

Συναρτήσεις

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω A ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Ονομάζουμε **πραγματική συνάρτηση** με **πεδίο ορισμού το A** μια διαδικασία (κανόνα) f , με την οποία κάθε στοιχείο $x \in A$ αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο πραγματικό αριθμό y . Το y ονομάζεται **τιμή της f στο x** και συμβολίζεται με $f(x)$.

Για να εκφράσουμε τη διαδικασία αυτή, γράφουμε: $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $x \rightarrow f(x)$.

- Το γράμμα x , που παριστάνει οποιοδήποτε στοιχείο του A λέγεται **ανεξάρτητη μεταβλητή**, ενώ το γράμμα y , που παριστάνει την τιμή της f στο x , λέγεται **εξαρτημένη μεταβλητή**.
- Το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f συνήθως συμβολίζεται με D_f .
- Το σύνολο που έχει για στοιχεία του τις τιμές της f σε όλα τα $x \in A$, λέγεται **σύνολο τιμών** της f και συμβολίζεται με $f(A)$. Είναι δηλαδή:

$$f(A) = \{y \mid y = f(x) \text{ για κάποιο } x \in A\}.$$

Γενικά αν έχουμε μια συνάρτηση f από ένα σύνολο A σε ένα σύνολο B γράφουμε $f : A \rightarrow B$ και $x \rightarrow f(x)$

- Το σύνολο A λέγεται **πεδίο ορισμού**.
- Το σύνολο B λέγεται **σύνολο αφίξεως**.
- Το σύνολο που αποτελείται από όλα τα στοιχεία του B τα οποία αποτελούν και τιμή της συνάρτησης f συμβολίζεται με $f(A)$ και λέγεται **σύνολο τιμών**.

$$f(A) = \{ \psi \in B \mid \text{υπάρχει } \chi \in A \text{ με } f(\chi) = \psi \} \quad \text{και} \quad f(A) \subseteq B$$

ΠΡΟΣΟΧΗ

Στα επόμενα και σε όλη την έκταση του βιβλίου :

- Θα ασχοληθούμε μόνο με συναρτήσεις που έχουν πεδίο ορισμού **διάστημα ή ένωση διαστημάτων**.
- Όταν θα λέμε ότι “**Η συνάρτηση f είναι ορισμένη σ’ ένα σύνολο B** ”, θα εννοούμε ότι το B είναι υποσύνολο του πεδίου ορισμού της. Στην περίπτωση αυτή με $f(B)$ θα συμβολίζουμε το σύνολο των τιμών της f σε κάθε $x \in B$. Είναι δηλαδή: $f(B) = \{y \mid y = f(x) \text{ για κάποιο } x \in B\}$.

Συντομογραφία συνάρτησης

Είδαμε παραπάνω ότι για να οριστεί μια συνάρτηση, f αρκεί να δοθούν δύο στοιχεία:

- το πεδίο ορισμού της και
- η τιμή της, $f(x)$, για κάθε x του πεδίου ορισμού της.

Συνήθως, όμως, αναφερόμαστε σε μια συνάρτηση f δίνοντας μόνο τον τύπο με τον οποίο εκφράζεται το $f(x)$. Σε μια τέτοια περίπτωση θα θεωρούμε συμβατικά ότι το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο όλων των πραγματικών αριθμών x , για τους οποίους το $f(x)$ έχει νόημα.

Έτσι λοιπόν αν θέλουμε να βρούμε το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης, παίρνουμε όλους τους περιορισμούς που προκύπτουν από τον τύπο της συνάρτησης, εξαιρούμε τις τιμές αυτές και έτσι πεδίο ορισμού είναι όλο το $\mathbb{R}$ εκτός από τις τιμές που εξαιρέσαμε.

Θυμίζουμε ότι περιορισμοί για τον τύπο μιας συνάρτησης έχουμε στις παρακάτω περιπτώσεις:

1. Ο παρονομαστής ενός κλάσματος δεν μπορεί να γίνει 0.
2. Η ποσότητα που είναι κάτω από μια ρίζα δεν μπορεί να είναι αρνητική.
3. Όταν έχουμε μια δύναμη

Ερώτηση : Για ποιες τιμές του x ορίζεται η δύναμη x^a ;	
Απάντηση: εξαρτάται από το a	
Αν $a \in \mathbb{N}^*$ φυσικοί χωρίς το 0	Τότε $x \in \mathbb{R}$
Αν $a \in \mathbb{Z}$ ακέραιοι	Τότε $x \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$
Αν $a \in \mathbb{Q}$ ρητοί	Τότε $x \in (0, +\infty)$
Αν $a \in \mathbb{Q}^+$ θετικοί ρητοί	Τότε $x \in [0, +\infty)$
Αν $a \in \mathbb{R}$ πραγματικοί	Τότε $x \in (0, +\infty)$
Αν $a \in \mathbb{R}^+$ θετικοί πραγματικοί	Τότε $x \in [0, +\infty)$

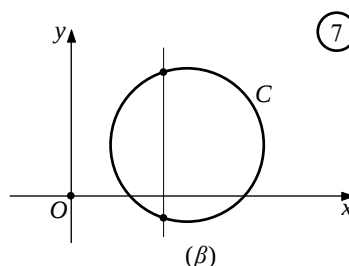
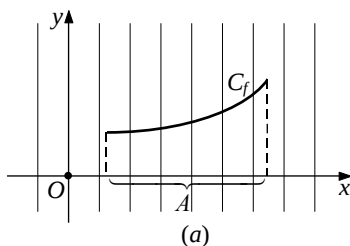
4. Όταν έχουμε λογάριθμο πρέπει η βάση να είναι θετική και διαφορετική του 1 και η ποσότητα μέσα στον λογάριθμο να είναι θετική.

Γραφική παράσταση συνάρτησης

Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού A και Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο. Το σύνολο των σημείων $M(x, y)$ για τα οποία ισχύει $y = f(x)$, δηλαδή το σύνολο των σημείων $M(x, f(x))$, $x \in A$, λέγεται **γραφική παράσταση** της f και συμβολίζεται συνήθως με C_f . Η εξίσωση, λοιπόν, $y = f(x)$ επαληθεύεται μόνο από τα σημεία της C_f . Επομένως, η $y = f(x)$ είναι η εξίσωση της γραφικής παράστασης της f .

