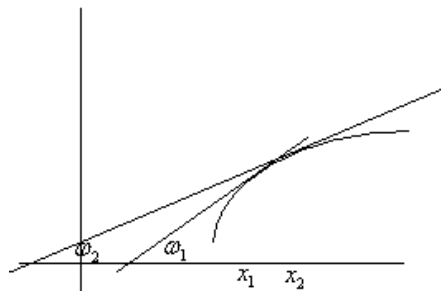
$$\omega_1 < \omega_2 \xRightarrow{\varepsilon\phi\chi\uparrow} \varepsilon\phi\omega_1 < \varepsilon\phi\omega_2 \Rightarrow f'(x_1) < f'(x_2) \Rightarrow f' \text{ γνησίως αύξουσα}$$



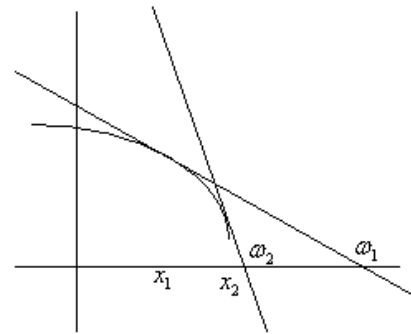
- Αν μία συνάρτηση είναι κοίλη και γνησίως μονότονη τότε όσο κινούμαστε δεξιότερα πάνω στην γραφική παράστασή της, τόσο η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης γίνεται πιο κατακόρυφη, δηλαδή σχηματίζει μικρότερη γωνία με τον $\chi\chi'$, δηλαδή έχει μικρότερο συντελεστή διεύθυνσης, δηλαδή τόσο μικραίνει η παράγωγός στα σημεία επαφής.

Για κάθε $x_1, x_2 \in D_f$ με $x_1 < x_2$ είναι

$$\omega_1 > \omega_2 \Rightarrow \varepsilon\phi\omega_1 > \varepsilon\phi\omega_2 \Rightarrow f'(x_1) > f'(x_2) \Rightarrow f' \text{ γνησίως φθίνουσα}$$



κοίλη και γνησίως αύξουσα

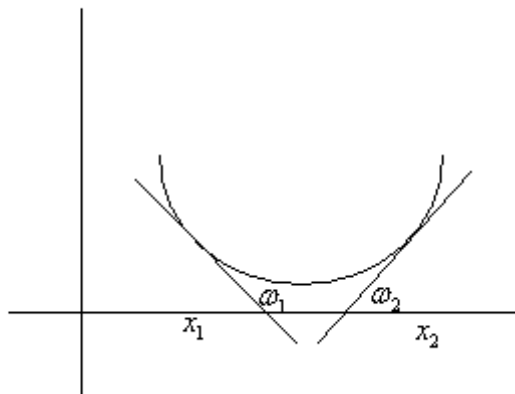


κοίλη και γνησίως φθίνουσα

- Αν μια συνάρτηση είναι κυρτή αλλά όχι γνησίως μονότονη τότε για τα σημεία που είναι εκατέρωθεν της θέσης ακροτάτου η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης σχηματίζει αντίστοιχα με τον $\chi\chi'$ γωνίες αμβλεία για τα σημεία αριστερά της θέσης ακροτάτου και οξεία για τα σημεία δεξιά, οπότε ο συντελεστής διεύθυνσης από αρνητικός γίνεται θετικός δηλαδή η παράγωγος στα σημεία επαφής πάλι μεγαλώνει (σχήμα 1)

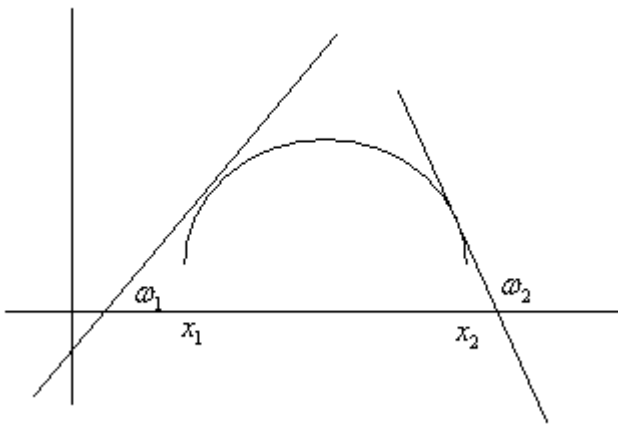
Για κάθε $x_1, x_2 \in D_f$ με $x_1 < x_0 < x_2$, όπου x_0 θέση ακροτάτου είναι

$$\varepsilon\phi\omega < 0 < \varepsilon\phi\omega_2 \Rightarrow f'(x_1) < f'(x_2) \Rightarrow f' \text{ γνησίως αύξουσα}$$



