

## ΤΟ ΛΕΞΙΛΟΓΙΟ ΤΗΣ ΛΟΓΙΚΗΣ

- **Η συνεπαγωγή  $\Rightarrow$**

Αν  $P$  και  $Q$  είναι δύο ισχυρισμοί, τέτοιοι ώστε, όταν αληθεύει ο  $P$  να αληθεύει και ο  $Q$ , τότε λέμε ότι ο  $P$  **συνεπάγεται τον  $Q$**  και γράφουμε  $P \Rightarrow Q$

Ο ισχυρισμός «  $P \Rightarrow Q$  » λέγεται **συνεπαγωγή** και πολλές φορές διαβάζεται «**αν  $P$ , τότε  $Q$** ». Ο  $P$  λέγεται **υπόθεση** της συνεπαγωγής, ενώ ο  $Q$  λέγεται **συμπέρασμα** αυτής

Π.Χ. Αν ο ισχυρισμός «  $\alpha = \beta$  » είναι αληθής, τότε και ο ισχυρισμός  $\alpha^2 = \beta^2$  θα είναι αληθής οπότε  $\alpha = \beta \Rightarrow \alpha^2 = \beta^2$

**Τη συνεπαγωγή τη χρησιμοποιούμε όταν θέλουμε από μία δοσμένη σχέση να φτάσουμε στη ζητούμενη**

- **Η ισοδυναμία  $\Leftrightarrow$**

Αν  $P$  και  $Q$  είναι δύο ισχυρισμοί, τέτοιοι ώστε, όταν αληθεύει ο  $P$ , να αληθεύει και ο  $Q$  και όταν αληθεύει ο  $Q$ , να αληθεύει και ο  $P$ , τότε λέμε ότι ο  $P$  **συνεπάγεται τον  $Q$  και αντιστρόφως** ή, αλλιώς, ότι ο  $P$  είναι **ισοδύναμος με τον  $Q$**  και γράφουμε  $P \Leftrightarrow Q$ .

Ο ισχυρισμός «  $P \Leftrightarrow Q$  » λέγεται **ισοδυναμία** και αρκετές φορές διαβάζεται « **$P$  αν και μόνο αν  $Q$** ». ( ή τότε και μόνο τότε)

Π.χ.  $\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma = \beta + \gamma$

**Την ισοδυναμία τη χρησιμοποιούμε όταν λύνουμε εξισώσεις, ανισώσεις, συστήματα ή όταν ξεκινάμε από τη σχέση που θέλουμε να αποδείξουμε με σκοπό να φτάσουμε σε κάτι που ισχύει (δηλαδή στη δοσμένη σχέση ή σε κάτι προφανές π.χ.  $0=0$ ) και σε κάθε περίπτωση πρέπει να ελέγχουμε και την αντίστροφη πορεία.**

- **Ο σύνδεσμος «ή»**

Αν  $P$  και  $Q$  είναι δύο ισχυρισμοί, τότε ο ισχυρισμός  $P$  ή  $Q$  αληθεύει μόνο στην περίπτωση που ένας τουλάχιστον από τους δύο ισχυρισμούς αληθεύει.

Ο ισχυρισμός « $P$  ή  $Q$ » λέγεται **διάζευξη** των  $P$  και  $Q$ .

Π.χ.  $\alpha \cdot \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \vee \beta = 0$

- **Ο σύνδεσμος «και»**

Αν  $P$  και  $Q$  είναι δύο ισχυρισμοί, τότε ο ισχυρισμός  **$P$  και  $Q$**  αληθεύει μόνο στην περίπτωση που και οι δύο ισχυρισμοί αληθεύουν.

Ο ισχυρισμός « **$P$  και  $Q$** » λέγεται **σύζευξη** των  $P$  και  $Q$ .

Π.χ.  $\alpha^2 + \beta^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$  και  $\beta = 0$

- **Αντιθετοαναστροφή**

Όταν διατυπώνουμε μια πρόταση υπάρχει μια υπόθεση και ένα συμπέρασμα . Το αντίστροφο της πρότασης δεν ισχύει απαραίτητα . Δηλαδή αν ισχύει το συμπέρασμα , δεν είναι απαραίτητο να ισχύει και η υπόθεση . Αν όμως δεν ισχύει το συμπέρασμα , τότε αποκλείεται να ισχύει και η υπόθεση .

Συμβολικά αν  $P \Rightarrow Q$  τότε  $\text{όχι}Q \Rightarrow \text{όχι}P$

π.χ. Κάθε τετράπλευρο που είναι ρόμβος είναι και παραλληλόγραμμο .

Κάθε τετράπλευρο όμως που είναι παραλληλόγραμμο δεν είναι απαραίτητα και ρόμβος .

Αν όμως ένα τετράπλευρο δεν είναι παραλληλόγραμμο , τότε αποκλείεται να είναι και ρόμβος

- **Διατύπωση αντίθετης πρότασης**

Πολλές φορές είναι αναγκαίο να μπορούμε να διατυπώνουμε με μαθηματικό τρόπο την άρνηση μιας πρότασης ( π.χ. για να εφαρμόσουμε την απαγωγή σε άτοπο) . Στον παρακάτω πίνακα φαίνεται πως μετατρέπεται μια λέξη , προκειμένου να διατυπώσουμε την άρνηση μιας πρότασης

| Πρόταση     | Αντίθετη πρόταση |
|-------------|------------------|
| ή           | και              |
| και         | ή                |
| για κάθε    | υπάρχει          |
| υπάρχει     | για κάθε         |
| τουλάχιστον | το πολύ          |
| το πολύ     | τουλάχιστον      |
| $=$         | $\neq$           |
| $<$         | $\geq$           |
| $>$         | $\leq$           |
| $\geq$      | $<$              |
| $\leq$      | $>$              |

## Παραγοντοποίηση τριωνύμου

Έστω  $f(x) = ax^2 + bx + c$ ,  $a \neq 0$ . Υπολογίζουμε τη  $\Delta = b^2 - 4ac$ .

- Αν  $\Delta > 0$  τότε το τριώνυμο έχει δύο ρίζες, τις

$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ ,  $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$  και το τριώνυμο παραγοντοποιείται σύμφωνα με τον τύπο  $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

- Αν  $\Delta = 0$  τότε το τριώνυμο έχει μία ρίζα, τη  $x_1 = -\frac{b}{2a}$  και το τριώνυμο

παραγοντοποιείται σύμφωνα με τον τύπο  $f(x) = a(x - x_1)^2$

- Αν  $\Delta < 0$  τότε το τριώνυμο δεν έχει ρίζες στο  $\mathbb{R}$  και δεν παραγοντοποιείται.