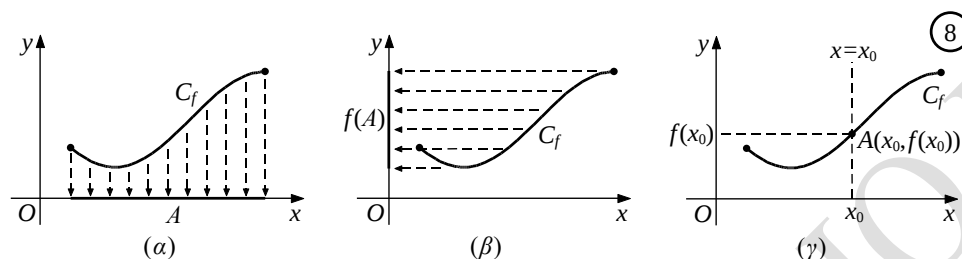
Επειδή κάθε $x \in A$ αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο $y \in \mathbb{R}$, δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της f με την ίδια τετμημένη. Αυτό σημαίνει ότι κάθε κατακόρυφη ευθεία έχει με τη γραφική παράσταση της f το πολύ ένα κοινό σημείο (Σχ. 7α).

Έτσι, ο κύκλος δεν αποτελεί γραφική παράσταση συνάρτησης (Σχ. 7β).



Όταν δίνεται η γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης f , τότε:

- Το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο A των τετμημένων των σημείων της C_f .
- Το σύνολο τιμών της f είναι το σύνολο $f(A)$ των τεταγμένων των σημείων της C_f .
- Η τιμή της f στο $x_0 \in A$ είναι η τεταγμένη του σημείου τομής της ευθείας $x = x_0$ και της C_f (Σχ. 8).



- Εύρεση σημείων τομής μιας γραφικής παράστασης με τους άξονες.

Το 1^ο πράγμα που κάνουμε είναι να βρούμε το πεδίο ορισμού.

Για να βρούμε που τέμνει το $\psi\psi'$ βάζουμε στον τύπο της συνάρτησης όπου $x = 0$ και βρίσκουμε το $f(0)$. Επομένως το ζητούμενο σημείο θα έχει συντεταγμένες $(0, f(0))$.

Αν το 0 δεν ανήκει στο Π.Ο. τότε δεν τέμνει τον άξονα $\psi\psi'$. Μια γραφική παράσταση δεν μπορεί να τέμνει τον άξονα $\psi\psi'$ (όπως και κάθε άλλη κατακόρυφη γραμμή) σε παραπάνω από ένα σημεία. Για να βρούμε που τέμνει το $\chi\chi'$ λύνουμε την εξίσωση $f(x) = 0$.

Οι λύσεις της εξίσωσης είναι και οι τετμημένες των ζητούμενων σημείων και οι τεταγμένες τους φυσικά 0. Όσο είναι το πλήθος των λύσεων που θα έχει η εξίσωση θα είναι και το πλήθος των σημείων τομής με τον άξονα $\chi\chi'$.

(τώρα σε αντίθεση με πριν μπορεί να έχω και παραπάνω από ένα σημεία, ακόμα και άπειρα). Αν η εξίσωση είναι αδύνατη τότε δεν τέμνει τον άξονα $\chi\chi'$.

Αν κάποιες από τις λύσεις της εξίσωσης δεν ανήκουν στο πεδίο ορισμού, απορρίπτονται.

- Σχετική θέση της γραφικής παράστασης με τον $\chi\chi'$

Τα διαστήματα του x για τα οποία η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης είναι πάνω από τον $\chi\chi'$, είναι οι λύσεις της ανίσωσης $f(x) > 0$. Αντίστοιχα κάτω από τον $\chi\chi'$ της ανίσωσης $f(x) < 0$.

3ο ΠΡΟΤΥΠΟ ΛΥΚΕΙΟ ΙΛΙΟΥ

- Εύρεση σημείων τομής δύο γραφικών παραστάσεων

Έστω $f(x)$, $g(x)$ δύο συναρτήσεις των οποίων αναζητούμε τα κοινά σημεία των γραφικών τους παραστάσεων .

1. Βρίσκουμε τα πεδία ορισμού των $f(x)$, $g(x)$.
2. Οι λύσεις της εξίσωσης $f(x) = g(x)$ θα είναι οι τετμημένες των σημείων τομής που μπορεί να είναι παραπάνω από ένα .
3. Για να βρούμε και τις αντίστοιχες τεταγμένες θα αντικαταστήσουμε τις τιμές που βρήκαμε από την εξίσωση σε μια από τις f , g .
4. Το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης είναι και το πλήθος των σημείων τομής .
5. Αν η εξίσωση είναι αδύνατη τότε οι γραφικές παραστάσεις δεν τέμνονται .
6. Αν η εξίσωση είναι αόριστη τότε οι δύο γραφικές παραστάσεις ταυτίζονται .
7. Αν κάποια από τις λύσεις της εξίσωσης δεν ανήκει σε ένα από τα πεδία ορισμού , απορρίπτεται .

- Σχετική θέση των γραφικών παραστάσεων δύο συναρτήσεων

Τα διαστήματα του x για τα οποία η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f είναι πάνω από τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης g , είναι οι λύσεις της ανίσωσης $f(x) > g(x)$. Αντίστοιχα κάτω της ανίσωσης $f(x) < g(x)$

Συμμετρίες της γραφικής παράστασης

- Άρτια - Περιττή συνάρτηση

Μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού A λέγεται άρτια αν και μόνο αν για κάθε $x \in A$ και $-x \in A$ και $f(-x) = f(x)$ Η γραφική παράσταση μιας άρτιας συνάρτησης έχει άξονα συμμετρίας τον $\psi\psi$.

Μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού A λέγεται περιττή αν και μόνο αν για κάθε $x \in A$ και $-x \in A$ και $f(-x) = -f(x)$ Η γραφική παράσταση μιας περιττής συνάρτησης έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων .

Αν μία συνάρτηση είναι περιττή f και το 0 ανήκει στο πεδίο ορισμού της , τότε $f(0) = 0$.

Πράγματι αφού $f(-x) = -f(x)$ αν βάλουμε όπου $x = 0$ έχουμε $f(-0) = -f(0) \Rightarrow 2f(0) = 0 \Rightarrow f(0) = 0$

Μετατοπίσεις γραφικής παράστασης

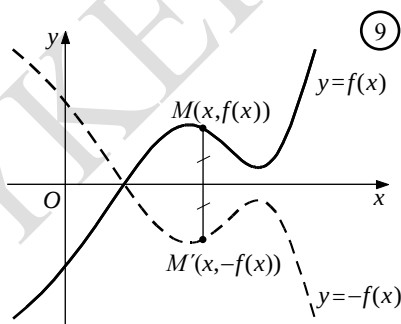
- Δίνεται μια συνάρτηση $f(x)$.

