

ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

Αρχική συνάρτηση

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . **Αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ** ονομάζεται κάθε συνάρτηση F που είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει

$$F'(x) = f(x), \text{ για κάθε } x \in \Delta.$$

Παρατήρηση

Αποδεικνύεται ότι κάθε συνεχής συνάρτηση σε διάστημα Δ έχει παράγουσα στο διάστημα αυτό (διότι γενικά δεν έχει κάθε συνάρτηση παράγουσα).

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ , τότε

- όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x) = F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$,
είναι παράγουσες της f στο Δ και
- κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή

$$G(x) = F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Παρατήρηση

Το θεώρημα ισχύει σε διάστημα και όχι σε ένωση διαστημάτων, γιατί τότε μπορεί να μη διαφέρουν κατά μία σταθερά, αλλά κατά μία σταθερά ανά διάστημα.

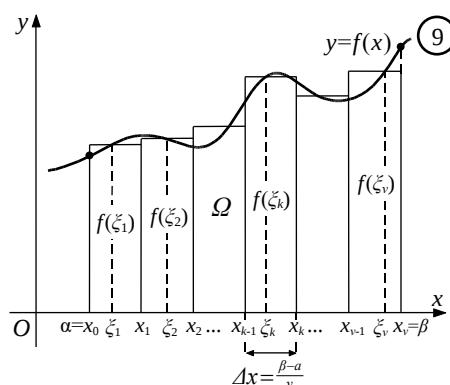
Οι τύποι του παρακάτω πίνακα παραγωγών συναρτήσεων ισχύουν σε κάθε **διάστημα** του χ στο οποίο οι παραστάσεις του χ έχουν νόημα.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΑΡΑΓΟΥΣΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ								
$f(x)$	0	1	$\frac{1}{x}$	$x^\alpha, \alpha \neq -1$	συνχ	ημχ	e^x	a^x
$F(x)$	c	$x+c$	$\begin{cases} \ln x + c_1, x > 0 \\ \ln(-x) + c_2, x < 0 \end{cases}$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	ημχ + c	-συνχ + c	$e^x + c$	$\frac{a^x}{\ln a} + c$

όπου $c \in \mathbb{R}$

Ορισμός εμβαδού

Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[a, \beta]$, με $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$ και Ω το χωρίο που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα των x και τις ευθείες $x = a$, $x = \beta$.



Για να ορίσουμε το εμβαδόν του χωρίου Ω (Σχ. 9) εργαζόμαστε όπως στο προηγούμενο παράδειγμα. Δηλαδή:

- Χωρίζουμε το διάστημα $[a, \beta]$ σε v ισομήκη υποδιαστήματα, μήκους $\Delta x = \frac{\beta-a}{v}$, με τα σημεία $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_v = \beta$.

- Σε κάθε υποδιάστημα $[x_{k-1}, x_k]$ επιλέγουμε αυθαίρετα ένα σημείο ξ_k και σχηματίζουμε τα ορθογώνια που έχουν βάση Δx και ύψη τα $f(\xi_k)$. Το άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων αυτών είναι $S_v = f(\xi_1)\Delta x + f(\xi_2)\Delta x + \dots + f(\xi_v)\Delta x = [f(\xi_1) + \dots + f(\xi_v)]\Delta x$.

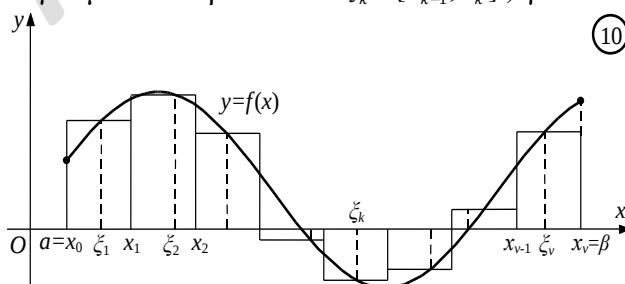
- Υπολογίζουμε το $\lim_{v \rightarrow +\infty} S_v$.

Αποδεικνύεται ότι το $\lim_{v \rightarrow +\infty} S_v$ υπάρχει στο $\mathbb{R}$ και είναι ανεξάρτητο από την επιλογή των σημείων ξ_k . Το όριο αυτό ονομάζεται **εμβαδόν** του επιπέδου χωρίου Ω και συμβολίζεται με $E(\Omega)$. Είναι φανερό ότι $E(\Omega) \geq 0$.