## Παραγοντοποίηση πολυωνύμου

**1<sup>ο</sup> βήμα** : Εξαγωγή κοινού παράγοντα από όλους τους όρους (αν είναι εφικτό) σύμφωνα με την επιμεριστική ιδιότητα :

$$ax + ay = a(b + c), \quad ax + ay + az = a(b + c + d)$$

**2<sup>ο</sup> βήμα** : Κοιτάμε πόσους όρους έχουμε μέσα στην παρένθεση μετά την εξαγωγή του κοινού παράγοντα (αν δεν έχει βγει κοινός παράγοντας πόσους έχουμε εξ αρχής)

και ανάλογα με το πλήθος τους έχουμε :

### • 2 όροι

α) Διαφορά τετραγώνων :  $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

β) Διαφορά κύβων :  $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

γ) Άθροισμα κύβων :  $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

### • 3 όροι

α) Ανάπτυγμα τετραγώνου :  $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$

β) Τριώνυμο :  $ax^2 + bx + c = \begin{cases} a(x - x_1)(x - x_2) & , \text{ αν } \Delta > 0 \\ a(x - x_1)^2 & , \text{ αν } \Delta = 0 \end{cases}$

γ) Μέθοδος συμπλήρωσης τετραγώνου

δ) Σπάμε έναν όρο σε δύο και κάνουμε ομαδοποίηση

### • 4 όροι

α) Ομαδοποίηση :  $ax + ay + bz + cz = a(x + y) + b(z + c) = (x + y)(a + b)$

β) Συνδυασμός αναπτύγματος και διαφοράς τετραγώνων :

$$a^2 + 2ab + b^2 - c^2 = (a + b)^2 - c^2 = (a + b - c)(a + b + c)$$

## Παρατήρηση

Η παραγοντοποίηση ενός πολυωνύμου είναι εφικτή και με τη χρήση του σχήματος Horner εφόσον βέβαια πρώτα έχουμε εντοπίσει μια ρίζα του.

## Πρόσημο της παράστασης $\alpha\chi+\beta$

Έστω  $f(\chi)=\alpha\chi+\beta$  ,  $\alpha\neq 0$  . Η παράσταση αυτή έχει πάντα μία ρίζα τη

$$\chi_1=-\frac{\beta}{\alpha}$$

και το πρόσημό της φαίνεται στον παρακάτω πίνακα

| $\chi$    | $-\infty$              | $\chi_1$ | $+\infty$            |
|-----------|------------------------|----------|----------------------|
| $f(\chi)$ | ετερόσημο του $\alpha$ |          | ομόσημο του $\alpha$ |

## Πρόσημο τριωνύμου

Έστω  $f(\chi)=\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma$  ,  $\alpha\neq 0$  . Υπολογίζουμε τη  $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$  .

- Αν  $\Delta>0$  τότε το τριώνυμο έχει δύο ρίζες , τις

$$\chi_1=\frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha} \quad , \quad \chi_2=\frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$$

και το πρόσημο του τριωνύμου για τις διάφορες τιμές του  $\chi$  φαίνεται στον παρακάτω πίνακα

| $\chi$    | $-\infty$            | $\chi_1$               | $\chi_2$             | $+\infty$            |
|-----------|----------------------|------------------------|----------------------|----------------------|
| $f(\chi)$ | ομόσημο του $\alpha$ | ετερόσημο του $\alpha$ | ομόσημο του $\alpha$ | ομόσημο του $\alpha$ |

- Αν  $\Delta=0$  τότε το τριώνυμο έχει μία ρίζα , τη  $\chi_1=-\frac{\beta}{2\alpha}$  και το πρόσημο του τριωνύμου για τις διάφορες τιμές του  $\chi$  φαίνεται στον παρακάτω πίνακα

| $\chi$    | $-\infty$            | $\chi_1$             | $+\infty$            |
|-----------|----------------------|----------------------|----------------------|
| $f(\chi)$ | ομόσημο του $\alpha$ | ομόσημο του $\alpha$ | ομόσημο του $\alpha$ |

- Αν  $\Delta<0$  τότε το τριώνυμο δεν έχει ρίζες στο  $\mathbb{R}$  και το πρόσημο του τριωνύμου για τις διάφορες τιμές του  $\chi$  φαίνεται στον παρακάτω πίνακα

| $\chi$    | $-\infty$            | $+\infty$ |
|-----------|----------------------|-----------|
| $f(\chi)$ | ομόσημο του $\alpha$ |           |

## Τριώνυμο

Είναι κάθε παράσταση της μορφής  $f(x) = ax^2 + bx + c$  με  $a \neq 0$ .

- Το πλήθος των ριζών του καθορίζεται από το πλήθος της διακρίνουσας  $\Delta = b^2 - 4ac$

- Αν  $\Delta > 0$  τότε το τριώνυμο έχει δύο ρίζες άνισες, τις

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Αν  $\Delta = 0$  τότε το τριώνυμο έχει μία διπλή ρίζα, τη  $x_1 = -\frac{b}{2a}$

- Αν  $\Delta < 0$  τότε το τριώνυμο δεν έχει ρίζες στο  $\mathbb{R}$ .

- Άθροισμα ριζών  $S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$

- Γινόμενο ριζών  $P = x_1 x_2 = \frac{c}{a}$

Τονίζουμε ότι αν  $P < 0 \Leftrightarrow \frac{c}{a} < 0 \Rightarrow ac < 0 \Rightarrow -4ac > 0 \Rightarrow b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow \Delta > 0$

- Το είδος των ριζών φαίνεται παρακάτω

| Απαίτηση          | Συνθήκη                                   |
|-------------------|-------------------------------------------|
| Ρίζες ετερόσημες  | $P < 0$                                   |
| Ρίζες ομόσημες    | $\Delta \geq 0, \quad P > 0$              |
| Ρίζες θετικές     | $\Delta \geq 0, \quad P > 0, \quad S > 0$ |
| Ρίζες αρνητικές   | $\Delta \geq 0, \quad P > 0, \quad S < 0$ |
| Ρίζες αντίθετες   | $\Delta \geq 0, \quad S = 0$              |
| Ρίζες αντίστροφες | $\Delta \geq 0, \quad P = 1$              |

Έστω  $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$  με  $\alpha \neq 0$ .

| Απαίτηση                               | Συνθήκη                       |
|----------------------------------------|-------------------------------|
| Το $f(x)$ έχει πραγματικές ρίζες       | $\Delta \geq 0$               |
| Το $f(x)$ έχει 2 ρίζες άνισες          | $\Delta > 0$                  |
| Το $f(x)$ έχει 1 διπλή ρίζα            | $\Delta = 0$                  |
| Το $f(x)$ δεν έχει πραγματικές ρίζες   | $\Delta < 0$                  |
| Το $f(x)$ διατηρεί πρόσημο             | $\Delta < 0$                  |
| $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ | $\Delta < 0$ και $\alpha > 0$ |
| $f(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ | $\Delta < 0$ και $\alpha < 0$ |

### Διαίρεση πολυωνύμων

Αν  $\Delta(x)$ ,  $\delta(x)$  δύο πολυώνυμα με  $\delta(x) \neq 0$  τότε υπάρχουν μοναδικά πολυώνυμα  $\pi(x)$  και  $\upsilon(x)$  τέτοια ώστε  $\Delta(x) = \delta(x)\pi(x) + \upsilon(x)$  όπου  $\upsilon(x)$  ή το μηδενικό πολυώνυμο ή πολυώνυμο με βαθμό μικρότερο του  $\delta(x)$ .