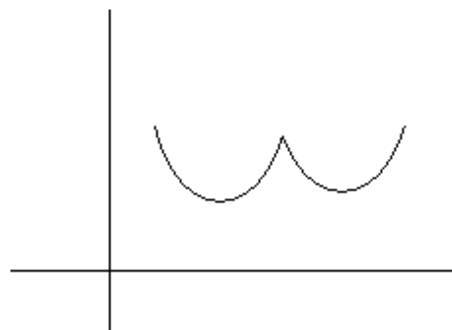
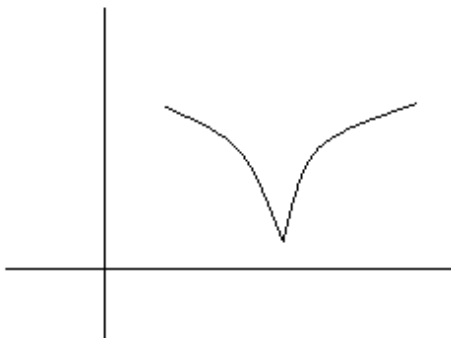
- Αν μια συνάρτηση είναι κοίλη αλλά όχι γνησίως μονότονη τότε για τα σημεία που είναι εκατέρωθεν της θέσης ακροτάτου η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης σχηματίζει αντίστοιχα με τον $\chi\chi'$ γωνίες οξεία για τα σημεία αριστερά της θέσης ακροτάτου και αμβλεία για τα σημεία δεξιά, οπότε ο συντελεστής διεύθυνσης από θετικός γίνεται αρνητικός δηλαδή η παράγωγος στα σημεία επαφής πάλι μεγαλώνει (σχήμα 2)

Για κάθε $x_1, x_2 \in D_f$ με $x_1 < x_0 < x_2$, όπου x_0 θέση ακροτάτου είναι $\varepsilon\phi\omega_1 > 0 > \varepsilon\phi\omega_2 \Rightarrow f'(x_1) > f'(x_2) \Rightarrow f'$ γνησίως φθίνουσα



Παρατηρήσεις

1. Ο ορισμός αναφέρεται σε συναρτήσεις ορισμένες σε διάστημα, το οποίο αν ακόμα είναι κλειστό δεν μας ενδιαφέρει αν είναι παραγωγίσιμη στα άκρα, παρά μόνο αν είναι συνεχής.
2. Για συναρτήσεις που δεν είναι παραγωγίσιμες στο εσωτερικού ενός διαστήματος Δ , δεν εξετάζουμε την κυρτότητα τους. Έτσι οι παρακάτω συναρτήσεις δεν χαρακτηρίζονται ούτε κυρτές ούτε κοίλες



3. Οι ευθείες $f(x) = \alpha x + \beta$ δεν είναι ούτε κυρτές ούτε κοίλες, αφού έχουν σταθερή παράγωγο $f'(x) = \alpha$.

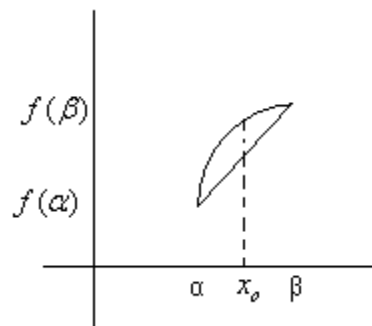
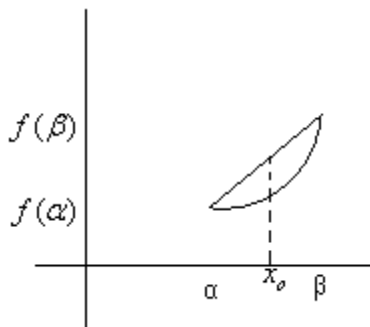
ΣΧΟΛΙΑ

1. Αποδεικνύεται ότι, αν μια συνάρτηση f είναι κυρτή (αντιστοίχως κοίλη) σ' ένα διάστημα Δ , τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται "κάτω" (αντιστοίχως "πάνω") από τη γραφική της παράσταση (Σχ. 39), με εξαίρεση το σημείο επαφής τους.