Η έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος

Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο $[a, \beta]$. Με τα σημεία $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_v = \beta$ χωρίζουμε το διάστημα $[a, \beta]$ σε v ισομήκη υποδιαστήματα μήκους $\Delta x = \frac{\beta-a}{v}$.

Στη συνέχεια επιλέγουμε αυθαίρετα ένα $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, για κάθε $k \in \{1, 2, \dots, v\}$, και



σχηματίζουμε το άθροισμα $S_v = f(\xi_1)\Delta x + f(\xi_2)\Delta x + \dots + f(\xi_v)\Delta x$

το οποίο συμβολίζεται, σύντομα, ως εξής: $S_v = \sum_{k=1}^v f(\xi_k)\Delta x^{(1)}$.

⁽¹⁾ Το άθροισμα αυτό ονομάζεται ένα άθροισμα RIEMANN.

- Αποδεικνύεται ότι,

“Το όριο του αθροίσματος S_n , δηλαδή το $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x \right)$ (1) υπάρχει στο $\mathbb{R}$ και είναι ανεξάρτητο από την επιλογή των ενδιάμεσων σημείων ξ_k ”.

Το παραπάνω όριο (1) ονομάζεται **ορισμένο ολοκλήρωμα** της συνεχούς συνάρτησης f από το a στο b , συμβολίζεται με $\int_a^b f(x)dx$ και διαβάζεται

“ολοκλήρωμα της f από το a στο b ”. Δηλαδή, $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x \right)$

Το σύμβολο $\int$ οφείλεται στον Leibniz και ονομάζεται **σύμβολο** ολοκλήρωσης. Αυτό είναι επιμήκυνση του αρχικού γράμματος S της λέξης Summa (άθροισμα). Οι αριθμοί a και b ονομάζονται **όρια** της ολοκλήρωσης. Η έννοια “όρια” εδώ δεν έχει την ίδια έννοια του ορίου του 2ου κεφαλαίου.

- Στην έκφραση $\int_a^b f(x)dx$ το γράμμα x είναι μια μεταβλητή και μπορεί να αντικατασταθεί με οποιοδήποτε άλλο γράμμα. Έτσι, για παράδειγμα, οι εκφράσεις $\int_a^b f(x)dx$, $\int_a^b f(t)dt$ συμβολίζουν το ίδιο ορισμένο ολοκλήρωμα και είναι πραγματικός αριθμός, σε αντίθεση με το $\int f(x)dx$ που είναι ένα σύνολο συναρτήσεων.
- Επεκτείνουμε τον παραπάνω ορισμό και για τις περιπτώσεις που είναι $\alpha > \beta$ ή $\alpha = \beta$, ως εξής:

$$\begin{aligned} \bullet \int_a^b f(x)dx &= -\int_b^a f(x)dx \\ \bullet \int_a^a f(x)dx &= 0 \end{aligned}$$

- Από τους ορισμούς του εμβαδού και του ορισμένου ολοκληρώματος προκύπτει ότι:

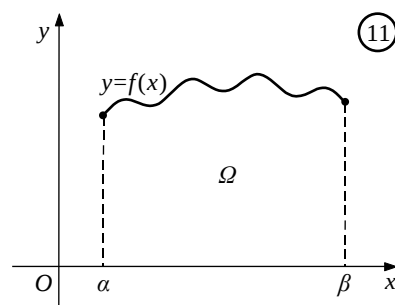
Αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε το

ολοκλήρωμα $\int_a^b f(x)dx$ δίνει το εμβαδόν

$E(\Omega)$ του χωρίου Ω που περικλείεται από

τη γραφική παράσταση της f τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$

(Σχ. 11). Δηλαδή, $\int_a^b f(x)dx = E(\Omega)$.



