

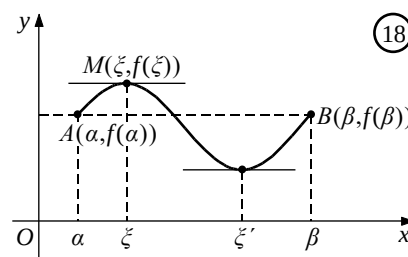
ΘΕΩΡΗΜΑ (Rolle)

Αν μια συνάρτηση f είναι:

- συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, \beta]$
- παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (a, β) και
- $f(a) = f(\beta)$

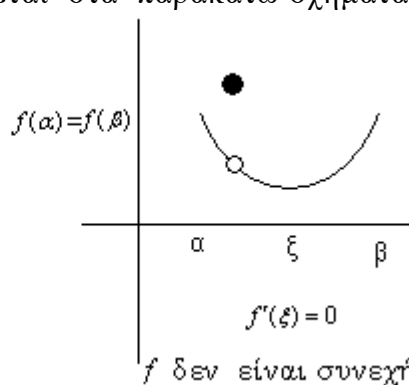
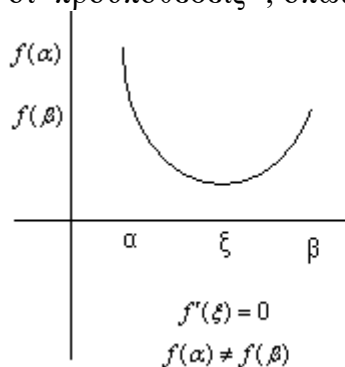
τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιο, ώστε: $f'(\xi) = 0$

Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη στον άξονα των x .

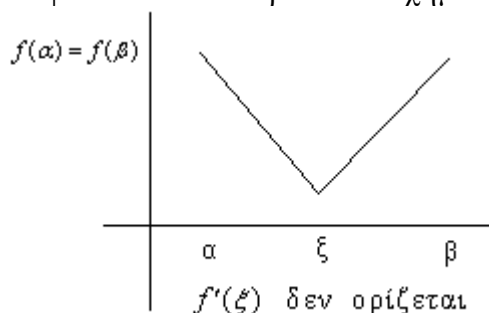


Παρατηρήσεις

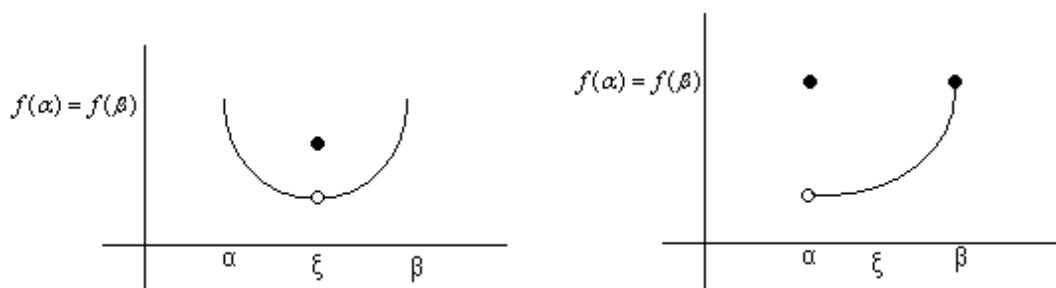
1. Το θεώρημα προφανώς ισχύει και για συναρτήσεις που είναι παραγωγίσιμες στο $[a, \beta]$. Αν όμως βάζαμε ως προϋπόθεση την παραγωγισιμότητα στο $[a, \beta]$, θα χάναμε κάποιες συναρτήσεις για τις οποίες ισχύει το θεώρημα και είναι παραγωγίσιμες μόνο στο (a, β) . Γενικά όταν διατυπώνουμε μια πρόταση, βάζουμε τις λιγότερες αναγκαίες προϋποθέσεις που απαιτούνται.
2. Το αντίστροφο του θεωρήματος δεν ισχύει. Μπορεί δηλαδή να υπάρχει $\xi \in (a, \beta)$ με $f'(\xi) = 0$, χωρίς απαραίτητα να πληρούνται όλες οι προϋποθέσεις, όπως φαίνεται στα παρακάτω σχήματα.