Το  $\Delta(x)$  λέγεται διαιρέτος, το  $\delta(x)$  διαιρέτης, το  $\pi(x)$  πηλίκο και το  $\upsilon(x)$  υπόλοιπο.

Αν  $\upsilon(x) = 0$  τότε η διαίρεση λέγεται τέλεια και λέμε ότι το  $\delta(x)$  διαιρεί το  $\Delta(x)$  ή ότι το  $\delta(x)$  είναι διαιρέτης του  $\Delta(x)$  ή ότι  $\Delta(x)$  διαιρείται με το  $\delta(x)$  ή ότι το  $\Delta(x)$  έχει παράγοντα το  $\delta(x)$ .

Το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου  $P(x)$  με το  $x - \rho$  είναι ο αριθμός  $P(\rho)$ .

Το πολυώνυμο  $P(x)$  έχει παράγοντα το  $x - \rho$  αν και μόνο αν  $P(\rho) = 0$

Το πολυώνυμο  $P(x)$  έχει παράγοντα το  $(x - \rho)^2$  αν και μόνο αν το  $x - \rho$  είναι παράγοντας του  $P(x)$  και του  $\Pi(x)$  (δηλαδή αν και μόνο αν  $P(\rho) = 0$  και  $\Pi(\rho) = 0$ ) όπου  $\Pi(x)$  το πηλίκο της διαίρεσης  $P(x) : (x - \rho)$ .

Μια ρίζα  $\rho$  του  $P(x)$  (ή της  $P(x) = 0$ ) λέγεται **απλή ρίζα του  $P(x)$**  όταν ισχύει

$$P(x) = (x - \rho)\Pi(x) \quad \text{και} \quad \Pi(\rho) \neq 0.$$

Μια ρίζα  $\rho$  του  $P(x)$  (ή της  $P(x) = 0$ ) λέγεται **ρίζα πολλαπλότητας  $\kappa$  του  $P(x)$**  όταν ισχύει  $P(x) = (x - \rho)^\kappa \Pi(x)$  και  $\Pi(\rho) \neq 0$ .

## Πολυωνυμικές εξισώσεις

Λύνονται ανάλογα με το βαθμό τους. Κάθε τέτοια εξίσωση έχει τόσες το πολύ ρίζες όσες είναι ο βαθμός της.

### 1<sup>ο</sup> βαθμού

Αφού κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών, απαλοιφή παρενθέσεων, χωρίσουμε γνωστούς από αγνώστους και κάνουμε πράξεις, έχουμε καταλήξει σε μια εξίσωση της μορφής

$\alpha x = \beta$ . Διακρίνουμε περιπτώσεις

- Αν  $\alpha \neq 0$  τότε έχει μοναδική λύση τη  $x = \frac{\beta}{\alpha}$
- Αν  $\alpha = 0$  και  $\beta \neq 0$  είναι αδύνατη
- Αν  $\alpha = 0$  και  $\beta = 0$  είναι αόριστη (αληθεύει για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ )

### 2<sup>ο</sup> βαθμού

Αφού κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών, απαλοιφή παρενθέσεων, μαζέψουμε όλους τους όρους στο 1<sup>ο</sup> μέλος και κάνουμε πράξεις, έχουμε καταλήξει σε μια εξίσωση της μορφής  $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$  με  $\alpha \neq 0$ . Υπολογίζουμε τη  $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$ .

- Αν  $\Delta > 0$  τότε έχει δύο ρίζες άνισες, τις  $x_1 = \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$ ,  $x_2 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$
- Αν  $\Delta = 0$  τότε έχει μία διπλή ρίζα, τη  $x_1 = -\frac{\beta}{2\alpha}$
- Αν  $\Delta < 0$  τότε δεν έχει ρίζες στο  $\mathbb{R}$ .

### Ανωτέρου του 2<sup>ο</sup> βαθμού

Αφού κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών, απαλοιφή παρενθέσεων, μαζέψουμε όλους τους όρους στο 1<sup>ο</sup> μέλος και κάνουμε πράξεις, προσπαθούμε να παραγοντοποιήσουμε το 1<sup>ο</sup> μέλος σε γινόμενο πρωτοβαθμίων και δευτεροβαθμίων παραγόντων. Έτσι θα έχουμε ένα γινόμενο ίσο με το 0, όπου θα πρέπει κάποιος από τους παράγοντες να είναι 0 και λύνουμε τις εξισώσεις 1<sup>ο</sup> ή 2<sup>ο</sup> βαθμού που προκύπτουν.

### Διώνυμη εξίσωση

Είναι κάθε εξίσωση της μορφής  $x^n = a$   $n \in \mathbb{N}$   $n > 1$ . Διακρίνουμε περιπτώσεις

- Αν  $n$  άρτιος και  $a > 0$  τότε  $x = \pm \sqrt[n]{a}$
- Αν  $n$  άρτιος και  $a < 0$  τότε είναι αδύνατη στο  $\mathbb{R}$
- Αν  $n$  περιττός και  $a > 0$  τότε  $x = \sqrt[n]{a}$
- Αν  $n$  περιττός και  $a < 0$  τότε  $x = -\sqrt[n]{-a}$

## Πολυωνυμικές ανισώσεις

### 1<sup>ο</sup> βαθμού

Αφού κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών, απαλοιφή παρενθέσεων, χωρίσουμε γνωστούς από αγνώστους και κάνουμε πράξεις, έχουμε καταλήξει σε μια ανίσωση της μορφής

$\alpha\chi > \beta$  ή  $\alpha\chi \geq \beta$  ή  $\alpha\chi < \beta$  ή  $\alpha\chi \leq \beta$ . Διακρίνουμε περιπτώσεις

|              | Πίνακας λύσεων της $\alpha\chi + \beta > 0$              | Πίνακας λύσεων της $\alpha\chi + \beta \geq 0$              |
|--------------|----------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------|
| $\alpha > 0$ | Η ανίσωση έχει τις λύσεις $\chi > -\frac{\beta}{\alpha}$ | Η ανίσωση έχει τις λύσεις $\chi \geq -\frac{\beta}{\alpha}$ |
| $\alpha < 0$ | Η ανίσωση έχει τις λύσεις $\chi < -\frac{\beta}{\alpha}$ | Η ανίσωση έχει τις λύσεις $\chi \leq -\frac{\beta}{\alpha}$ |
| $\alpha = 0$ | $\beta > 0$ η ανίσωση αληθεύει για κάθε τιμή του $\chi$  | $\beta \geq 0$ η ανίσωση αληθεύει για κάθε τιμή του $\chi$  |
|              | $\beta \leq 0$ η ανίσωση είναι αδύνατη                   | $\beta < 0$ η ανίσωση είναι αδύνατη                         |

|              | Πίνακας λύσεων της $\alpha\chi + \beta < 0$              | Πίνακας λύσεων της $\alpha\chi + \beta \leq 0$              |
|--------------|----------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------|
| $\alpha > 0$ | Η ανίσωση έχει τις λύσεις $\chi < -\frac{\beta}{\alpha}$ | Η ανίσωση έχει τις λύσεις $\chi \leq -\frac{\beta}{\alpha}$ |
| $\alpha < 0$ | Η ανίσωση έχει τις λύσεις $\chi > -\frac{\beta}{\alpha}$ | Η ανίσωση έχει τις λύσεις $\chi \geq -\frac{\beta}{\alpha}$ |
| $\alpha = 0$ | $\beta < 0$ η ανίσωση αληθεύει για κάθε τιμή του $\chi$  | $\beta \leq 0$ η ανίσωση αληθεύει για κάθε τιμή του $\chi$  |
|              | $\beta \geq 0$ η ανίσωση είναι αδύνατη                   | $\beta > 0$ η ανίσωση είναι αδύνατη                         |