- Επομένως, αν $f(x) \geq 0$ τότε $\int_a^b f(x)dx \geq 0$

Παρατηρήσεις

1. Το ορισμένο ολοκλήρωμα με άκρα σταθερούς αριθμούς είναι σταθερός πραγματικός αριθμός (θετικός, αρνητικός ή μηδέν)
2. Το ορισμένο ολοκλήρωμα παριστάνει εμβαδόν μόνο αν η συνάρτηση f παίρνει μη αρνητικές τιμές. Ωστόσο υφίσταται το ορισμένο ολοκλήρωμα ακόμα και η συνάρτηση παίρνει και αρνητικές τιμές.
3. Το ορισμένο ολοκλήρωμα εξαρτάται μόνο από τη συνάρτηση f και από τα άκρα ολοκλήρωσης α , β και όχι από τη μεταβλητή

$$\text{ολοκλήρωσης, δηλαδή } \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = \int_{\alpha}^{\beta} f(u)du$$

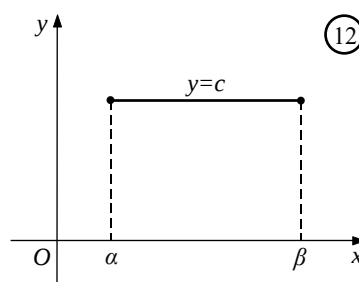
4. Όταν γράφουμε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ εννοείται ότι $x \in [\alpha, \beta]$ και f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$
5. Αν $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \geq 0$ τότε δεν ισχύει απαραίτητα ότι $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$
6. Αν $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = 0$ τότε δεν ισχύει απαραίτητα $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ ούτε φυσικά ότι $\alpha = \beta$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

$$\int_{\alpha}^{\beta} c dx = c(\beta - \alpha), \text{ για οποιοδήποτε } c \in \mathbb{R}$$

ΣΧΟΛΙΟ

Αν $c > 0$, τότε το $\int_{\alpha}^{\beta} c dx$ εκφράζει το εμβαδόν ενός ορθογωνίου με βάση $\beta - \alpha$ και ύψος c (Σχ. 12).



Ιδιότητες του ορισμένου ολοκληρώματος

ΘΕΩΡΗΜΑ 1ο

Έστω f, g συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha, \beta]$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Τότε ισχύουν

- $\int_{\alpha}^{\beta} \lambda f(x)dx = \lambda \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$
- $\int_{\alpha}^{\beta} [f(x) + g(x)]dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx + \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$

και γενικά

- $\int_{\alpha}^{\beta} [\lambda f(x) + \mu g(x)]dx = \lambda \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx + \mu \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$

ΘΕΩΡΗΜΑ 2ο

Αν η f είναι σ υ ν ε χ ή ς σε διάστημα Δ και $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$, τότε ισχύει

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x)dx$$

Για παράδειγμα, αν $\int_0^3 f(x)dx = 3$ και $\int_0^4 f(x)dx = 7$, τότε

$$\int_3^4 f(x)dx = \int_3^0 f(x)dx + \int_0^4 f(x)dx = -\int_0^3 f(x)dx + \int_0^4 f(x)dx = -3 + 7 = 4.$$

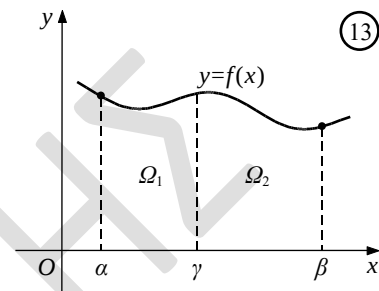
ΣΗΜΕΙΩΣΗ

Αν $f(x) \geq 0$ και $\alpha < \gamma < \beta$ (Σχ. 13), η παραπάνω ιδιότητα δηλώνει ότι:

$$E(\Omega) = E(\Omega_1) + E(\Omega_2)$$

$$\text{αφού } E(\Omega_1) = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx, \quad E(\Omega_2) = \int_{\gamma}^{\beta} f(x)dx$$

$$\text{και } E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx.$$



ΘΕΩΡΗΜΑ 3ο

Έστω f μια σ υ ν ε χ ή ς συνάρτηση σε ένα διάστημα $[a, \beta]$. Αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$ και η συνάρτηση f δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα αυτό, τότε

$$\int_a^{\beta} f(x)dx > 0.$$

Παρατηρήσεις

1. Το θεώρημα 2 ισχύει ανεξάρτητα από τη διάταξη των α, β, γ . Η συνθήκη $\alpha < \gamma < \beta$ αφορά τη γραφική της ερμηνεία που αναφέρεται στη σημείωση.
2. Αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$ και $\int_a^{\beta} f(x)dx = 0$ τότε $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$
3. Αν για τη συνεχή συνάρτηση f ισχύουν $\int_a^{\beta} f(x)dx = 0$, $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in D_f$ και f δεν είναι παντού μηδέν τότε $\alpha = \beta$.