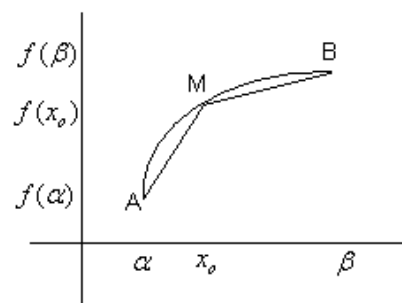
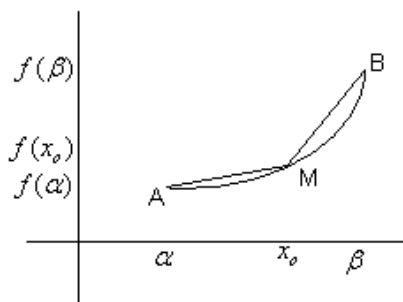
Αν f κυρτή τότε $f(x) \geq f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$, $\forall x \in D_f$ το '=' μόνο για $x = x_0$

Αν f κοίλη τότε $f(x) \leq f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$, $\forall x \in D_f$ το '=' μόνο για $x = x_0$

2. Αν η f είναι κυρτή στο $[\alpha, \beta]$ τότε κάθε σημείο της γραφικής παράστασης με τετμημένη x_0 στο (α, β) βρίσκεται χαμηλότερα από το αντίστοιχο σημείο της χορδής AB , όπου $A(\alpha, f(\alpha))$, $B(\beta, f(\beta))$. Αντιστοίχως βρίσκεται ψηλότερα αν η συνάρτηση είναι κοίλη.



3. Αν η f είναι κυρτή στο $[\alpha, \beta]$ τότε για κάθε σημείο $M(x_0, f(x_0))$ της γραφικής παράστασης με τετμημένη x_0 στο (α, β) είναι $\lambda_{AM} < \lambda_{MB}$ όπου $A(\alpha, f(\alpha))$, $B(\beta, f(\beta))$. Αντιστοίχως $\lambda_{AM} > \lambda_{MB}$ αν η συνάρτηση είναι κοίλη.



Δείτε την απόδειξη που αντιστοίχως εφαρμόζεται σε πολλές ασκήσεις με συνδυασμό κυρτότητας (και γενικά μονοτονίας της f') με Θ.Μ.Τ

- Αν f κυρτή (αντίστοιχη απόδειξη αν είναι κοίλη)

$$\lambda_{AM} = \frac{f(x_0) - f(\alpha)}{x_0 - \alpha} \stackrel{\Theta.M.T.}{=} f'(\xi_1) \text{ όπου } \xi_1 \in (\alpha, x_0) \text{ και}$$

$$\lambda_{MB} = \frac{f(\beta) - f(x_0)}{\beta - x_0} \stackrel{\Theta.M.T.}{=} f'(\xi_2) \text{ όπου } \xi_2 \in (x_0, \beta)$$

Όμως f κυρτή οπότε f' γνησίως αύξουσα και άρα αφού $\xi_1 < \xi_2$ είναι και $f'(\xi_1) < f'(\xi_2)$ δηλαδή $\lambda_{AM} < \lambda_{MB}$

- Η μελέτη μιας συνάρτησης ως προς τα κοίλα και κυρτά διευκολύνεται με τη βοήθεια του επόμενου θεωρήματος, που είναι άμεση συνέπεια του προηγούμενου ορισμού και του θεωρήματος μονοτονίας, αφού στις περιπτώσεις όπου μια συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη, η μονοτονία της f' δηλαδή τα κοίλα της f , προσδιορίζονται από το πρόσημο της f''

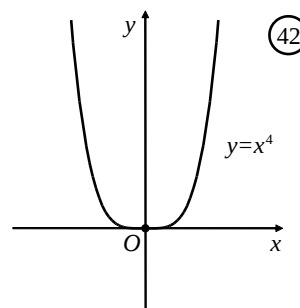
ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και δυο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ .

- Αν $f''(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι κυρτή στο Δ .
- Αν $f''(x) < 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι κοίλη στο Δ .