Η γραφική παράσταση της $\varphi(x) = f(x - a)$ προκύπτει από μια οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της $f(x)$ κατά a μονάδες προς τα δεξιά αν $a > 0$ ή προς τα αριστερά αν $a < 0$.

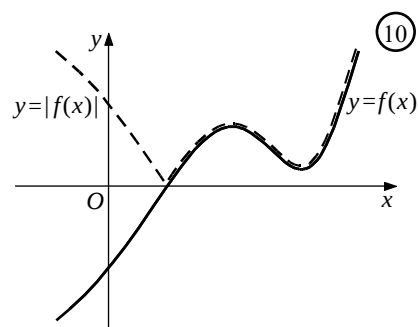
Η γραφική παράσταση της $\varphi(x) = f(x) + a$ προκύπτει από μια κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της $f(x)$ κατά a μονάδες προς τα πάνω αν $a > 0$ ή προς τα κάτω αν $a < 0$.

- Όταν δίνεται η γραφική παράσταση C_f , μιας συνάρτησης f μπορούμε, επίσης, να σχεδιάσουμε και τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $-f$ και $|f|$.

α) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $-f$ είναι συμμετρική, ως προς τον άξονα $x'x$, της γραφικής παράστασης της f , γιατί αποτελείται από τα σημεία $M'(x, -f(x))$ που είναι συμμετρικά των $M(x, f(x))$, ως προς τον άξονα $x'x$. (Σχ. 9).



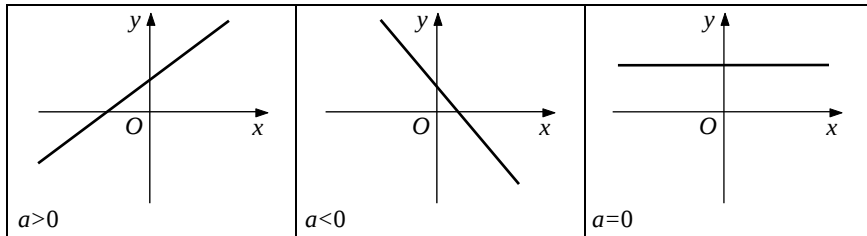
β) Η γραφική παράσταση της $|f|$ αποτελείται από τα τμήματα της C_f που βρίσκονται πάνω από τον άξονα $x'x$ και από τα συμμετρικά, ως προς τον άξονα $x'x$, των τμημάτων της C_f που βρίσκονται κάτω από τον άξονα αυτόν. (Σχ. 10).



Μερικές βασικές συναρτήσεις

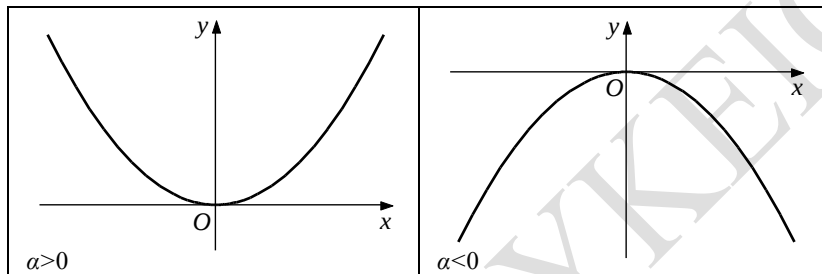
Η πολυωνυμική συνάρτηση $f(x) = ax + \beta$

⑪



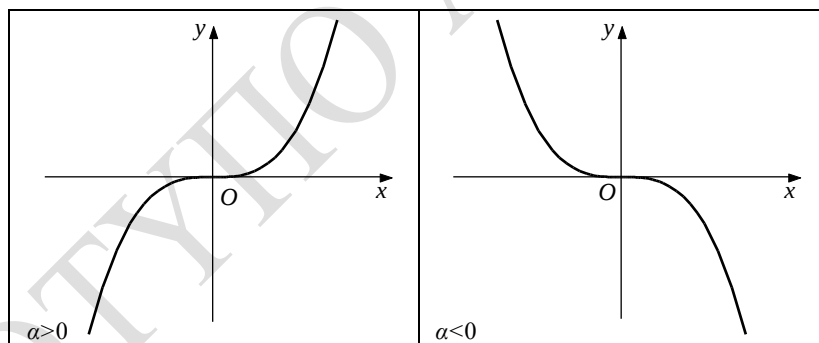
Η πολυωνυμική συνάρτηση $f(x) = ax^2$, $a \neq 0$.

⑫



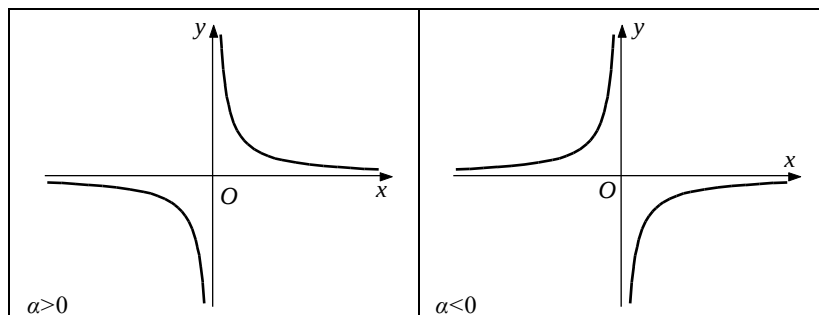
Η πολυωνυμική συνάρτηση $f(x) = ax^3$, $a \neq 0$.

⑬

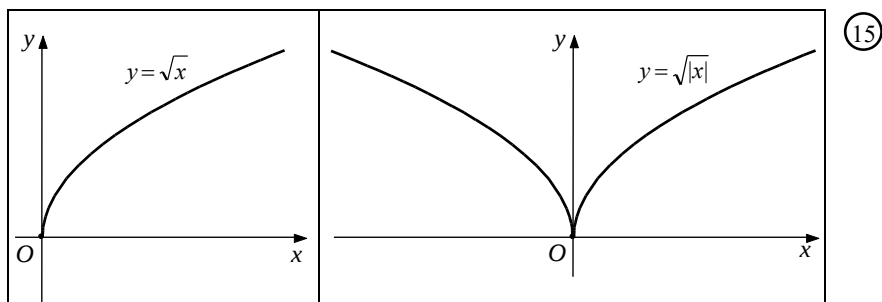


Η ρητή συνάρτηση $f(x) = \frac{a}{x}$, $a \neq 0$.

⑭



Οι συναρτήσεις $f(x)=\sqrt{x}$, $g(x)=\sqrt{|x|}$.