Μονοτονία ολοκληρώματος

Αν $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \geq \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx$.

Απόδειξη

$$\begin{aligned} f(x) \geq g(x) &\Rightarrow f(x) - g(x) \geq 0 \Rightarrow \int_{\alpha}^{\beta} (f(x) - g(x)) dx \geq 0 \Rightarrow \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx - \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx \geq 0 \Rightarrow \\ \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx &\geq \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx \end{aligned}$$

Παρατηρήσεις

1. Το αντίστροφο δεν ισχύει απαραίτητα. Δηλαδή μπορεί να ισχύει

$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \geq \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx$ χωρίς να ισχύει απαραίτητα ότι $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

2. Αν επιπλέον υπάρχει $x_0 \in [\alpha, \beta]$ με $f(x_0) > g(x_0)$ τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx > \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx$

3. Η ιδιότητα αυτή μας επιτρέπει να ολοκληρώνουμε ορισμένα ανισότητες, με τη φορά να παραμένει εφόσον το πάνω άκρο ολοκλήρωσης είναι μεγαλύτερο από το κάτω. Αν το πάνω άκρο είναι μικρότερο τότε η φορά αλλάζει, ενώ αν τα άκρα ισοούνται τότε μηδενίζονται και τα 2 μέλη οπότε έχουμε ισότητα.

4. Με βάση την ιδιότητα αυτή και ιδιότητες απολύτων έχουμε ότι

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \right| \leq \int_{\alpha}^{\beta} |f(x)| dx \text{ για κάθε } x \in [\alpha, \beta]$$

Απόδειξη

Ξέρουμε από ιδιότητες απόλυτων ότι $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ οπότε από τη μονοτονία του ολοκληρώματος αφού $\alpha < \beta$ είναι $\int_{\alpha}^{\beta} -|f(x)| \leq \int_{\alpha}^{\beta} f(x) \leq \int_{\alpha}^{\beta} |f(x)|$

$$\text{οπότε } \left| \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \right| \leq \int_{\alpha}^{\beta} |f(x)| dx$$

Βασική εφαρμογή

Αν συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, και m, M η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή της f στο $[\alpha, \beta]$, τότε $m \leq f(x) \leq M$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$

$$\text{οπότε και } \int_{\alpha}^{\beta} m dx \leq \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \leq \int_{\alpha}^{\beta} M dx \Rightarrow m(\beta - \alpha) \leq \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \leq M(\beta - \alpha)$$

Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $F(x) = \int_a^x f(t)dt$

ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν f είναι μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ και a είναι ένα σημείο του Δ , τότε η συνάρτηση $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, $x \in \Delta$, είναι μια παράγουσα της f στο Δ .

Δηλαδή ισχύει: $\left(\int_a^x f(t)dt \right)' = f(x)$, για κάθε $x \in \Delta$.

Γραφική ερμηνεία

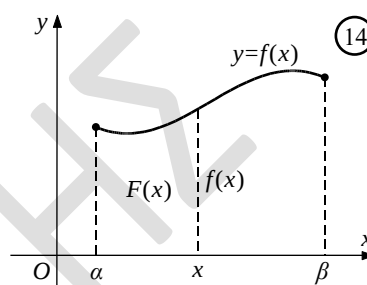
Εποπτικά το συμπέρασμα του παραπάνω θεωρήματος προκύπτει (Σχ. 14) ως εξής:

$$F(x+h) - F(x) = \int_x^{x+h} f(t)dt$$

= Εμβαδόν του χωρίου Ω . $\approx f(x) \cdot h$, για μικρά $h > 0$. Άρα, για μικρά $h > 0$ είναι

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} \approx f(x), \text{ οπότε}$$

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)$$



• Αν $F(x) = \int_x^a f(t)dt = -\int_a^x f(t)dt$ τότε $F'(x) = -f(x)$

• Από το παραπάνω θεώρημα και το θεώρημα παραγωγίσιμης σύνθετης συνάρτησης προκύπτει ότι:

$$\left(\int_a^{g(x)} f(t)dt \right)' = f(g(x)) \cdot g'(x),$$

με την προϋπόθεση ότι τα χρησιμοποιούμενα σύμβολα έχουν νόημα.