## 2<sup>ο</sup> βαθμού

Αφού κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών, απαλοιφή παρενθέσεων, μαζεύουμε όλους τους όρους στο 1<sup>ο</sup> μέλος και κάνουμε πράξεις, έχουμε καταλήξει σε μια ανίσωση της μορφής  $\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma \leq 0$  με  $\alpha \neq 0$  (αντίστοιχα  $>0, <0, \geq 0$ ). Βρίσκουμε το πρόσημο του τριώνυμου στο 1<sup>ο</sup> μέλος και ανάλογα με τη μορφή της ανίσωσης επιλέγουμε το αντίστοιχο διάστημα τιμών για το  $\chi$ .

## Ανωτέρου του 2<sup>ο</sup> βαθμού

Αφού κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών, απαλοιφή παρενθέσεων, μαζεύουμε όλους τους όρους στο 1<sup>ο</sup> μέλος και κάνουμε πράξεις, προσπαθούμε να παραγοντοποιήσουμε το 1<sup>ο</sup> μέλος σε γινόμενο πρωτοβαθμίων και δευτεροβαθμίων παραγόντων.

Έχουμε έτσι καταλήξει σε μια ανίσωση της μορφής  $A(\chi)B(\chi)\Gamma(\chi)\dots\Phi(\chi) > 0 (<0, \leq 0, \geq 0)$

Κατασκευάζουμε έναν πίνακα με 2 παραπάνω γραμμές από το πλήθος των ορών του γινομένου και το συμπληρώνουμε ως εξής:

Στην 1<sup>η</sup> γραμμή βάζουμε όλες τις κρίσιμες τιμές (αυτές που μηδενίζουν τους όρους του γινομένου) από τη μικρότερη στη μεγαλύτερη

Στις επόμενες γραμμές τοποθετούμε τους όρους του γινομένου και συμπληρώνουμε τα κουτάκια με το αντίστοιχο πρόσημο

Βρίσκουμε το πρόσημο του γινομένου στην τελευταία γραμμή πολ/ντας τα πρόσημα που είναι στα αντίστοιχα κουτάκια και ανάλογα με τη μορφή της ανίσωσης επιλέγουμε το αντίστοιχο διάστημα τιμών για το  $\chi$ .

## Κλασματικές εξισώσεις

Πρόκειται για εξισώσεις που έχουν άγνωστο στον παρονομαστή

- Παραγοντοποιούμε τους παρονομαστές
- Βρίσκουμε το Ε.Κ.Π. και παίρνουμε περιορισμούς ώστε κανείς παρονομαστής να μην είναι 0
- Κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών
- Λύνουμε την εξίσωση που προκύπτει
- Ελέγχουμε αν οι λύσεις που βρήκαμε πληρούν τους περιορισμούς

## Κλασματικές ανισώσεις

- Μαζεύουμε όλους τους όρους στο 1<sup>ο</sup> μέλος
- Παραγοντοποιούμε τους παρονομαστές και βρίσκουμε το Ε.Κ.Π.
- Κάνουμε τα κλάσματα ομώνυμα (με καπελάκια)
- Προσθέτουμε τα κλάσματα και έχουμε μια ανίσωση της μορφής

$$\frac{A(\chi)B(\chi)\dots\Gamma(\chi)}{P(\chi)\Phi(\chi)\dots\Sigma(\chi)} \leq 0$$

- Λύνουμε την ανίσωση όπως την  $A(\chi)B(\chi)\Gamma(\chi)\dots\Phi(\chi) > 0$  εξαιρώντας τις ρίζες του παρονομαστή.

**Προσοχή:** Δεν κάνουμε απαλοιφή (ούτε χιαστί) εκτός αν ξέρουμε το πρόσημο του Ε.Κ.Π.

## Απόλυτη τιμή

- $|\alpha| = \begin{cases} \alpha & , \quad \alpha \geq 0 \\ -\alpha & , \quad \alpha < 0 \end{cases}$
- $|\alpha| \geq 0$  ,για κάθε  $\alpha$
- $|\alpha| = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$
- $|\alpha| > 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0$
- $|\alpha| \leq 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$
- $|\alpha| = |-\alpha|$
- $|\alpha| \geq \alpha$  και  $|\alpha| \geq -\alpha$
- $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$  και γενικά  $|\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n| = |\alpha_1| \cdot |\alpha_2| \dots |\alpha_n|$
- $|\frac{\alpha}{\beta}| = \frac{|\alpha|}{|\beta|}$  ,  $\beta \neq 0$
- $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$  και γενικά  $|\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n| \leq |\alpha_1| + |\alpha_2| + \dots + |\alpha_n|$
- $|\alpha| = \theta$  με  $\theta > 0 \Leftrightarrow \alpha = \theta$  ή  $\alpha = -\theta$
- $|\alpha| = \theta$  με  $\theta < 0$  αδύνατο
- $|\alpha| = |\beta| \Leftrightarrow \alpha = \beta$  ή  $\alpha = -\beta$
- αν  $\theta > 0$  τότε  $|\alpha| < \theta \Leftrightarrow -\theta < \alpha < \theta$
- αν  $\theta > 0$  τότε  $|\alpha| \leq \theta \Leftrightarrow -\theta \leq \alpha \leq \theta$
- αν  $\theta > 0$  τότε  $|\alpha| > \theta \Leftrightarrow \alpha > \theta$  ή  $\alpha < -\theta$
- αν  $\theta > 0$  τότε  $|\alpha| \geq \theta \Leftrightarrow \alpha \geq \theta$  ή  $\alpha \leq -\theta$
- αν  $\theta < 0$  τότε  $|\alpha| < \theta$  αδύνατο
- αν  $\theta < 0$  τότε  $|\alpha| > \theta$  αληθεύει για κάθε  $\alpha \in \mathbb{R}$