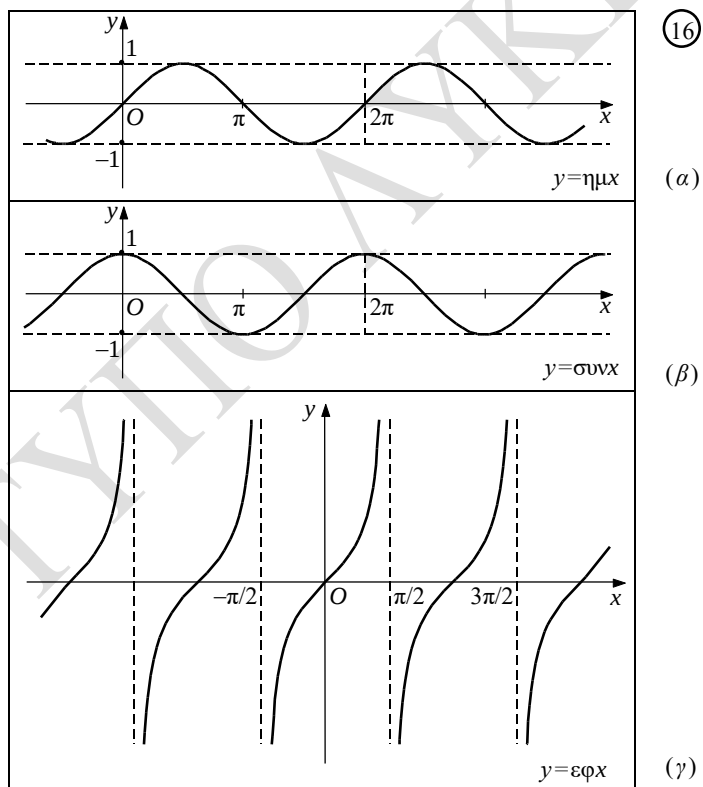


(15)

Επειδή $g(x)=\begin{cases} \sqrt{-x}, & x < 0 \\ \sqrt{x}, & x \geq 0 \end{cases}$, η γραφική παράσταση της $y=\sqrt{|x|}$ αποτελείται από

δύο κλάδους. Ο ένας είναι η γραφική παράσταση της $y=\sqrt{x}$ και ο άλλος η συμμετρική της ως προς τον άξονα $y'y$.

Οι τριγωνικές συναρτήσεις : $f(x)=\eta\mu x$, $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$, $f(x)=\epsilon\phi x$



(16)

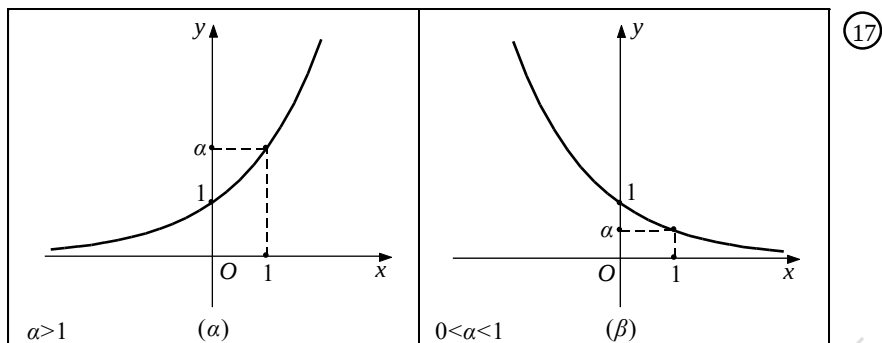
(α)

(β)

(γ)

Υπενθυμίζουμε ότι, οι συναρτήσεις $f(x)=\eta\mu x$ και $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$ είναι περιοδικές με περίοδο $T=2\pi$, ενώ η συνάρτηση $f(x)=\epsilon\phi x$ είναι περιοδική με περίοδο $T=\pi$.

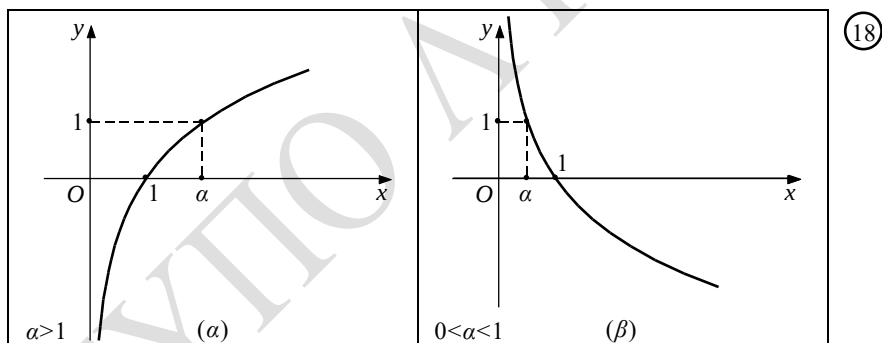
Η εκθετική συνάρτηση $f(x) = a^x$, $0 < a \neq 1$.



Υπενθυμίζουμε ότι:

αν $a > 1$, τότε: $a^{x_1} < a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 < x_2$
 ενώ
 αν $0 < a < 1$, τότε: $a^{x_1} < a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 > x_2$.

Η λογαριθμική συνάρτηση $f(x) = \log_a x$, $0 < a \neq 1$



Υπενθυμίζουμε ότι:

- 1) $\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$
- 2) $\log_a a^x = x$ και $a^{\log_a x} = x$
- 3) $\log_a a = 1$ και $\log_a 1 = 0$
- 4) $\log_a (x_1 x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$
- 5) $\log_a \left(\frac{x_1}{x_2} \right) = \log_a x_1 - \log_a x_2$
- 6) $\log_a x_1^k = k \log_a x_1$
- 7) αν $a > 1$, τότε: $\log_a x_1 < \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 < x_2$ ενώ
 αν $0 < a < 1$, τότε: $\log_a x_1 < \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 > x_2$.
- 8) $a^x = e^{x \ln a}$, αφού $a = e^{\ln a}$.

Οι παραπάνω τύποι ισχύουν με την προϋπόθεση ότι τα χρησιμοποιούμενα σύμβολα έχουν νόημα.

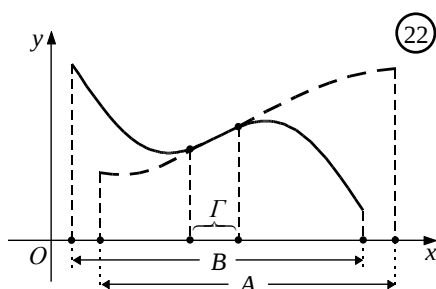
ΟΡΙΣΜΟΣ

Δύο συναρτήσεις f και g λέγονται **ίσες** όταν:

- έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού A και
- για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) = g(x)$.