• Με συνδυασμό των παραπάνω έχουμε :

$$\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)dt = f(g(x)) \cdot g'(x) - f(h(x)) \cdot h'(x)$$

Παρατηρήσεις

1. Το ορισμένο ολοκλήρωμα παριστάνει αριθμό όταν και τα δύο του άκρα είναι σταθεροί αριθμοί. Αν ένα τουλάχιστον από τα δύο είναι μεταβλητή τότε παριστάνει συνάρτηση.

2. Η $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ είναι συνάρτηση ως προς x και όχι ως προς t .

Δεν πρέπει να συνδέουμε τη μεταβλητή ολοκλήρωσης με τη

μεταβλητή της συνάρτησης. Δηλαδή $F(x) = \int_a^x f(t)dt = \int_a^x f(u)du$.

ΘΕΩΡΗΜΑ (Θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού)

Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα $[a, \beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[a, \beta]$, τότε
$$\int_a^\beta f(t)dt = G(\beta) - G(a)$$

Παρατηρήσεις

1. Η διαφορά $G(\beta) - G(a)$ συμβολίζεται με $[G(x)]_a^\beta$
2. Το $\int_a^\beta f(t)dt$ είναι ανεξάρτητο από τη παράγουσα G . Πράγματι αν H μια άλλη παράγουσα της f τότε $H(x) = G(x) + c$ οπότε $H(\beta) - H(a) = G(\beta) + c - (G(a) + c) = G(\beta) - G(a)$

3. Το θεώρημα αυτό δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί σαν ορισμός του ορισμένου ολοκληρώματος

4. Προσέξτε τη διαφορά των παρακάτω

- $\int_a^\beta f'(x)dx = [f(x)]_a^\beta = f(\beta) - f(a)$ ενώ $(\int_a^\beta f(t)dt)' = 0$ αφού $\int_a^\beta f(x)dx$

είναι αριθμός. Συνεπώς $(\int_a^\beta f(t)dt)' \neq \int_a^\beta f'(x)dx$

- $\int_a^x f'(t)dt = [f(t)]_a^x = f(x) - f(a)$ ενώ $(\int_a^x f(t)dt)' = f(x)$ οπότε $(\int_a^x f(t)dt)' = \int_a^x f'(t)dt$

Μέθοδοι ολοκλήρωσης

- Μέθοδος ολοκλήρωσης κατά παράγοντες

$$\int_a^\beta f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^\beta - \int_a^\beta f'(x)g(x)dx,$$

όπου f', g' είναι συνεχείς συναρτήσεις στο $[a, \beta]$.

Παρατηρήσεις

1. Η μέθοδος αυτή δεν υπολογίζει ολοκληρώματα. Αναγάγει τον υπολογισμό ενός ολοκληρώματος σε ένα άλλο, οπότε έχει νόημα μόνο όταν το καινούργιο ολοκλήρωμα είναι πιο εύκολο. Εφαρμόζεται σε ολοκληρώματα της μορφής :

$$\int_{\alpha}^{\beta} P(x) \cdot e^{\lambda x} dx, \quad \int_{\alpha}^{\beta} P(x) \cdot \underline{\eta\mu(\alpha x)} dx, \quad \int_{\alpha}^{\beta} P(x) \cdot \underline{\sigma\upsilon\nu(\kappa x)} dx, \quad \int_{\alpha}^{\beta} \underline{P(x)} \cdot \ln(\kappa x) dx$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} \underline{e^{\kappa x}} \cdot \eta\mu(\lambda x) dx, \quad \int_{\alpha}^{\beta} \underline{e^{\kappa x}} \cdot \sigma\upsilon\nu(\lambda x) dx$$

όπου $P(x)$ πολυώνυμο του x και $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}^*$.

Έχουμε υπογραμμίσει τη συνάρτηση που θα θέτουμε σε παράγωγο.