## Διάταξη πραγματικών αριθμών

### Ορισμοί

- Λέμε ότι ο αριθμός  $\alpha$  είναι μεγαλύτερος από τον αριθμό  $\beta$  και γράφουμε  $\alpha > \beta$ , όταν η διαφορά  $\alpha - \beta$  είναι θετικός αριθμός. Δηλαδή  $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta > 0$
- Λέμε ότι ο αριθμός  $\alpha$  είναι μικρότερος από τον αριθμό  $\beta$  και γράφουμε  $\alpha < \beta$ , όταν η διαφορά  $\alpha - \beta$  είναι αρνητικός αριθμός. Δηλαδή  $\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta < 0$
- Αν για τους αριθμούς  $\alpha, \beta$  ισχύει ότι  $\alpha > \beta$  ή  $\alpha = \beta$  τότε γράφουμε  $\alpha \geq \beta$
- Αν για τους αριθμούς  $\alpha, \beta$  ισχύει ότι  $\alpha < \beta$  ή  $\alpha = \beta$  τότε γράφουμε  $\alpha \leq \beta$

### Παρατηρήσεις

- από δύο αριθμούς πάνω στον άξονα μεγαλύτερος είναι αυτός που βρίσκεται δεξιότερα
- κάθε θετικός αριθμός είναι μεγαλύτερος από τον 0
- κάθε αρνητικός αριθμός είναι μικρότερος από τον 0
- κάθε αρνητικός αριθμός είναι μικρότερος από κάθε θετικό
- από δύο θετικούς αριθμούς μεγαλύτερος είναι αυτός που έχει τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή, ενώ από δύο αρνητικούς αυτός που έχει τη μικρότερη απόλυτη τιμή
- αν  $\alpha > 0$  και  $\beta > 0$  τότε  $\alpha + \beta > 0$
- αν  $\alpha < 0$  και  $\beta < 0$  τότε  $\alpha + \beta < 0$
- αν  $\alpha < 0$  και  $\beta > 0$  τότε αν  $|\alpha| < |\beta|$  θα είναι και  $\alpha + \beta > 0$ , ενώ αν  $|\alpha| > |\beta|$  θα είναι και  $\alpha + \beta < 0$
- αν οι αριθμοί  $\alpha, \beta$  είναι ομόσημοι δηλαδή αν  $\alpha\beta > 0$  τότε και  $\frac{\alpha}{\beta} > 0$  και  $\frac{\beta}{\alpha} > 0$
- αν οι αριθμοί  $\alpha, \beta$  είναι ετερόσημοι δηλαδή αν  $\alpha\beta < 0$  τότε και  $\frac{\alpha}{\beta} < 0$  και  $\frac{\beta}{\alpha} < 0$
- για κάθε πραγματικό αριθμό  $\alpha$  ισχύει  $\alpha^2 \geq 0$  ( το = ισχύει όταν  $\alpha = 0$  )
- γενικότερα για τη δύναμη  $\alpha^n$  (  $n$  θετικός ακέραιος ) έχουμε
  - αν ο  $n$  είναι άρτιος τότε  $\alpha^n \geq 0$
  - αν ο  $n$  είναι περιττός τότε ο  $\alpha^n$  έχει το ίδιο πρόσημο με τον  $\alpha$
- ισχύει ότι  $\alpha \leq \beta \leq \alpha \Leftrightarrow \alpha = \beta$

### Ιδιότητες

1. αν  $\alpha > \beta$  και  $\beta > \gamma$  τότε  $\alpha > \gamma$  ( μεταβατική )
2. αν  $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma > \beta + \gamma$  ( ακόμα και αν  $\gamma < 0$  )
3. αν  $\gamma > 0$  τότε  $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha\gamma > \beta\gamma$
4. αν  $\gamma < 0$  τότε  $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha\gamma < \beta\gamma$
5. αν  $\alpha > \beta$  και  $\gamma > \delta$  τότε  $\alpha + \gamma > \beta + \delta$  ( αν  $\alpha > \beta$  και  $\gamma < \delta$  τότε είναι  $\delta > \gamma$  και  $\alpha + \delta > \beta + \gamma$  )
6. αν  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  **θετικοί** αριθμοί τότε αν  $\alpha > \beta$  και  $\gamma > \delta$  θα είναι και  $\alpha\gamma > \beta\delta$
7. αν  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  **αρνητικοί** αριθμοί τότε αν  $\alpha > \beta$  και  $\gamma > \delta$  θα είναι και  $\alpha\gamma < \beta\delta$
8. αν  $\alpha > \beta$  τότε  $-\alpha < -\beta$
9. αν  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$  και  $n$  θετικός ακέραιος τότε ισχύει  $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha^n > \beta^n$ ,  
 $\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha^n = \beta^n$
10. αν  $\alpha, \beta$  ομόσημοι δηλαδή αν  $\alpha\beta > 0$  τότε  $\alpha > \beta \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} < \frac{1}{\beta}$
11. αν  $\alpha, \beta$  ετερόσημοι δηλαδή αν  $\alpha\beta < 0$  τότε  $\alpha > \beta \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} > \frac{1}{\beta}$

## Παρατηρήσεις

1) Δύο ανισότητες δεν αφαιρούνται ποτέ κατά μέλη

2) Δύο ανισότητες δεν διαιρούνται ποτέ κατά μέλη

3) Αν τα μέλη μιας ανισότητας είναι τυχαίοι πραγματικοί αριθμοί τότε δεν μπορούμε να υψώσουμε σε **άρτια** δύναμη τα δύο της μέλη. Σε **περιττή** όμως δύναμη μπορούμε.

Όμως αν  $\alpha, \beta$  θετικοί τότε  $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha^2 > \beta^2$  και γενικά  $\alpha^{2\nu} > \beta^{2\nu}$

και αν  $\alpha, \beta$  αρνητικοί τότε  $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha^2 < \beta^2$  και γενικά  $\alpha^{2\nu} < \beta^{2\nu}$

4) Δεν μπορούμε να πολ/με τα μέλη μιας ανισότητας με τον ίδιο αριθμό αν δεν ξέρουμε το πρόσημό του

5) Δεν μπορούμε να πολ/με ανισότητες κατά μέλη αν δεν ξέρουμε τα πρόσημα όλων των όρων των ανισοτήτων

6) Διαπιστώστε την αλήθεια των παρακάτω ισοδυναμιών

- $\alpha^2 \leq 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$
- $\alpha^2 + \beta^2 \leq 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta = 0$
- $\alpha^2 > 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0$
- $\alpha^2 + \beta^2 > 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0 \text{ ή } \beta \neq 0$
- αν  $\alpha < \beta$  τότε  $\alpha < \frac{\alpha + \beta}{2} < \beta$

7) Όπου παραπάνω λέμε ότι δεν μπορούμε να κάνουμε κάτι, εννοούμε ότι δεν είμαστε σίγουροι τι φορά ( $<$  ή  $>$ ) θα έχει η ανισότητα που θα προκύψει.

8) Όταν θέλω να συγκρίνω δύο ποσότητες A,B τότε ελέγχω το πρόσημο της διαφοράς A-B (συνήθως) ή συγκρίνω τη ποσότητα  $\frac{A}{B}$  με το 1 (σε πιο ειδικές περιπτώσεις και φυσικά αν  $B \neq 0$ ).