3. Το γιατί είναι απαραίτητη προϋπόθεση η παραγωγισιμότητα στο (a, β) φαίνεται στο παρακάτω σχήμα



4. Το γιατί είναι απαραίτητη προϋπόθεση η συνέχεια στο $[α,β]$ φαίνεται στα παρακάτω σχήματα



5. Το θεώρημα Rolle , μοιάζει με το θεώρημα Bolzano , ως προς το ότι και τα δύο εξασφαλίζουν μια τουλάχιστον ρίζα .Μόνο που το θ. Bolzano αναφέρεται σε ρίζες της f , ενώ το θ. Rolle σε ρίζες της f' .
6. Αν αναζητούμε ρίζες της f' μπορούμε να εφαρμόσουμε θ. Rolle στην f είτε θ. Bolzano στην f' .
Αν αναζητούμε ρίζες της f μπορούμε να εφαρμόσουμε θ. Bolzano στην f είτε θ. Rolle στην παράγουσα της f , δηλαδή σε μία συνάρτηση F όπου $F' = f$.

Βασικές εφαρμογές του θ. Rolle .

Αν f παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ ισχύουν :

1. μεταξύ δύο διαδοχικών ριζών της f υπάρχει τουλάχιστον μία ρίζα της f'
2. μεταξύ δύο διαδοχικών ριζών της f' , υπάρχει μία το πολύ της f
3. αν η f έχει n ρίζες , τότε η f' έχει τουλάχιστον $n-1$ ρίζες , η f'' έχει τουλάχιστον $n-2$ κλπ (με την προϋπόθεση ότι ορίζονται η f'' κλπ)

f	$\rho_1 \quad \rho_2 \quad \rho_3 \quad \rho_4$	$\rho_1 < \rho_2 < \rho_3 < \rho_4$ με $f(\rho_1) = f(\rho_2) = f(\rho_3) = f(\rho_4) = 0$
f'	$x_1 \quad x_2 \quad x_3$	$x_1 \in (\rho_1, \rho_2) \quad x_2 \in (\rho_2, \rho_3) \quad x_3 \in (\rho_3, \rho_4)$ με $f'(x_1) = f'(x_2) = f'(x_3) = 0$
f''	$\xi_1 \quad \xi_2$	$\xi_1 \in (x_1, x_2) \quad \xi_2 \in (x_2, x_3)$ με $f''(\xi_1) = f''(\xi_2) = 0$
f'''	γ	$\gamma \in (\xi_1, \xi_2)$ με $f'''(\gamma) = 0$

4. αν $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τότε η f έχει μία το πολύ ρίζα
5. αν $f''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τότε η f' έχει μία το πολύ ρίζα και η f δύο το πολύ ρίζες κλπ
6. ο συνδυασμός του θ. Bolzano και του θ. Rolle σε μία συνάρτηση f εξασφαλίζει την ύπαρξη μιας ακριβώς ρίζας της f . Συγκεκριμένα με το θ. Bolzano εξασφαλίζουμε την ύπαρξη μιας τουλάχιστον ρίζας και με το θ. Rolle αποκλείουμε να έχει παραπάνω από μία δείχνοντας ότι η f' δεν έχει ρίζες . Έτσι θ έχει αναγκαστικά μία ρίζα .

Γενικεύεται και για περισσότερες ρίζες . Δηλαδή :
τουλάχιστον k ρίζες + το πολύ k ρίζες = ακριβώς k ρίζες

ΘΕΩΡΗΜΑ (Μέσης Τιμής Διαφορικού Λογισμού Θ.Μ.Τ.)

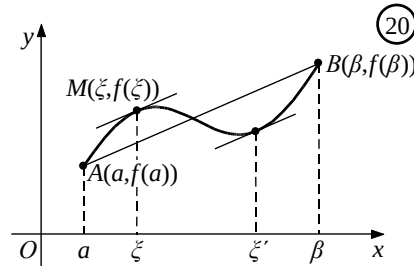
Αν μια συνάρτηση f είναι:

- συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, \beta]$ και
- παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (a, β)

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιο, ώστε:
$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(a)}{\beta - a}$$

Γραφική ερμηνεία

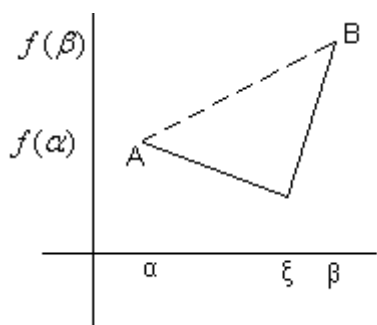
Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη της ευθείας AB .