Για να δηλώσουμε ότι δύο συναρτήσεις f και g είναι ίσες γράφουμε $f = g$.

Έστω τώρα f, g δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού A, B αντιστοίχως και Γ ένα υποσύνολο των A και B . Αν για κάθε $x \in \Gamma$ ισχύει $f(x) = g(x)$, τότε λέμε ότι οι συναρτήσεις f και g είναι **ίσες στο σύνολο Γ** . (Σχ. 22)



Πράξεις με συναρτήσεις

Ορίζουμε ως **άθροισμα** $f+g$, **διαφορά** $f-g$, **γινόμενο** fg και **πηλίκο** $\frac{f}{g}$ δύο συναρτήσεων f, g τις συναρτήσεις με τύπους

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad , \quad (f-g)(x) = f(x) - g(x) \quad , \quad (fg)(x) = f(x)g(x) \quad , \quad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

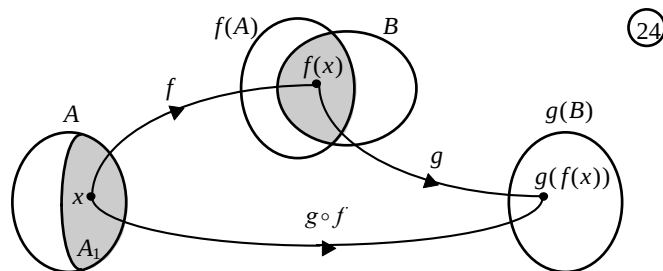
Το πεδίο ορισμού των $f+g$, $f-g$ και fg είναι η τομή $A \cap B$ των πεδίων ορισμού A και B των συναρτήσεων f και g αντιστοίχως, ενώ το πεδίο ορισμού της $\frac{f}{g}$ είναι το $A \cap B$, εξαιρουμένων των τιμών του x που μηδενίζουν τον παρονομαστή $g(x)$, δηλαδή το σύνολο $\{x | x \in A \text{ και } x \in B, \text{ με } g(x) \neq 0\}$.

Σύνθεση συναρτήσεων

ΟΡΙΣΜΟΣ

Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού A, B αντιστοίχως, τότε ονομάζουμε **σύνθεση της f με την g** , και τη συμβολίζουμε με $g \circ f$, τη συνάρτηση με τύπο

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$



Το πεδίο ορισμού της $g \circ f$ αποτελείται από όλα τα στοιχεία x του πεδίου ορισμού της f για τα οποία το $f(x)$ ανήκει στο πεδίο ορισμού της g . Δηλαδή είναι το σύνολο

$$A_1 = \{x \in A \mid f(x) \in B\}.$$

Είναι φανερό ότι η $g \circ f$ ορίζεται αν $A_1 \neq \emptyset$, δηλαδή αν $f(A) \cap B \neq \emptyset$.

ΠΡΟΣΟΧΗ

Στη συνέχεια και σε όλη την έκταση του βιβλίου, θα ασχοληθούμε μόνο με συναρτήσεις που οι συνθέσεις τους έχουν πεδίο ορισμού **διάστημα** ή **ένωση διαστημάτων**.

ΣΧΟΛΙΑ

- Στην παραπάνω εφαρμογή παρατηρούμε ότι $g \circ f \neq f \circ g$. Γενικά, αν f, g είναι δύο συναρτήσεις και ορίζονται οι $g \circ f$ και $f \circ g$, τότε αυτές δεν είναι υποχρεωτικά ίσες.
- Αν f, g, h είναι τρεις συναρτήσεις και ορίζεται η $h \circ (g \circ f)$, τότε ορίζεται και η $(h \circ g) \circ f$ και ισχύει $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$. Τη συνάρτηση αυτή τη λέμε σύνθεση των f, g και h και τη συμβολίζουμε με $h \circ g \circ f$. Η σύνθεση συναρτήσεων γενικεύεται και για περισσότερες από τρεις συναρτήσεις.

Παρατηρήσεις

1. Αν $D_g = \mathbb{R}$ τότε $D_{g \circ f} = D_f$

Πράγματι $D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in D_f \mid f(x) \in \mathbb{R}\} = \{x \in D_f\} = D_f$

2. Ομοίως αν $f(D_f) \subseteq D_g$ τότε $D_{g \circ f} = D_f$.

3. Αν $x_1 = x_2$ τότε από τον ορισμό της συνάρτησης (σε κάθε x ένα και μόνο ψ) έχουμε ότι $f(x_1) = f(x_2)$
Αν όμως $f(x_1) = f(x_2)$ τότε **δεν** είναι απαραίτητο ότι $x_1 = x_2$
Αν όμως $f(x_1) \neq f(x_2)$ τότε σίγουρα $x_1 \neq x_2$

4. Αν $f(x_1) = f(x_2)$ τότε **δεν** είναι απαραίτητο ότι $f(f(x_1)) = f(f(x_2))$ γιατί μπορεί τα $f(f(x_1)), f(f(x_2))$ να μην ορίζονται
Αν όμως $f(x_1) = f(x_2)$ και $f(x_1), f(x_2) \in D_f$ τότε σίγουρα είναι και $f(f(x_1)) = f(f(x_2))$

5. Έστω ότι έχουμε μια συνάρτηση $f : A \rightarrow B$ με σύνολο τιμών $f(A) = \{ \psi \in B \mid \text{υπάρχει } \chi \in A \text{ με } f(\chi) = \psi \}$

- αν $f(A) \subseteq A$ τότε $f(f(x))$ έχει νόημα για κάθε $x \in A$
- αν $\psi_0 \in f(A)$ τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\chi_0 \in A$ με $f(\chi_0) = \psi_0$
- αν $\psi_0 \in f(A)$ τότε η εξίσωση $f(\chi) = \psi_0$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο A
- αν $0 \in f(A)$ τότε η εξίσωση $f(\chi) = 0$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο A
δηλαδή η γραφική παράσταση της f τέμνει τουλάχιστον μία φορά τον $\chi\chi'$

5. Έστω οι συναρτήσεις f, g ορισμένες στο A .