ΣΧΟΛΙΟ

Το αντίστροφο του θεωρήματος δεν ισχύει. Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση $f(x) = x^4$ (Σχ. 42). Επειδή η $f'(x) = 4x^3$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, η $f(x) = x^4$ είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$. Εντούτοις, η $f''(x)$ δεν είναι θετική στο $\mathbb{R}$, αφού $f''(0) = 0$.



Σημεία καμπής

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (a, b) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 . Αν

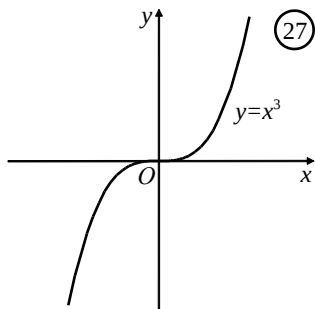
- η f είναι κυρτή στο (a, x_0) και κοίλη στο (x_0, b) , ή αντιστρόφως, και
- η C_f έχει εφαπτομένη στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$,

τότε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ ονομάζεται **σημείο καμπής** της γραφικής παράστασης της f .

Όταν το $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της C_f , τότε λέμε ότι η f παρουσιάζει στο x_0 **καμπή** και το x_0 λέγεται **θέση σημείου καμπής**.

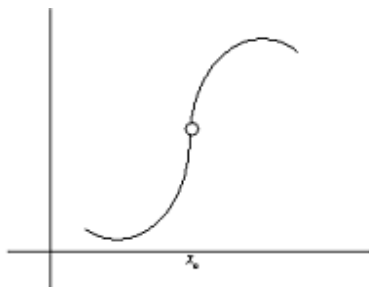
Παρατηρήσεις

1. Αφού απαιτούμε να υπάρχει εφαπτομένη στο x_0 εννοείται ότι η f είναι συνεχής στο x_0 . Παραγωγίσιμη όμως μπορεί να μην απαραίτητα και να δέχεται εφαπτομένη. Αυτό συμβαίνει όταν η εφαπτομένη είναι κατακόρυφη. Δεδομένου όμως ότι η κατακόρυφη εφαπτομένη είναι εκτός ύλης, ‘λογικά’ δεν θα μας τύχει συνάρτηση που να έχει καμπή στο x_0 και να μην είναι παραγωγίσιμη σε αυτό. Όχι όμως ότι δεν μπορεί και να υπάρχει.
2. Στα σημεία καμπής η εφαπτομένη της C_f “διαπερνά” την καμπύλη. Π.χ $f(x)=x^3$ η οποία παρουσιάζει καμπή στο 0 και η εφαπτομένης της στο σημείο αυτό, δηλαδή ο $χχ'$, της διαπερνά.

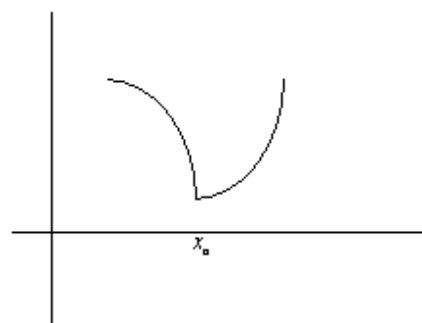


Φανταστείτε την εφαπτομένη σαν δύο αντικείμενες ημιευθείες, κάθε μία από τις οποίες εφάπτεται της γραφικής παράστασης εκατέρωθεν του σημείου καμπής.

3. Δε νοείται σημείο καμπής σε άκρο κλειστού διαστήματος ούτε φυσικά σε σημείο εκτός πεδίου ορισμού.
4. Η προϋπόθεση να δέχεται εφαπτομένη στο x_0 είναι απαραίτητη, άσχετα αν εκατέρωθεν του x_0 η συνάρτηση αλλάζει κοίλα



το x_0 δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού
οπότε δεν έχουμε καμπή σε αυτό



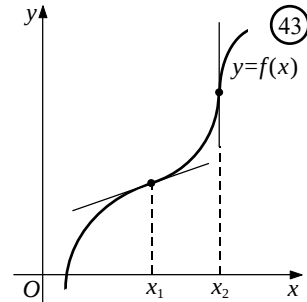
στο x_0 δεν δέχεται εφαπτομένη
οπότε δεν έχουμε καμπή σε αυτό

ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν το $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f και η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη, τότε $f''(x_0)=0$.