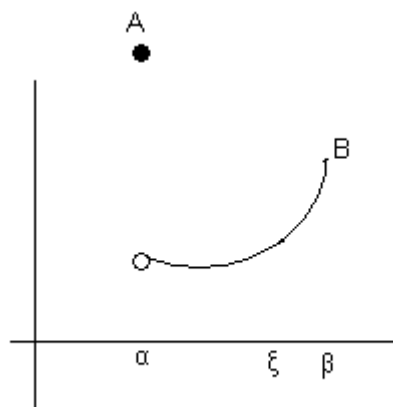
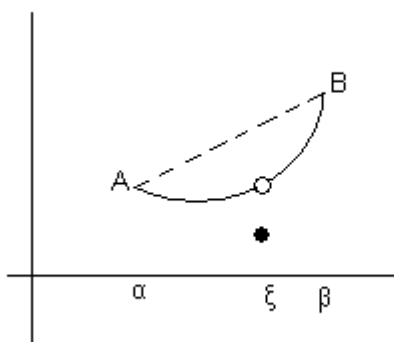
Παρατηρήσεις

1. Το θ . Rolle αποτελεί ειδική περίπτωση του Θ.Μ.Τ στην περίπτωση όπου $f(\beta) = f(a)$. Σε αντίθεση με το θ . Rolle που εξασφαλίζει ρίζα της $f'(x) = 0$, το Θ.Μ.Τ. εξασφαλίζει ρίζα της $f'(x) = \gamma \neq 0$, αρκεί να βρούμε κατάλληλο διάστημα $[a, \beta]$ τέτοιο ώστε $\gamma = \frac{f(\beta) - f(a)}{\beta - a}$ και να πληρούνται οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ.
2. Αν $f(\beta) < f(a)$ τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιο, ώστε:
$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(a)}{\beta - a} < 0$$
, ενώ $f(\beta) > f(a)$ τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιο, ώστε:
$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(a)}{\beta - a} > 0$$
. Το Θ.Μ.Τ. λοιπόν εξασφαλίζει την ύπαρξη μιας θετικής ή μιας αρνητικής τιμής της f' , δηλαδή γραφικά την ύπαρξη εφαπτομένης που σχηματίζει με τον xx' γωνία οξεία ή αμβλεία αντίστοιχα.
3. Τα παραπάνω συμπεράσματα μεταφέρονται και για την f'' με εφαρμογή του Θ.Μ.Τ. για την f' .
4. Το Θ.Μ.Τ. ισχύει και για συναρτήσεις που είναι παραγωγίσιμες στο $[a, \beta]$, ωστόσο η παραγωγισιμότητα στα άκρα δεν είναι απαραίτητη.
5. Το αντίστροφο του θεωρήματος δεν ισχύει. Δηλαδή μπορεί να υπάρχει $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιο, ώστε:
$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(a)}{\beta - a}$$
, χωρίς η f να είναι απαραίτητα συνεχής στο $[a, \beta]$ ή παραγωγίσιμη στο (a, β) .

6. Το γιατί η παραγωγισιμότητα είναι απαραίτητη φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, όπου δεν μπορούμε να βρούμε εφαπτομένη παράλληλη στην AB , διότι στο σημείο που θα τη θέλαμε η συνάρτηση δεν είναι παραγωγίσιμη και λόγω γωνιακού σημείου δεν ορίζεται εφαπτομένη.



7. Το γιατί η συνέχεια είναι απαραίτητη φαίνεται στα παρακάτω σχήματα



Συνέπειες του Θ.Μ.Τ

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν

- η f είναι συνεχής στο Δ και
- $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ ,

τότε η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ .

Γραφική ερμηνεία

Αφού $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , η γραφική παράσταση της f έχει σε κάθε σημείο της οριζόντια εφαπτομένη (εκτός ίσως από τα άκρα της). Την ιδιότητα αυτή την έχει μόνο η σταθερή συνάρτηση.

ΠΟΡΙΣΜΑ

Έστω δυο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ . Αν

- οι f, g είναι συνεχείς στο Δ και
- $f'(x) = g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ ,

τότε υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει: $f(x) = g(x) + c$

Γραφική ερμηνεία

Αφού $f'(x) = g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , οι γραφικές παραστάσεις των f, g έχουν σε κάθε σημείο τους με την ίδια τετμημένη παράλληλες εφαπτομένες. Αυτό συμβαίνει μόνο όταν η μία κατακόρυφη μετατόπιση της άλλης.

Παρατηρήσεις

1. Το παραπάνω θεώρημα καθώς και το πόρισμά του και η εφαρμογή ισχύουν σε διάστημα και όχι σε ένωση διαστημάτων.

Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} -1 & , x < 0 \\ 1 & , x > 0 \end{cases}$.