Έτσι αν  $A-B > 0$  τότε  $A > B$  και αν  $A-B < 0$  τότε  $A < B$

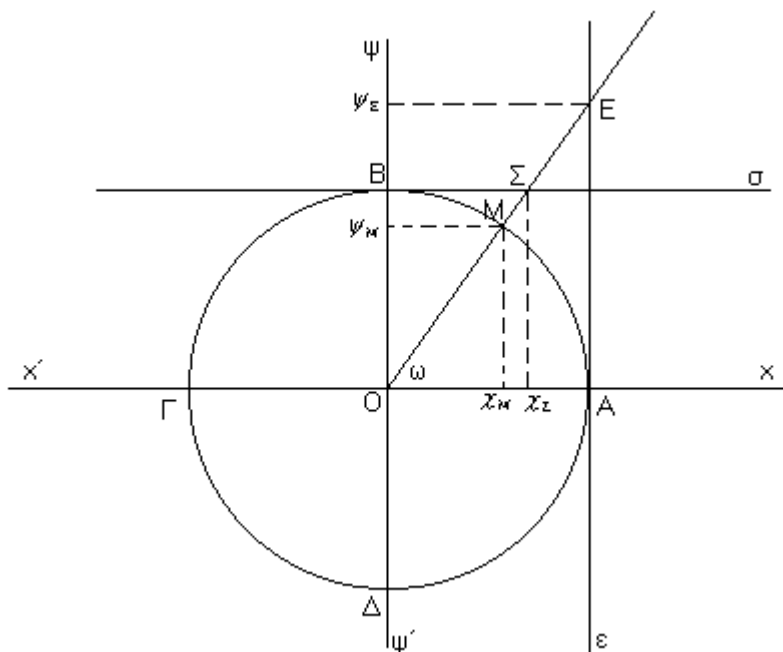
Έτσι αν  $\frac{A}{B} > 1$  και  $B > 0$  τότε  $A > B$  ενώ αν  $\frac{A}{B} > 1$  και  $B < 0$  τότε  $A < B$

9) Αν θέλουμε να αποδείξουμε ότι μια ποσότητα είναι πάντα μη αρνητική προσπαθούμε να τη γράψουμε σαν μια άλλη ποσότητα υψωμένη σε άρτια δύναμη ή σαν γινόμενο ομοσήμων ποσοτήτων ή σαν άθροισμα τετραγώνων.

10) Για να αποδείξουμε μια ανισότητα συνήθως θεωρούμε ότι ισχύει και προσπαθούμε με ισοδυναμίες να φτάσουμε σε μια άλλη ανισότητα που ισχύει πάντα.

## Τριγωνομετρία

**Τριγωνομετρικός κύκλος :** Είναι ο κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα 1 .



Αφού ο κύκλος έχει ακτίνα 1 έχουμε ότι  $A(1,0)$  ,  $B(0,1)$  ,  $\Gamma(-1,0)$  ,  $\Delta(0,-1)$

$\varepsilon : \chi = 1$  ,  $\sigma : \psi = 1$  .

Η τελική πλευρά της γωνίας  $\omega$  τέμνει τον κύκλο στο  $M(\chi_M, \psi_M)$  , την ευθεία  $\varepsilon$  στο  $E(1, \psi_E)$  και την ευθεία  $\sigma$  στο  $\Sigma(\chi_\Sigma, 1)$ .

Ισχύει ότι  $\chi_M = \sin \omega$  ,  $\psi_M = \eta \mu \omega$  ,  $\psi_E = \varepsilon \phi \omega$  ,  $\chi_\Sigma = \sigma \phi \omega$

Ο  $\chi\chi'$  λέγεται άξονας των συνημίτονων γιατί πάνω στον  $\chi\chi'$  βρίσκουμε το  $\sin \omega$  .

Ο  $\psi\psi'$  λέγεται άξονας των ημίτονων γιατί πάνω στον  $\psi\psi'$  βρίσκουμε το  $\eta \mu \omega$

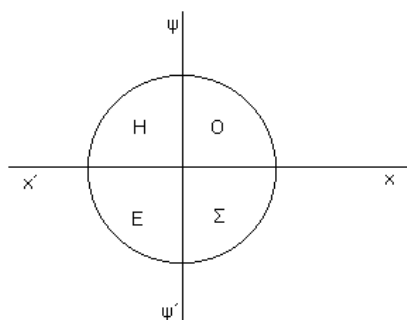
Η ευθεία  $\varepsilon$  λέγεται ευθεία των εφαπτόμενων και η ευθεία  $\sigma$  των συνεφαπτόμενων .

- Γωνίες με τελική πλευρά την OA :  $\omega = 2\kappa\pi$  ,  $\kappa \in \mathbb{Z}$
- Γωνίες με τελική πλευρά την OB :  $\omega = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}$  ,  $\kappa \in \mathbb{Z}$
- Γωνίες με τελική πλευρά την OΓ :  $\omega = 2\kappa\pi + \pi$  ,  $\kappa \in \mathbb{Z}$
- Γωνίες με τελική πλευρά την OΔ :  $\omega = 2\kappa\pi + \frac{3\pi}{2}$  ,  $\kappa \in \mathbb{Z}$
- Γωνίες με τελική πλευρά την OA ή OΓ :  $\omega = \kappa\pi$  ,  $\kappa \in \mathbb{Z}$
- Γωνίες με τελική πλευρά την OB ή OΔ :  $\omega = \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$  ,  $\kappa \in \mathbb{Z}$
- Γωνίες με τελική πλευρά την OA ή OB ή OΓ ή OΔ :  $\frac{\kappa\pi}{2}$  ,  $\kappa \in \mathbb{Z}$

- Οι παραστάσεις  $\eta\mu\chi$  και  $\sigma\upsilon\nu\chi$  ορίζονται για κάθε  $\chi \in \mathcal{R}$  και είναι  $-1 \leq \eta\mu\chi \leq 1$  και  $-1 \leq \sigma\upsilon\nu\chi \leq 1$
- Η παράσταση  $\epsilon\phi\chi$  ορίζεται για κάθε  $\chi \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}$
- Η παράσταση  $\sigma\phi\chi$  ορίζεται για κάθε  $\chi \neq \kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z}$

### Πρόσημο τριγωνομετρικών αριθμών

| Τεταρτημόριο<br>Τριγ. Αριθ. | 1ο | 2ο | 3ο | 4ο |
|-----------------------------|----|----|----|----|
| $\eta\mu\omega$             | +  | +  | -  | -  |
| $\sigma\upsilon\nu\omega$   | +  | -  | -  | +  |
| $\epsilon\phi\omega$        | +  | -  | +  | -  |
| $\sigma\phi\omega$          | +  | -  | +  | -  |



### Τριγωνομετρικοί αριθμοί βασικών γωνιών

| Γωνία<br>σε<br>μοίρες | Γωνία<br>σε<br>rad | $\eta\mu$            | $\sigma\upsilon\nu$  | $\epsilon\phi$       | $\sigma\phi$         |
|-----------------------|--------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| 0 ή 360               | 0                  | 0                    | 1                    | 0                    | -                    |
| 30                    | $\frac{\pi}{6}$    | $\frac{1}{2}$        | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $\sqrt{3}$           |
| 45                    | $\frac{\pi}{4}$    | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | 1                    | 1                    |
| 60                    | $\frac{\pi}{3}$    | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{2}$        | $\sqrt{3}$           | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ |
| 90                    | $\frac{\pi}{2}$    | 1                    | 0                    | -                    | 0                    |
| 180                   | $\pi$              | 0                    | -1                   | 0                    | -                    |
| 270                   | $\frac{3\pi}{2}$   | -1                   | 0                    | -                    | 0                    |

### Βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες

|                                                                                                      |                                                                                                                               |                                                                                                                                           |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\eta\mu^2\chi + \sigma\upsilon\nu^2\chi = 1, \chi \in \mathbb{R}$                                   | $\varepsilon\phi\chi = \frac{\eta\mu\chi}{\sigma\upsilon\nu\chi}, \chi \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}$ | $\eta\mu^2\chi = \frac{\varepsilon\phi^2\chi}{1 + \varepsilon\phi^2\chi}$<br>$\chi \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}$ |
| $\varepsilon\phi\chi \cdot \sigma\phi\chi = 1, \chi \neq \frac{\kappa\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}$ | $\sigma\phi\chi = \frac{\sigma\upsilon\nu\chi}{\eta\mu\chi}, \chi \neq \kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z}$                      | $\sigma\upsilon\nu^2\chi = \frac{1}{1 + \varepsilon\phi^2\chi}$<br>$\chi \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}$           |

### Τριγωνομετρικές εξισώσεις

Η εξίσωση  $\eta\mu\chi = \alpha$

- Αν  $\alpha > 1$  ή  $\alpha < -1$  τότε είναι αδύνατη
- Αν  $\alpha = 1$  τότε  $\chi = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}$
- Αν  $\alpha = -1$  τότε  $\chi = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}$
- Αν  $-1 < \alpha < 1$  τότε αναζητούμε γωνία  $\theta \in (0, \pi)$  ώστε  $\eta\mu\theta = \alpha$  και τότε η εξίσωση γίνεται  $\eta\mu\alpha = \eta\mu\theta$  από όπου έχουμε ότι:  $\chi = \begin{cases} 2\kappa\pi + \theta \\ \eta' \\ 2\kappa\pi + \pi - \theta \end{cases} \quad \kappa \in \mathbb{Z}$

Η εξίσωση  $\sigma\upsilon\nu\chi = \alpha$

- Αν  $\alpha > 1$  ή  $\alpha < -1$  τότε είναι αδύνατη
- Αν  $\alpha = 1$  τότε  $\chi = 2\kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z}$
- Αν  $\alpha = -1$  τότε  $\chi = 2\kappa\pi + \pi, \kappa \in \mathbb{Z}$
- Αν  $-1 < \alpha < 1$  τότε αναζητούμε γωνία  $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  ώστε  $\sigma\upsilon\nu\theta = \alpha$  και τότε η εξίσωση γίνεται  $\sigma\upsilon\nu\alpha = \sigma\upsilon\nu\theta$  από όπου έχουμε ότι:  $\chi = \begin{cases} 2\kappa\pi + \theta \\ \eta' \\ 2\kappa\pi - \theta \end{cases} \quad \kappa \in \mathbb{Z}$

Η εξίσωση  $\varepsilon\phi\chi = \alpha$  ή  $\sigma\phi\chi = \alpha$

Έχει λύση για κάθε τιμή του  $\alpha$ . Αναζητούμε γωνία  $\theta \in (0, \pi)$  ώστε  $\varepsilon\phi\theta = \alpha$  ή αντίστοιχα  $\sigma\phi\theta = \alpha$  οπότε η εξίσωση γίνεται  $\varepsilon\phi\chi = \varepsilon\phi\theta$  ή  $\sigma\phi\chi = \sigma\phi\theta$  από όπου έχουμε ότι:  $\chi = \kappa\pi + \theta, \kappa \in \mathbb{Z}$ .

### Αναγωγή στο 1<sup>ο</sup> τεταρτημόριο

$$\eta\mu(\pi - \theta) = \eta\mu\theta \quad , \quad \sigma\upsilon\nu(\pi - \theta) = -\sigma\upsilon\nu\theta \quad , \quad \epsilon\phi(\pi - \theta) = -\epsilon\phi\theta \quad , \quad \sigma\phi(\pi - \theta) = -\sigma\phi\theta$$

$$\eta\mu(\pi + \theta) = -\eta\mu\theta \quad , \quad \sigma\upsilon\nu(\pi + \theta) = -\sigma\upsilon\nu\theta \quad , \quad \epsilon\phi(\pi + \theta) = \epsilon\phi\theta \quad , \quad \sigma\phi(\pi + \theta) = \sigma\phi\theta$$

$$\eta\mu(2\pi - \theta) = -\eta\mu\theta \quad , \quad \sigma\upsilon\nu(2\pi - \theta) = \sigma\upsilon\nu\theta \quad , \quad \epsilon\phi(2\pi - \theta) = -\epsilon\phi\theta \quad , \quad \sigma\phi(2\pi - \theta) = -\sigma\phi\theta$$

$$\eta\mu(2\pi + \theta) = \eta\mu\theta \quad , \quad \sigma\upsilon\nu(2\pi + \theta) = \sigma\upsilon\nu\theta \quad , \quad \epsilon\phi(2\pi + \theta) = \epsilon\phi\theta \quad , \quad \sigma\phi(2\pi + \theta) = \sigma\phi\theta$$

$$\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sigma\upsilon\nu\theta \quad , \quad \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \eta\mu\theta \quad , \quad \epsilon\phi\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sigma\phi\theta \quad , \quad \sigma\phi\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \epsilon\phi\theta$$

$$\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \sigma\upsilon\nu\theta \quad , \quad \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\eta\mu\theta \quad , \quad \epsilon\phi\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sigma\phi\theta \quad , \quad \sigma\phi\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\epsilon\phi\theta$$

$$\eta\mu\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) = -\sigma\upsilon\nu\theta \quad , \quad \sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) = -\eta\mu\theta \quad , \quad \epsilon\phi\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) = \sigma\phi\theta \quad , \quad \sigma\phi\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) = \epsilon\phi\theta$$

$$\eta\mu\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) = -\sigma\upsilon\nu\theta \quad , \quad \sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) = \eta\mu\theta \quad , \quad \epsilon\phi\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) = -\sigma\phi\theta \quad , \quad \sigma\phi\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) = -\epsilon\phi\theta$$

### Εκθετική συνάρτηση

Η συνάρτηση  $f(x) = a^x$  με  $a > 0$  και  $a \neq 1$  λέγεται εκθετική συνάρτηση με βάση  $a$ .

Έχει πεδίο ορισμού όλο το  $\mathbb{R}$  και σύνολο τιμών το  $(0, +\infty)$ .

Αν  $a > 1$  είναι γνησίως αύξουσα ενώ αν  $0 < a < 1$  είναι γνησίως φθίνουσα.