Παρατηρήσεις

1. Σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα, τα εσωτερικά σημεία ενός διαστήματος Δ στα οποία η f'' είναι διαφορετική από το μηδέν δεν είναι θέσεις σημείων καμπής.



2. Το αντίστροφο του θεωρήματος δεν ισχύει. Δηλαδή αν $f''(x_0)=0$ τότε δεν είναι σίγουρο ότι στο x_0 έχουμε καμπή. Πρέπει επιπλέον να αλλάζει πρόσημο η f'' εκατέρωθεν του x_0 .

π.χ. $f(x)=x^4$ (Σχ. 42). όπου $f'(x)=4x^3$ με $f''(0)=0$ αλλά δεν παρουσιάζει καμπή στο 0.

3. Μπορεί μία συνάρτηση να παρουσιάζει καμπή στο x_0 και να μην είναι απαραίτητα 2 φορές παραγωγίσιμη σε αυτό και άρα να μην ισχύει ότι $f''(x_0)=0$ αφού το $f''(x_0)$ δεν υπάρχει καν.

Πιθανές θέσεις σημείων καμπής

μιας συνάρτησης f σ' ένα διάστημα Δ είναι:

- i) τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f'' μηδενίζεται, και
- ii) τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία δεν υπάρχει η f'' (Σχ. 43).
(χωρίζονται σε αυτά που υπάρχει η f' και σε αυτά που δεν υπάρχει η f' αλλά δέχονται εφαπτομένη)

Γενικά

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα (α, β) και $x_0 \in (\alpha, \beta)$. Αν

- η f'' αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του x_0 και
 - ορίζεται εφαπτομένη της C_f στο $A(x_0, f(x_0))$,
- τότε το $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής.

Ασύμπτωτες

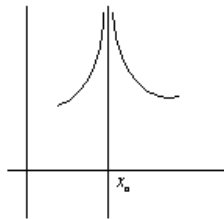
ΟΡΙΣΜΟΣ

Αν ένα τουλάχιστον από τα όρια $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ είναι $+\infty$ ή $-\infty$, τότε η ευθεία $x = x_0$ λέγεται **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f .

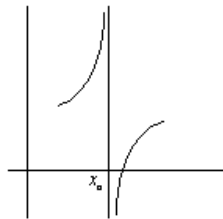
Έτσι και στα 4 παρακάτω σχήματα η ευθεία $x = x_0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη.



$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty$$

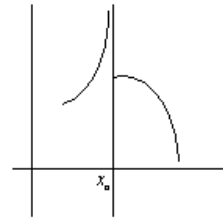


$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

Παρατηρήσεις

1. Τις κατακόρυφες ασύμπτωτες τις αναζητούμε σε άκρα διαστημάτων του πεδίου ορισμού στα οποία η συνάρτηση δεν ορίζεται ή σε σημεία ασυνέχειας
2. Μια συνάρτηση μπορεί να μην κατακόρυφη ασύμπτωτη, μπορεί όμως να έχει πολλές ακόμα και άπειρες (π.χ. εφχ, σφχ)
3. Μια συνάρτηση μπορεί να έχει κοινό σημείο με την κατακόρυφη ασύμπτωτη της όπως φαίνεται στο σχ.4 (φυσικά παραπάνω κοινά σημεία δεν μπορεί να έχει με κατακόρυφη ευθεία, αφού τότε δε θα ήταν συνάρτηση)

ΟΡΙΣΜΟΣ

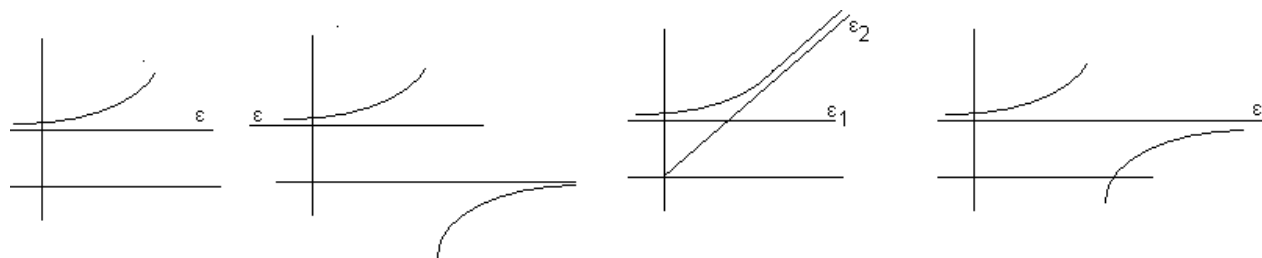
Αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ (αντιστοίχως $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$), τότε η ευθεία $y = \ell$ λέγεται **οριζόντια ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$ (αντιστοίχως στο $-\infty$).