Αν για κάθε $x \in A$ ισχύει ότι $f(x) \cdot g(x) = 0$ τότε δεν είναι απαραίτητο ότι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in A$ ή $g(x) = 0$ για κάθε $x \in A$

Μπορεί π.χ. να είναι $f(x) = \begin{cases} 0 & , x \leq x_0 \\ 1 & , x > x_0 \end{cases}$ και $g(x) = \begin{cases} 5 & , x \leq x_0 \\ 0 & , x > x_0 \end{cases}$ για κάποιο

$x_0 \in A$ οπότε ισχύει ότι $f(x) \cdot g(x) = 0$ για κάθε $x \in A$ χωρίς όμως να ισχύει $f(x) = 0$ για κάθε $x \in A$ ή $g(x) = 0$ για κάθε $x \in A$

Προσοχή : Αν $f(x_1) \cdot g(x_1) = 0$ τότε υποχρεωτικά $f(x_1) = 0$ ή $g(x_1) = 0$ διότι τα $f(x_1), g(x_1)$ είναι συγκεκριμένοι πραγματικοί αριθμοί, σε αντίθεση με τα $f(x), g(x)$ που είναι συναρτήσεις και κατ'ουσία αντιπροσωπεύουν σύνολα τιμών

6. Έστω οι συναρτήσεις f, g ορισμένες στο A .

Αν για κάθε $x \in A$ ισχύει ότι $f^2(x) = g^2(x)$ τότε δεν είναι απαραίτητο ότι $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in A$ ή $f(x) = -g(x)$ για κάθε $x \in A$

Μπορεί π.χ. να είναι $f(x) = \begin{cases} g(x) & , x \leq x_0 \\ -g(x) & , x > x_0 \end{cases}$ για κάποιο $x_0 \in A$ οπότε ισχύει

ότι $f^2(x) = g^2(x)$ για κάθε $x \in A$ χωρίς όμως να ισχύει $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in A$ ή $f(x) = -g(x)$ για κάθε $x \in A$

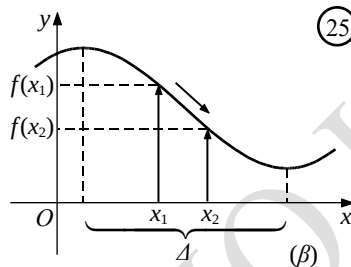
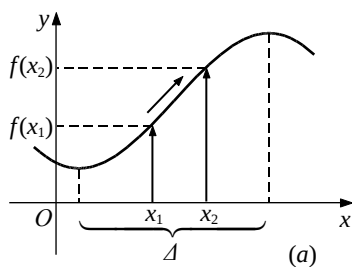
Προσοχή : Αν $f^2(x_1) = g^2(x_1)$ τότε υποχρεωτικά $f(x_1) = g(x_1)$ ή $f(x_1) = -g(x_1)$ διότι τα $f(x_1), g(x_1)$ είναι συγκεκριμένοι πραγματικοί αριθμοί

Μονοτονία συνάρτησης

ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια συνάρτηση f λέγεται⁽¹⁾ :

- **γνησίως αύξουσα** σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει: $f(x_1) < f(x_2)$ (Σχ. α)
- **γνησίως φθίνουσα** σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει: $f(x_1) > f(x_2)$ (Σχ. β)

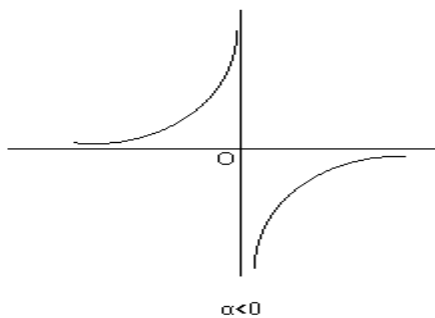
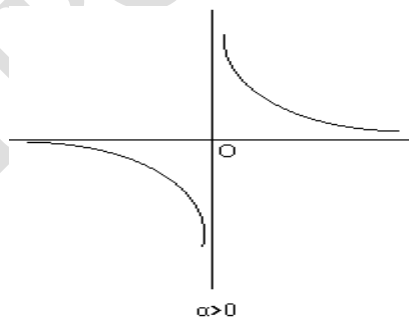


Για να δηλώσουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα (αντιστοίχως γνησίως φθίνουσα) σε ένα διάστημα Δ , γράφουμε $f \uparrow \Delta$ (αντιστοίχως $f \downarrow \Delta$).

1. Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, τότε λέμε ότι η f είναι **γνησίως μονότονη στο Δ** . Στην περίπτωση που το πεδίο ορισμού της f είναι ένα διάστημα Δ και η f είναι γνησίως μονότονη σ' αυτό, τότε θα λέμε, απλώς, ότι η f είναι γνησίως μονότονη.
2. Υπάρχουν συναρτήσεις που σε κάποιο διάστημα του Π.Ο. είναι γνησίως αύξουσες και σε άλλο γνησίως φθίνουσες. Αυτές φυσικά δεν είναι γνησίως μονότονες.
3. Τη μονοτονία μιας συνάρτησης τη μελετάμε σε διαστήματα και όχι σε ενώσεις διαστημάτων. Αν μία συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού ένωση διαστημάτων τότε μελετάμε τη μονοτονία σε κάθε διάστημα ξεχωριστά.

Π.χ. η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha}{x}$, $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ η οποία :

- Αν $\alpha > 0$ είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$
- Αν $\alpha < 0$ είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$



⁽¹⁾ Μια συνάρτηση f λέγεται, απλώς, :

- **αύξουσα** σ' ένα διάστημα Δ , όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) \leq f(x_2)$.
- **φθίνουσα** σ' ένα διάστημα Δ , όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) \geq f(x_2)$.

1. Αν η f είναι γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα Δ τότε :

- η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία το πολύ ρίζα στο Δ και άρα η γραφική της παράσταση τέμνει μία το πολύ φορά το $\chi\chi'$ (αν επιπλέον ξέρουμε ότι $0 \in f(A)$ τότε τέμνει ακριβώς μια φορά το $\chi\chi'$)
- η εξίσωση $f(x) = \kappa$ έχει μία το πολύ ρίζα στο Δ και άρα η γραφική της παράσταση τέμνει μία το πολύ φορά την ευθεία $\psi = \kappa$ (αν επιπλέον ξέρουμε ότι $\kappa \in f(A)$ τότε τέμνει ακριβώς μια φορά την ευθεία $\psi = \kappa$)
- αν επιπλέον βρούμε κάποια $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ για τα οποία να ισχύει ότι $f(x_1) < f(x_2)$ τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ
(προσοχή αν δεν έχουμε το δεδομένο ότι η f είναι γνησίως μονότονη, δεν αρκεί να το δείξουμε για κάποια $x_1, x_2 \in \Delta$, αλλά για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$)
- αν επιπλέον βρούμε κάποια $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ για τα οποία να ισχύει ότι $f(x_1) > f(x_2)$ τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ
(προσοχή αν δεν έχουμε το δεδομένο ότι η f είναι γνησίως μονότονη, δεν αρκεί να το δείξουμε για κάποια $x_1, x_2 \in \Delta$, αλλά για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$)
- Αν δύο συναρτήσεις έχουν το ίδιο είδος μονοτονίας και ορίζεται η σύνθεσή τους, τότε αυτή θα είναι γνησίως αύξουσα (ανεξάρτητα από το πιο είδος μονοτονίας έχουν οι αυτές συναρτήσεις)
- Αν δύο συναρτήσεις έχουν διαφορετικό είδος μονοτονίας και ορίζεται η σύνθεσή τους, τότε αυτή θα είναι γνησίως φθίνουσα