Παρατηρούμε ότι, αν και $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, εντούτοις η f δεν είναι σταθερή στο $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

2. Αν $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in \Delta_1 \cup \Delta_2$ τότε $f(x) = \begin{cases} c_1 & , x \in \Delta_1 \\ c_2 & , x \in \Delta_2 \end{cases}$ Αντίστοιχα για $\Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \Delta_3 \cup \dots$

3. Αν $f'(x) = g'(x)$ για κάθε $x \in \Delta_1 \cup \Delta_2$ τότε $f(x) = \begin{cases} g(x) + c_1 & , x \in \Delta_1 \\ g(x) + c_2 & , x \in \Delta_2 \end{cases}$

Αντίστοιχα για $\Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \Delta_3 \cup \dots$

4. Τις προϋποθέσεις που αναφέρονται στην παράγωγο τις εξασφαλίζουμε στα εσωτερικά σημεία του Δ , που σημαίνει ότι ακόμα και αν το Δ είναι κλειστό δεν μας ενδιαφέρει η συμπεριφορά της παραγώγου στα άκρα του. Η συνέχεια όμως αναφέρεται σε όλο το Δ άρα και στα άκρα αν αυτό είναι κλειστό.
5. Αν δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις είναι ίσες τότε και οι παράγωγοί τους θα είναι ίσες. Το αντίστροφο δεν ισχύει, αφού όπως είδαμε μπορεί να είναι δύο οποιεσδήποτε συναρτήσεις που διαφέρουν κατά μία σταθερά.
6. Το θεώρημα όπως και το πόρισμα ισχύουν και αντίστροφα.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Αν για μία συνάρτηση f ισχύει $f'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε
 $f(x) = ce^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Απόδειξη

$$f'(x) = f(x) \Rightarrow f'(x) - f(x) = 0 \Rightarrow e^x f'(x) - e^x f(x) = 0 \Rightarrow \frac{e^x f'(x) - e^x f(x)}{e^{2x}} = 0 \Rightarrow$$

$$\left(\frac{f(x)}{e^x} \right)' = 0 \Rightarrow \frac{f(x)}{e^x} = c \Rightarrow f(x) = c \cdot e^x, c \in \mathbb{R}$$

Γενίκευση εφαρμογής

Αν για μία συνάρτηση f ισχύει $f'(x) = g'(x) \cdot f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε
 $f(x) = ce^{g(x)}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Απόδειξη

$$f'(x) = g'(x) f(x) \Rightarrow f'(x) - g'(x) f(x) = 0 \Rightarrow e^{g(x)} f'(x) - e^{g(x)} f(x) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{e^{g(x)} f'(x) - e^{g(x)} f(x)}{e^{2g(x)}} = 0 \Rightarrow \left(\frac{f(x)}{e^{g(x)}} \right)' = 0 \Rightarrow \frac{f(x)}{e^{g(x)}} = c \Rightarrow f(x) = c \cdot e^{g(x)}, c \in \mathbb{R}$$

Αντιπαραγωγή

g'	g	g'	g
$x^v, v \neq -1$	$\frac{x^{v+1}}{v+1} + c$	$f^v(x) \cdot f'(x), v \neq -1$	$\frac{f^{v+1}(x)}{v+1} + c$
$\frac{1}{x}, x \neq 0$	$\ln x + c$	$\frac{f'(x)}{f(x)}, f(x) \neq 0 \quad \forall x \in D_f$	$\ln f(x) + c$
$e^{ax}, a \in \mathbb{R}^*$	$\frac{e^{ax}}{a} + c$	$e^{f(x)} \cdot f'(x)$	$e^{f(x)} + c$
$\eta \mu \alpha \chi$	$-\frac{\sigma \upsilon \nu \alpha \chi}{a} + c$	$\frac{f'(x)}{f^2(x)}, f(x) \neq 0 \quad \forall x \in D_f$	$-\frac{1}{f(x)} + c$
$\sigma \upsilon \nu \alpha \chi$	$\frac{\eta \mu \alpha \chi}{\alpha} + c$	$xf'(x) + f(x)$	$xf(x) + c$
$\frac{1}{\sigma \upsilon \nu^2 x} = 1 + \varepsilon \phi^2 x$	$\varepsilon \phi \chi + c$	$f'(x)h(x) + f(x)h'(x)$	$f(x)h(x) + c$
$\frac{1}{\eta \mu^2 x} = 1 + \sigma \phi^2 x$	$-\sigma \phi \chi + c$	$\frac{f'(x)h(x) - f(x)h'(x)}{h^2(x)}, h(x) \neq 0 \quad \forall x \in D_h$	$\frac{f(x)}{h(x)} + c$
$\frac{1}{2\sqrt{x}}, x > 0$	$\sqrt{x} + c$	$\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}, f(x) > 0 \quad \forall x \in D_f$	$\sqrt{f(x)} + c$