ΟΡΙΣΜΟΣ

Η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται **ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, αντιστοίχως στο $-\infty$, αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (\lambda x + \beta)] = 0$,
Αντιστοίχως $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (\lambda x + \beta)] = 0$.

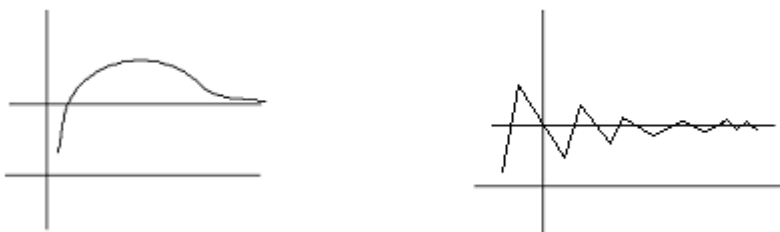
Η ασύμπτωτη $y = \lambda x + \beta$ είναι **οριζόντια** αν $\lambda = 0$, ενώ αν $\lambda \neq 0$ λέγεται **πλάγια** ασύμπτωτη.

Στο σχ. 1 έχουμε μια οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$, στο 2 μια οριζόντια στο $-\infty$ και μία στο $+\infty$, στο σχ. 3 μια οριζόντια στο $-\infty$ και μια πλάγια στο $+\infty$, ενώ στ σχ. 4 έχουμε την ίδια οριζόντια ασύμπτωτη και στο $+\infty$ και στο $-\infty$.



Παρατηρήσεις

1. Τις οριζόντιες και τις πλάγιες ασύμπτωτες τις αναζητούμε στο $-\infty$ και στο $+\infty$, με την προϋπόθεση βέβαια ότι η συνάρτηση ορίζεται σε διαστήματα της μορφής $(-\infty, \alpha)$ ή $(\beta, +\infty)$ ή $(-\infty, \alpha) \cup (\beta, +\infty)$.
2. Μία συνάρτηση μπορεί να έχει 2 το πολύ συνολικά οριζόντιες και πλάγιες ασύμπτωτες (μία το πολύ στο $+\infty$ και μία το πολύ στο $-\infty$). Μπορεί να είναι και οι δύο οριζόντιες, μπορεί και οι δύο πλάγιες ή μπορεί να είναι μία οριζόντια και μία πλάγια. Αν δηλαδή στο $-\infty$ έχει οριζόντια ασύμπτωτη, αποκλείεται να έχει και πλάγια εκεί και αντιστρόφως. Όμοια στο $+\infty$. Φυσικά μπορεί να μην έχει ούτε οριζόντια, ούτε πλάγια ασύμπτωτη ή να έχει μόνο στο $+\infty$ ή μόνο στο $-\infty$.
3. Μία συνάρτηση μπορεί να έχει με την οριζόντια ή πλάγια ασύμπτωτη της πολλά κοινά σημεία ακόμα και άπειρα. Η έννοια της ασύμπτωτης δεν είναι ότι δεν 'ακουμπάει' την γραφική παράσταση, αλλά ότι η γραφική παράσταση διαρκώς την πλησιάζει τείνοντας στο άπειρο η κατακόρυφη απόστασή τους να μηδενιστεί.



4. Μια ευθεία μπορεί να είναι ταυτόχρονα και εφαπτομένη και ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης

ΘΕΩΡΗΜΑ

Η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, αντιστοίχως στο $-\infty$,

αν και μόνο αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda \in \mathbb{R}$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \lambda x] = \beta \in \mathbb{R}$,

αντιστοίχως $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda \in \mathbb{R}$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - \lambda x] = \beta \in \mathbb{R}$.