Ακρότατα συνάρτησης

ΟΡΙΣΜΟΣ

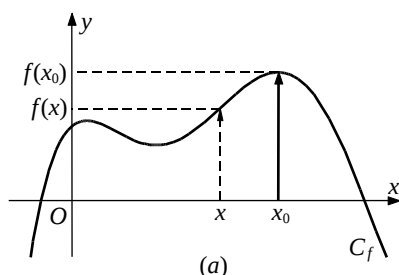
Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A θα λέμε ότι:

- Παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) **μέγιστο**, το $f(x_0)$, όταν

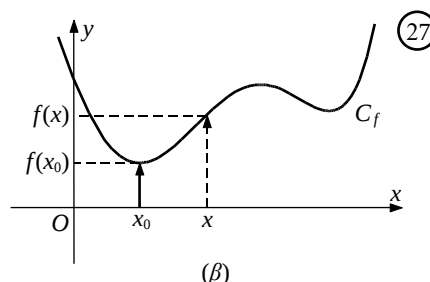
$$f(x) \leq f(x_0) \text{ για κάθε } x \in A \quad (\Sigma\chi. 27\alpha)$$

- Παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) **ελάχιστο**, το $f(x_0)$, όταν

$$f(x) \geq f(x_0) \text{ για κάθε } x \in A \quad (\Sigma\chi. 27\beta).$$



(α)



(β)

Το (ολικό) μέγιστο και το (ολικό) ελάχιστο μιας συνάρτησης f λέγονται (ολικά) **ακρότατα** της f .

Παρατηρήσεις

- Υπάρχουν συναρτήσεις που παρουσιάζουν και μέγιστο και ελάχιστο, άλλες που παρουσιάζουν μόνο το ένα από τα δύο και άλλες που δεν παρουσιάζουν κανένα από τα δύο
- Η σχέση $f(x) \leq M$ για κάθε $x \in A$, δεν σημαίνει απαραίτητα ότι ο αριθμός M αποτελεί μέγιστο. Πρέπει επίσης να υπάρχει κάποιο $x_0 \in A$ με $f(x_0) = M$. Αντίστοιχα για τη σχέση $f(x) \geq m$
- Αν $f \uparrow [\alpha, \beta]$ τότε έχει μέγιστο το $f(\beta)$ και ελάχιστο το $f(\alpha)$
- Αν $f \downarrow [\alpha, \beta]$ τότε έχει μέγιστο το $f(\alpha)$ και ελάχιστο το $f(\beta)$
- Αν $f \uparrow [\alpha, x_1]$ και $f \downarrow [x_1, \beta]$ τότε έχει μέγιστο το $f(x_1)$ και ελάχιστο το μικρότερο εκ των $f(\alpha)$, $f(\beta)$
- Αν $f \downarrow [\alpha, x_1]$ και $f \uparrow [x_1, \beta]$ τότε έχει ελάχιστο το $f(x_1)$ και μέγιστο το μεγαλύτερο εκ των $f(\alpha)$, $f(\beta)$
- Αν το σύνολο τιμών της f είναι το $[\gamma, \delta]$ τότε έχει ελάχιστο το γ και μέγιστο το δ
- Αν το σύνολο τιμών της f είναι το $[\gamma, \delta)$ τότε έχει ελάχιστο το γ και μέγιστο δεν έχει
- Αν το σύνολο τιμών της f είναι το $(\gamma, \delta]$ τότε έχει μέγιστο το δ και ελάχιστο δεν έχει
- Αν το σύνολο τιμών της f είναι το (γ, δ) τότε δεν έχει ούτε ελάχιστο ούτε μέγιστο

Συνάρτηση 1-1 ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται **συνάρτηση 1-1**, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή:

$$\text{αν } x_1 \neq x_2, \text{ τότε } f(x_1) \neq f(x_2).$$

Με απαγωγή σε άτοπο αποδεικνύεται ότι:

Μια συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι **συνάρτηση 1-1**, αν και μόνο αν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή:

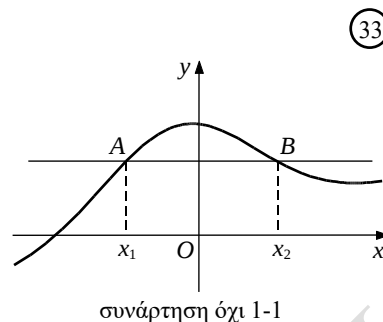
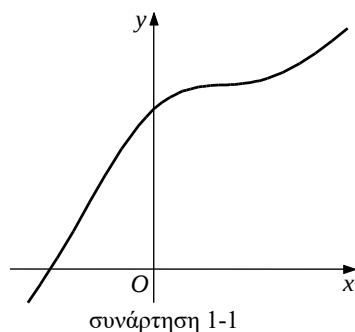
$$\text{αν } f(x_1) = f(x_2), \text{ τότε } x_1 = x_2.$$

Μια συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ **δεν** θα λέγεται **συνάρτηση 1-1**, όταν υπάρχουν $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 \neq x_2$, και $f(x_1) = f(x_2)$.

ΣΧΟΛΙΑ

- Από τον παραπάνω ορισμό προκύπτει ότι μια συνάρτηση f είναι 1-1, αν και μόνο αν:
 - Για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση $f(x) = y$ έχει ακριβώς μια λύση ως προς x .

- Δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής της παράστασης με την ίδια τεταγμένη. Αυτό σημαίνει ότι κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση της f το πολύ σε ένα σημείο (Σχ. 33α).