2. Η μέθοδος αυτή μπορεί να εφαρμοστεί διαδοχικά περισσότερες από μία φορές

- Μέθοδος ολοκλήρωσης με αλλαγή μεταβλητής

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(g(x))g'(x)dx = \int_{u_1}^{u_2} f(u)du,$$

όπου f, g' είναι συνεχείς συναρτήσεις, $u = g(x)$, $du = g'(x)dx$
και $u_1 = g(\alpha)$, $u_2 = g(\beta)$.

Ο παραπάνω τύπος χρησιμοποιείται με την προϋπόθεση ότι το ολοκλήρωμα του δευτέρου μέλους υπολογίζεται ευκολότερα.

➤ Ολοκλήρωμα αντίστροφης

Αν f παραγωγίσιμη και 1-1 συνάρτηση στο $[a, \beta]$ τότε θεωρώντας ότι η f^{-1} είναι συνεχής έχουμε:

$$\int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} f^{-1}(x)dx \stackrel{\substack{x=f(t) \\ dx=f'(t)dt}}{=} \int_{\alpha}^{\beta} t \cdot f'(t)dt = [tf(t)]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = \beta f(\beta) - \alpha f(\alpha) - \int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt$$

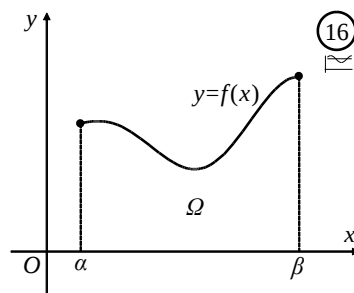
Επομένως αντίστοιχα έχουμε: $\int_{\alpha}^{\beta} f^{-1}(x)dx = \beta f^{-1}(\beta) - \alpha f^{-1}(\alpha) - \int_{f^{-1}(\alpha)}^{f^{-1}(\beta)} f(t)dt$

Με τον τρόπο αυτό αναγάγουμε τον υπολογισμό ενός ολοκληρώματος της αντίστροφης μιας συνάρτησης, στον υπολογισμό του αντίστοιχου ολοκληρώματος της ίδιας της συνάρτησης, πράγμα πολύ χρήσιμο ειδικά όταν δεν είναι εφικτή η εύρεση του τύπου της αντίστροφης.

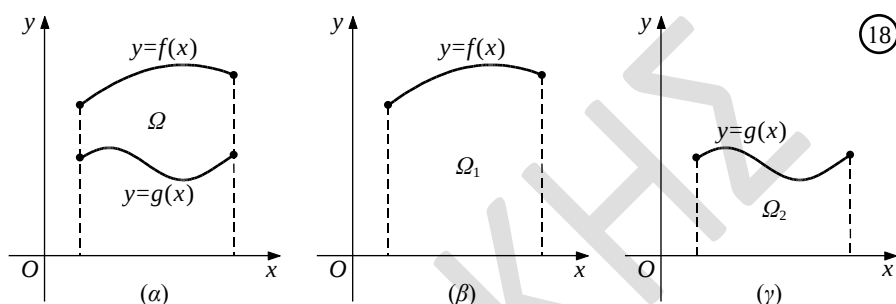
ΕΜΒΑΔΟΝ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΧΩΡΙΟΥ

Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα $[a, \beta]$ και $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$, τότε το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f , τις ευθείες $x=a$, $x=\beta$ και τον άξονα x' (Σχ. 16) είναι

$$E(\Omega) = \int_a^\beta f(x) dx$$



• Έστω, τώρα, δυο συναρτήσεις f και g , συνεχείς στο διάστημα $[a, \beta]$ με $f(x) \geq g(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$ και Ω το χωρίο που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f, g και τις ευθείες $x=a$ και $x=\beta$ (Σχ. 18α).