Αν  $a^{x_1} = a^{x_2}$  τότε  $x_1 = x_2$

Αν  $a^{x_1} > a^{x_2}$  τότε 
$$\begin{cases} x_1 > x_2 & , \quad \text{αν } a > 1 \\ x_1 < x_2 & , \quad \text{αν } 0 < a < 1 \end{cases}$$

Αν  $a = e$  ( $e \approx 2,711828$ ) τότε έχουμε τη συνάρτηση  $f(x) = e^x$  που λέγεται απλά **εκθετική** και ισχύουν ό,τι για την προηγούμενη με  $a > 1$

## Λογάριθμοι

Έστω  $a > 0$  και  $a \neq 1$ .

Ονομάζουμε λογάριθμο του  $\theta$  με βάση  $a$  και συμβολίζουμε  $\log_a \theta$  τον εκθέτη στον οποίο πρέπει να υψώσουμε τον  $a$  ώστε να βρούμε  $\theta$ .

$$a^x = \theta \Leftrightarrow x = \log_a \theta$$

Ο  $\log_a \theta$  ορίζεται μόνο όταν  $\theta > 0$  και  $a > 0$  και  $a \neq 1$ .

Αν  $a = 10$  τότε  $\log_{10} \theta = \log \theta$ , δηλαδή  $10^x = \theta \Leftrightarrow x = \log \theta$  με  $\theta > 0$

Αν  $a = e$  τότε  $\log_e \theta = \ln \theta$ , δηλαδή  $e^x = \theta \Leftrightarrow x = \ln \theta$  με  $\theta > 0$

Συνέπειες ορισμού :  $\log_a a^x = x$ ,  $\log_a 1 = 0$ ,  $\log_a a = 1$ ,  $a^{\log_a \theta} = \theta$

Αντίστοιχα :  $\ln e^x = x$ ,  $\ln 1 = 0$ ,  $\ln e = 1$ ,  $e^{\ln \theta} = \theta$

### Ιδιότητες

$$\log_a (\theta_1 \theta_2) = \log_a \theta_1 + \log_a \theta_2$$

$$\log_a \left( \frac{\theta_1}{\theta_2} \right) = \log_a \theta_1 - \log_a \theta_2$$

$$\log_a \theta^k = k \log_a \theta$$

για  $a, \beta > 0$ ,  $a, \beta \neq 1$ ,  $\theta, \theta_1, \theta_2 > 0$ ,  $k \in \mathbb{R}$ .

$$\log_\beta \theta = \frac{\log_a \theta}{\log_a \beta} = \frac{\log \theta}{\log \beta} = \frac{\ln \theta}{\ln \beta}$$

### Λογαριθμική συνάρτηση

Η συνάρτηση  $f(x) = \log_a x$  με  $a > 0$  και  $a \neq 1$ , λέγεται λογαριθμική συνάρτηση με βάση  $a$ .

Έχει πεδίο ορισμού το  $(0, +\infty)$  και σύνολο τιμών όλο το  $\mathbb{R}$ .

Αν  $a > 1$  είναι γνησίως αύξουσα ενώ αν  $0 < a < 1$  είναι γνησίως φθίνουσα.

Αν  $\log_a x_1 = \log_a x_2$  τότε  $x_1 = x_2$

Αν  $\log_a x_1 > \log_a x_2$  τότε  $\begin{cases} x_1 > x_2, & \text{αν } a > 1 \\ x_1 < x_2, & \text{αν } 0 < a < 1 \end{cases}$

Αν  $a = e$  τότε έχουμε τη συνάρτηση  $f(x) = \ln x$  και ισχύουν ό,τι για την προηγούμενη με  $a > 1$ .

## Πρόσημο λογαρίθμου

Το πρόσημο ενός λογαρίθμου, ανάλογα με τη βάση του, για τις διάφορες τιμές του  $x$  φαίνεται στα παρακάτω πινακάκια.

|                       |   |   |           |
|-----------------------|---|---|-----------|
| $x$                   | 0 | 1 | $+\infty$ |
| $\log_x x$<br>$x > 1$ | - | 0 | +         |

|                           |   |   |           |
|---------------------------|---|---|-----------|
| $x$                       | 0 | 1 | $+\infty$ |
| $\log_x x$<br>$0 < x < 1$ | + | 0 | -         |

|               |   |   |           |
|---------------|---|---|-----------|
| $x$           | 0 | 1 | $+\infty$ |
| $\log_{10} x$ | - | 0 | +         |

|         |   |   |           |
|---------|---|---|-----------|
| $x$     | 0 | 1 | $+\infty$ |
| $\ln x$ | - | 0 | +         |

## Αριθμητική πρόοδος

Μια ακολουθία λέγεται αριθμητική πρόοδος αν κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενο με πρόσθεση του ίδιου πάντοτε αριθμού. Τον αριθμό αυτό τον συμβολίζουμε με  $\omega$  και τον λέμε διαφορά της προόδου.

Αν η ακολουθία  $\alpha_n$  είναι αριθμητική πρόοδος με διαφορά  $\omega$  τότε

$$\alpha_n = \alpha_{n-1} + \omega = \alpha_1 + (n-1)\omega$$

Το άθροισμα  $S_n$  των πρώτων  $n$  όρων της προόδου είναι

$$S_n = \frac{(\alpha_1 + \alpha_n)n}{2} = \frac{[2\alpha_1 + (n-1)\omega]n}{2}$$

Τρεις αριθμοί  $\alpha, \beta, \gamma$  είναι διαδοχικοί όροι μιας αριθμητικής προόδου αν και μόνο αν ισχύει  $\beta = \frac{\alpha + \gamma}{2}$ . Ο αριθμός  $\beta$  λέγεται αριθμητικός μέσος των  $\alpha$  και  $\gamma$ .

## Γεωμετρική πρόοδος

Μια ακολουθία λέγεται γεωμετρική πρόοδος αν κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενο με πολλαπλασιασμό του ίδιου πάντοτε μη μηδενικού αριθμού. Τον αριθμό αυτό τον συμβολίζουμε με  $\lambda$  και τον λέμε λόγο της προόδου.

Σε μια γεωμετρική πρόοδο υποθέτουμε ότι  $\alpha_1 \neq 0$  οπότε αφού  $\lambda \neq 0$  είναι και  $\alpha_n \neq 0$

Αν η ακολουθία  $\alpha_n$  είναι αριθμητική πρόοδος με λόγο  $\lambda$  τότε

$$\alpha_n = \alpha_{n-1} \cdot \lambda = \alpha_1 \cdot \lambda^{n-1}$$

Το άθροισμα  $S_n$  των πρώτων  $n$  όρων της προόδου είναι

$$S_n = \alpha_1 \cdot \frac{\lambda^n - 1}{\lambda - 1} \quad \text{αν} \quad \lambda \neq 1 \quad \text{και} \quad S_n = n \cdot \alpha_1 \quad \text{αν} \quad \lambda = 1$$

Τρεις αριθμοί  $\alpha, \beta, \gamma$  είναι διαδοχικοί όροι μιας γεωμετρικής προόδου αν και μόνο αν ισχύει  $\beta^2 = \alpha\gamma$ . Ο θετικός αριθμός  $\sqrt{\alpha\gamma}$  λέγεται γεωμετρικός μέσος των  $\alpha$  και  $\gamma$ .