(33)

Παρατηρήσεις

1. Αυτό που λέει πρακτικά ο ορισμός της 1-1 είναι ότι δεν μπορούν δύο διαφορετικά x να πάνε στο ίδιο y , κάτι που γενικά δεν απαγορεύεται από τον ορισμό της συνάρτησης. Έτσι ενώ γενικά αν $f(x_1) = f(x_2)$ τότε δεν είναι απαραίτητο ότι $x_1 = x_2$, αν η συνάρτηση είναι 1-1 και ισχύει $f(x_1) = f(x_2)$ τότε υποχρεωτικά είναι και $x_1 = x_2$.
2. Αν μία συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη τότε είναι και 1-1. Το αντίστροφο δεν ισχύει απαραίτητα. Μπορεί δηλαδή να είναι μία συνάρτηση 1-1 χωρίς να είναι απαραίτητα και γνησίως μονότονη. (Αργότερα θα μάθουμε ότι αν μία συνάρτηση είναι 1-1 και συνεχής τότε θα είναι και υποχρεωτικά γνησίως μονότονη).

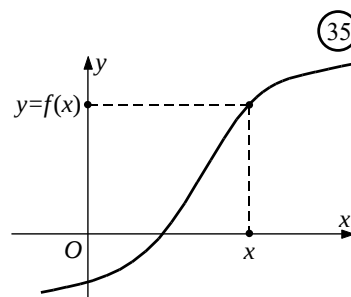
Αντίστροφη συνάρτηση

• Έστω μια συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Αν υποθέσουμε ότι αυτή είναι 1-1, τότε για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών, $f(A)$, της f υπάρχει μοναδικό στοιχείο x του πεδίου ορισμού της A για το οποίο ισχύει $f(x) = y$. Επομένως ορίζεται μια συνάρτηση $g : f(A) \rightarrow \mathbb{R}$

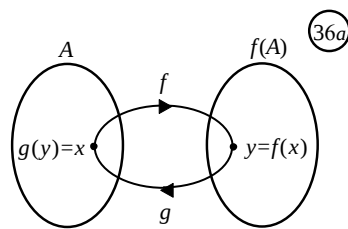
με την οποία κάθε $y \in f(A)$ αντιστοιχίζεται στο μοναδικό $x \in A$ για το οποίο ισχύει $f(x) = y$.

Από τον τρόπο που ορίστηκε η g προκύπτει ότι:

- έχει πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών $f(A)$ της f ,
- έχει σύνολο τιμών το πεδίο ορισμού A της f και
- ισχύει η ισοδυναμία: $f(x) = y \Leftrightarrow g(y) = x$.



Αυτό σημαίνει ότι, αν η f αντιστοιχίζει το x στο y , τότε η g αντιστοιχίζει το y στο x και αντιστρόφως. Δηλαδή η g είναι η αντίστροφη διαδικασία της f . Για το λόγο αυτό η g λέγεται **αντίστροφη συνάρτηση** της f και συμβολίζεται με f^{-1} . Επομένως έχουμε



$$f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$$

οπότε $f^{-1}(f(x)) = x, x \in A$ και $f(f^{-1}(y)) = y, y \in f(A)$.

Οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$ που διχοτομεί τις γωνίες $\angle xOy$ και $\angle x'Oy'$.

Παρατηρήσεις

1. Αν η f δεν είναι αντιστρέψιμη τότε δεν είναι και 1-1 οπότε υπάρχουν $x_1 \neq x_2$ με $f(x_1) = f(x_2)$
2. Αν η f δεν είναι αντιστρέψιμη τότε δεν είναι και γνησίως μονότονη
3. Αν η f είναι γνησίως μονότονη στο Δ , τότε ορίζεται η f^{-1} και είναι γνησίως μονότονη με το ίδιο είδος μονοτονίας στο $f(\Delta)$

4. Αν μία εκ των γραφικών παραστάσεων των f και f^{-1} τέμνει την ευθεία $\psi = \chi$ σε κάποια σημεία, τότε σίγουρα λόγω συμμετρίας στα ίδια σημεία θα τέμνει την $\psi = \chi$ και η άλλη. Δηλαδή οι εξισώσεις

$$f(x) = x \text{ και } f^{-1}(x) = x \text{ είναι ισοδύναμες, που σημαίνει ότι έχουν ακριβώς}$$

τις ίδιες λύσεις και άρα μπορούμε να λύσουμε όποια από τις δύο 'βολεύει'

5. **Προσοχή:** Η προηγούμενη παρατήρηση δε σημαίνει ότι οι γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1} αν τέμνονται θα τέμνονται υποχρεωτικά πάνω στην ευθεία $\psi = \chi$. Υπάρχουν συναρτήσεις όπως η $f(x) = -x^3$, που τέμνονται με την αντιστροφή τους και εκτός της ευθείας $\psi = \chi$. Για την εύρεση των κοινών σημείων των $C_f, C_{f^{-1}}$ λύνουμε ένα από τα παρακάτω

$$\text{ισοδύναμα συστήματα} \quad \begin{cases} y = f(x) \\ y = f^{-1}(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = f(x) \\ x = f(y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = f^{-1}(x) \\ x = f^{-1}(y) \end{cases}$$

6. Αν όμως η f είναι γνησίως αύξουσα (όχι μόνο τότε) οι γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1} αν τέμνονται θα τέμνονται υποχρεωτικά πάνω στην ευθεία $\psi = \chi$, που σημαίνει ότι για την εύρεση των κοινών σημείων των $C_f, C_{f^{-1}}$ μπορούμε να λύσουμε όποια από τις παρακάτω ισοδύναμες εξισώσεις μας βολεύει $f(x) = x$ ή $f^{-1}(x) = x$ ή $f^{-1}(x) = f(x)$

3ο ΠΡΟΤΥΠΟ ΛΥΚΕΙΟ ΙΛΙΟΥ

7. Αν ξέρουμε μία εκ των γραφικών παραστάσεων $C_f, C_{f^{-1}}$ τότε μπορούμε να σχεδιάσουμε και την άλλη, αφού θα είναι η συμμετρικής της $1^{ηs}$ ως προς την ευθεία $\psi = \chi$
8. Για την εύρεση του πεδίου ορισμού της f^{-1} που είναι το σύνολο τιμών της f αλλά και του τύπου της f^{-1} , ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα :
- Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της f
 - Θεωρούμε την εξίσωση $y = f(x)$ και τη λύνουμε ως προς x , θέτοντας όπου χρειάζεται περιορισμούς για το y
 - Απαιτούμε η λύση x που βρήκαμε παραπάνω να ανήκει στο πεδίο ορισμού της f
 - Συναληθεύουμε τους περιορισμούς που έχουν προκύψει για το y και βρίσκουμε έτσι το σύνολο τιμών της f και άρα και το πεδίο ορισμού της f^{-1}
 - Αν η λύση της εξίσωσης $y = f(x)$ ως προς x είναι η $x = g(y)$ τότε έχουμε ότι $f^{-1}(y) = g(y)$. Θέτουμε όπου y το x και έχουμε τον τύπο της f^{-1}