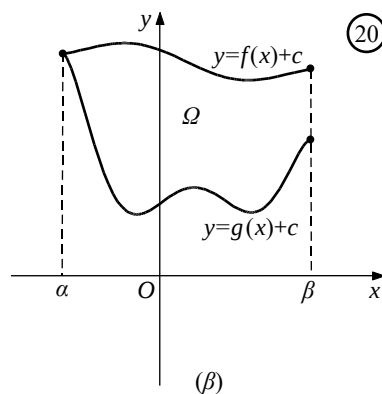
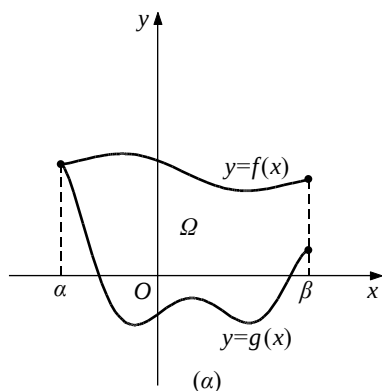
Παρατηρούμε ότι $E(\Omega) = E(\Omega_1) - E(\Omega_2) = \int_a^\beta f(x) dx - \int_a^\beta g(x) dx = \int_a^\beta (f(x) - g(x)) dx$.

Επομένως, $E(\Omega) = \int_a^\beta (f(x) - g(x)) dx$ (1)

• Ο τύπος (1) βρέθηκε με την προϋπόθεση ότι:

(i) $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in [a, \beta]$ και (ii) οι f, g είναι μη αρνητικές στο $[a, \beta]$.

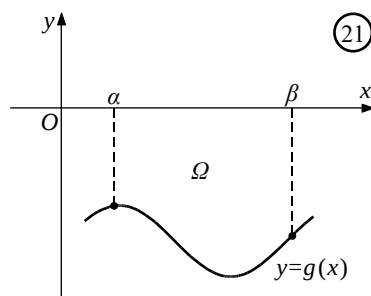
Θα αποδείξουμε, τώρα, ότι ο τύπος (1) ισχύει και χωρίς την υπόθεση (ii). Πράγματι, επειδή οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο $[a, \beta]$, θα υπάρχει αριθμός $c \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε $f(x) + c \geq g(x) + c \geq 0$, για κάθε $x \in [a, \beta]$. Είναι φανερό ότι το χωρίο Ω (Σχ. 20α) έχει το ίδιο εμβαδόν με το χωρίο Ω' (Σχ. 20β).



Επομένως, σύμφωνα με τον τύπο (1), έχουμε:

$$E(\Omega) = E(\Omega') = \int_a^\beta [(f(x) + c) - (g(x) + c)] dx = \int_a^\beta (f(x) - g(x)) dx. \text{ Άρα, } E(\Omega) = \int_a^\beta (f(x) - g(x)) dx$$

• Με τη βοήθεια του προηγούμενου τύπου μπορούμε να υπολογίσουμε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τον άξονα $x'x$, τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης g , με $g(x) \leq 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$ και τις ευθείες $x=a$ και $x=\beta$ (Σχ. 21). Πράγματι, επειδή ο άξονας $x'x$ είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=0$, έχουμε

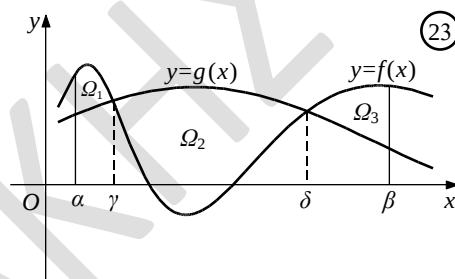


$$E(\Omega) = \int_a^\beta (f(x) - g(x)) dx = \int_a^\beta [-g(x)] dx = -\int_a^\beta g(x) dx.$$

Επομένως, αν για μια συνάρτηση g ισχύει $g(x) \leq 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$, τότε

$$E(\Omega) = -\int_a^\beta g(x) dx$$

• Όταν η διαφορά $f(x) - g(x)$ δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[a, \beta]$, όπως στο Σχήμα 23, τότε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f, g και τις ευθείες $x=a$ και $x=\beta$ είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων Ω_1, Ω_2 και Ω_3 . Δηλαδή,

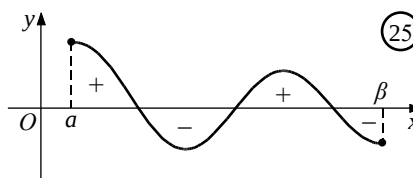


$$\begin{aligned} E(\Omega) &= E(\Omega_1) + E(\Omega_2) + E(\Omega_3) = \int_a^\gamma (f(x) - g(x)) dx + \int_\gamma^\delta (g(x) - f(x)) dx + \int_\delta^\beta (f(x) - g(x)) dx \\ &= \int_a^\gamma |f(x) - g(x)| dx + \int_\gamma^\delta |f(x) - g(x)| dx + \int_\delta^\beta |f(x) - g(x)| dx = \int_a^\beta |f(x) - g(x)| dx \end{aligned}$$