ΣΧΟΛΙΑ

- Οι πολωνυμικές συναρτήσεις βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 2 δεν έχουν ασύμπτωτες.
- Οι πολωνυμικές συναρτήσεις πρώτου ή μηδενικού βαθμού δηλαδή οι ευθείες έχουν ασύμπτωτες τον εαυτό τους .
- Οι ρητές συναρτήσεις $\frac{P(x)}{Q(x)}$, με βαθμό του αριθμητή $P(x)$ μεγαλύτερο τουλάχιστον κατά δύο του βαθμού του παρονομαστή, δεν έχουν ούτε πλάγιες ούτε οριζόντιες ασύμπτωτες.
- Οι ρητές συναρτήσεις $\frac{P(x)}{Q(x)}$, με βαθμό του αριθμητή $P(x)$ μεγαλύτερο ακριβώς κατά ένα του βαθμού του παρονομαστή, τότε έχουν και στο $+\infty$ και στο $-\infty$ πλάγια ασύμπτωτη την ίδια ευθεία .
- Οι ρητές συναρτήσεις $\frac{P(x)}{Q(x)}$, με βαθμό του αριθμητή $P(x)$ ίσο με το βαθμό του παρονομαστή, τότε έχουν και στο $+\infty$ και στο $-\infty$ οριζόντια ασύμπτωτη την ίδια ευθεία που αποκλείεται να είναι ο $\chi\chi'$.
- Οι ρητές συναρτήσεις $\frac{P(x)}{Q(x)}$, με βαθμό του αριθμητή $P(x)$ μικρότερο του βαθμού του παρονομαστή, τότε έχουν και στο $+\infty$ και στο $-\infty$ οριζόντια ασύμπτωτη τον $\chi\chi'$.
- Δεν μπορεί μια ρητή συνάρτηση να έχει πλάγια και οριζόντια ασύμπτωτη
- Τις κατακόρυφες ασύμπτωτες της ρητής συνάρτησης τις αναζητώ στις ρίζες του παρονομαστή ου δεν είναι ταυτόχρονα και ρίζες του αριθμητή .
- Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις δεν έχουν ούτε οριζόντιες ούτε πλάγιες ασύμπτωτες.
- Μία συνάρτηση ορισμένη και συνεχής σε κλειστό διάστημα δεν έχει καθόλου ασύμπτωτες (ούτε κατακόρυφες ούτε οριζόντιες ούτε πλάγιες)
- Σύμφωνα με τους παραπάνω ορισμούς, ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f αναζητούμε:
 - Στα άκρα των διαστημάτων του πεδίου ορισμού της στα οποία η f δεν ορίζεται. (κατακόρυφες)
 - Στα σημεία του πεδίου ορισμού της, στα οποία η f δεν είναι συνεχής. (κατακόρυφες)
 - Στο $+\infty$, $-\infty$, εφόσον η συνάρτηση είναι ορισμένη σε διάστημα της μορφής $(a,+\infty)$, αντιστοίχως $(-\infty,a)$. (οριζόντιες ή πλάγιες)

Κανόνες de L' Hospital

Για τα όρια πηλίκου που οδηγούν σε απροσδιόριστες μορφές $\frac{0}{0}$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, ισχύουν τα επόμενα θεωρήματα (η απόδειξή τους παραλείπεται), που είναι γνωστά ως **κανόνες de l' Hospital**.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1ο (μορφή $\frac{0}{0}$)

Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ και υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (πεπερασμένο ή άπειρο), τότε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 2ο (μορφή $\frac{+\infty}{+\infty}$)

Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ και υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (πεπερασμένο ή άπειρο), τότε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

ΣΧΟΛΙΑ

1. Το θεώρημα 2 ισχύει και για τις μορφές $\frac{+\infty}{-\infty}$, $\frac{-\infty}{+\infty}$, $\frac{-\infty}{-\infty}$.
2. Τα παραπάνω θεωρήματα ισχύουν και για πλευρικά όρια και μπορούμε, αν χρειάζεται, να τα εφαρμόσουμε περισσότερες φορές, αρκεί να πληρούνται οι προϋποθέσεις τους.
3. Οι απροσδιόριστες μορφές $0 \cdot (\pm\infty)$, $(+\infty) - (+\infty)$, $(+\infty) + (-\infty)$, $(-\infty) - (-\infty)$ μπορούν να αναχθούν σε μία από τις παραπάνω μορφές $\frac{0}{0}$, $\frac{+\infty}{+\infty}$ (συνήθως με ανορθόξη παραγοντοποίηση) και μετά να υπολογιστούν με τους παραπάνω κανόνες.
4. Οι απροσδιόριστες μορφές 0^0 , $(+\infty)^0$, $1^{+\infty}$ μπορούν να αναχθούν σε μία από τις παραπάνω μορφές $\frac{0}{0}$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ (συνήθως με χρήση της ιδιότητας $a^x = e^{x \ln a}$) και μετά να υπολογιστούν με τους παραπάνω κανόνες.
5. Ο κανόνας δεν υπολογίζει όρια. Αναγάγει τον υπολογισμό ενός ορίου σε ένα άλλο όριο, οπότε έχει νόημα να εφαρμοστεί μόνο όταν το καινούργιο όριο είναι πιο εύκολο. (π.χ. σε όρια με ριζικά συνήθως δεν εφαρμόζουμε τον κανόνα)
6. Ο κανόνας μπορεί να εφαρμοστεί περισσότερες από μία φορές αν πληρούνται οι προϋποθέσεις $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \dots$
7. Για να εφαρμοστεί ο κανόνας πρέπει οι συναρτήσεις f, g να είναι παραγωγίσιμες κοντά στο x_0 (χωρίς να μας ενδιαφέρει αν είναι παραγωγίσιμες στο x_0) και πρέπει $g'(x) \neq 0$ για κάθε x κοντά στο x_0 .

8. Μπορεί να υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ και να μην υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ ή να υπάρχει και να μην ισούνται. Για αυτό είναι απαραίτητο να εξασφαλίζεται πρώτα ότι το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ είναι της μορφής $\frac{0}{0}$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$
9. Προσοχή!!! Για να μπορέσουμε να γράψουμε ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$ ή πρέπει να γνωρίζουμε ότι οι συναρτήσεις f', g' είναι συνεχείς στο x_0 . Όταν δεν δίνεται ότι είναι συνεχείς στο x_0 , θα πρέπει πρώτα να αποδεικνύουμε με τον ορισμό της παραγώγου ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = f'(x_0)$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g'(x) = g'(x_0)$

Μελέτη και χάραξη γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης

Η πορεία την οποία ακολουθούμε λέγεται **μελέτη της συνάρτησης** και περιλαμβάνει τα παρακάτω βήματα:

- 1ο** Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της f .
- 2ο** Εξετάζουμε τη συνέχεια της f στο πεδίο ορισμού της.
- 3ο** Βρίσκουμε τις παραγώγους f' και f'' και κατασκευάζουμε τους πίνακες των προσήμων τους. Με τη βοήθεια του προσήμου της f' προσδιορίζουμε τα διαστήματα μονοτονίας και τα τοπικά ακρότατα της f , ενώ με τη βοήθεια του προσήμου της f'' καθορίζουμε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή ή κοίλη και βρίσκουμε τα σημεία καμπής.
- 4ο** Μελετούμε τη “συμπεριφορά” της συνάρτησης στα άκρα των διαστημάτων του πεδίου ορισμού της (οριακές τιμές, ασύμπτωτες, κτλ.)
- 5ο** Συγκεντρώνουμε τα παραπάνω συμπεράσματα σ’ ένα συνοπτικό πίνακα που λέγεται και **πίνακας μεταβολών της f** και με τη βοήθειά του χαράσσουμε τη γραφική παράσταση της f . Για καλύτερη σχεδίαση της C_f κατασκευάζουμε έναν πίνακα τιμών της f .

ΣΧΟΛΙΟ

- 1)** Όπως είναι γνωστό, αν μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A είναι **ά ρ τ ι α**, τότε η C_f έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα $y'y$, ενώ αν είναι **π ε ρ ι τ ή**, η C_f έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων O . Επομένως, για τη μελέτη μιας τέτοιας συνάρτησης μπορούμε να περιοριστούμε στα $x \in A$, με $x \geq 0$.
- 2)** Αν μια συνάρτηση f είναι **π ε ρ ι ο δ ι κ ή** με περίοδο T , τότε περιορίζουμε τη μελέτη της C_f σ’ ένα διάστημα πλάτους T .