Επομένως,
$$E(\Omega) = \int_a^\beta |f(x) - g(x)| dx$$

ΣΧΟΛΙΟ

Σύμφωνα με τα παραπάνω το $\int_a^\beta f(x) dx$ είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται πάνω από τον άξονα $x'x$ μείον το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται κάτω από τον άξονα $x'x$ (Σχ. 25)



Παρατηρήσεις

1. Αν ζητείται το εμβαδόν που περικλείεται μεταξύ της C_f και του $\chi\chi'$, τότε σαν άκρα ολοκλήρωσης παίρνουμε τη μικρότερη και τη μεγαλύτερη ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$
2. Αν ζητείται το εμβαδόν που περικλείεται από τις C_f , C_g τότε σαν άκρα ολοκλήρωσης παίρνουμε τη μικρότερη και τη μεγαλύτερη ρίζα της εξίσωσης $f(x)=g(x)$
3. Αν ζητείται το εμβαδόν που περικλείεται μεταξύ της C_f του $\chi\chi'$ και της ευθείας $\chi=\kappa$, τότε το χωρίο ορίζεται όταν το κ είναι μεγαλύτερο ή ίσον της μεγαλύτερης ρίζας της εξίσωσης $f(x)=0$ ή μικρότερο ή ίσον της μικρότερης της εξίσωσης $f(x)=0$. Σαν άκρα ολοκλήρωσης παίρνουμε το κ και την πιο μακρινή από το κ ρίζα.
4. Αν ζητείται το εμβαδόν που περικλείεται από τις C_f , C_g και της ευθείας $\chi=\kappa$, τότε το χωρίο ορίζεται όταν το κ είναι μεγαλύτερο ή ίσον της μεγαλύτερης ρίζας της εξίσωσης $f(x)=g(x)$ ή μικρότερο ή ίσον της μικρότερης της εξίσωσης $f(x)=g(x)$. Σαν άκρα ολοκλήρωσης παίρνουμε το κ και πιο μακρινή από το κ ρίζα.
5. Όταν θέλουμε να βρούμε το εμβαδόν που περικλείεται μεταξύ της C_f , του $\chi\chi'$ και των ευθειών $\chi=\alpha$ και $\chi=\beta$, τότε

- Αποδεικνύουμε ότι είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$
- Λύνουμε την εξίσωση $f(x)=0$
- Αν βγει αδύνατη τότε η f διατηρεί πρόσημο που το βρίσκουμε, βρίσκοντας μια τιμή της f και αν $f(x)>0$ τότε

$$E = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \quad \text{ενώ αν } f(x) < 0 \text{ τότε} \quad E = \int_{\alpha}^{\beta} -f(x) dx$$

- Αν έχει ρίζες $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$ τότε πρέπει να προσδιορίσουμε το πρόσημο της f σε καθένα από τα διαστήματα που ορίζουν οι

$$\text{ρίζες της και} \quad E = \int_{\alpha}^{\rho_1} |f(x)| dx + \int_{\rho_1}^{\rho_2} |f(x)| dx + \dots + \int_{\rho_n}^{\beta} |f(x)| dx$$

6. Αντίστοιχη διαδικασία όταν θέλουμε να βρούμε το εμβαδόν που περικλείεται μεταξύ της C_f , της C_g και των ευθειών $\chi=\alpha$ και $\chi=\beta$, μόνο που η εξίσωση $f(x)=0$ αντικαθίσταται από τη $f(x)=g(x)$

$$\kappa\alpha\iota \quad E = \int_{\alpha}^{\beta} |f(x) - g(x)| dx \quad \eta$$

$$E = \int_{\alpha}^{\rho_1} |f(x) - g(x)| dx + \int_{\rho_1}^{\rho_2} |f(x) - g(x)| dx + \dots + \int_{\rho_v}^{\beta} |f(x) - g(x)| dx$$

ΑΕΡΑΚΗ