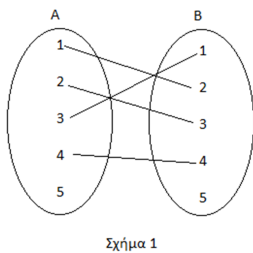


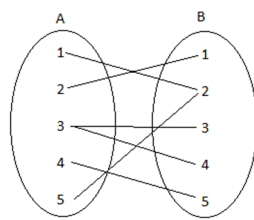
Η έννοια της συνάρτησης

Θέμα 1ο

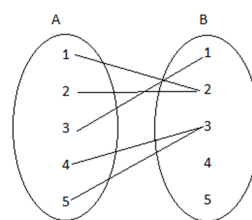
Στα παρακάτω σχήματα δίνονται 3 αντιστοιχίσεις από ένα σύνολο A σε ένα σύνολο B.



Σχήμα 1



Σχήμα 2



Σχήμα 3

α) Η αντιστοίχιση του σχήματος 1 δεν παριστάνει συνάρτηση από το A στο B διότι:

υπάρχει $x \in A$ (συγκεκριμένα το 5) που δεν αντιστοιχίζεται

β) Η αντιστοίχιση του σχήματος 2 δεν παριστάνει συνάρτηση από το A στο B διότι:

υπάρχει $x \in A$ (συγκεκριμένα το 3) που αντιστοιχίζεται σε 2 τιμές των B

γ) Η αντιστοίχιση του σχήματος 3 παριστάνει συνάρτηση από το A στο B διότι:

σε κάθε $x \in A$ αντιστοιχίζεται ένα και μόνο στοιχείο του B

Έστω $f: A \rightarrow B$ η συνάρτηση του σχήματος 3. Τότε

- Να παραστήσετε με αναγραφή των στοιχείων του το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f.
- Να παραστήσετε με αναγραφή των στοιχείων του το σύνολο τιμών $f(A)$ της συνάρτησης f.
- Να βρείτε τις τιμές $f(1)$ και $f(2)$

i) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ii) $f(A) = \{1, 2, 3\}$ iii) $f(1) = 2$
 $f(2) = 1$

Θέμα 2ο Να βρείτε το πεδίο ορισμού κάθε μιας από τις παρακάτω συναρτήσεις

α) $f(x) = \frac{\sqrt{-x^2 + 4x - 3}}{\sqrt{x^2 - 4x}}$, β) $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{2-x}}$, γ) $f(x) = \frac{1}{|x|+x}$,

δ) $f(x) = \frac{\sqrt{3-e^x}}{\sqrt{x-1}}$ ε) $f(x) = \log \frac{e^x - 1}{e^{2x} - 4}$ στ) $f(x) = x^{\ln 5}$ ζ) $f(x) = x^{\frac{1}{\ln 5}}$

α) $-x^2 + 4x - 3 \geq 0$ και $x^2 - 4x > 0$
 $x \in [1, 3]$ $x \in (-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$
 Το σύνολο η f δεν ορίζεται για καμία τιμή του x

β) $\frac{x-1}{2-x} \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)(2-x) \geq 0$
 $x \neq 2$ $x \in [1, 2) \cup (2, 2]$

$$2-x \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)(2-x) \geq 0$$

$$x \neq 2$$

$$A = [1, 2)$$

$x-1$	-	+	+	+
$2-x$	+	+	0	-
$P(x)$	-	+	+	-

$$\delta) |x| + x \neq 0 \Leftrightarrow |x| \neq -x \Leftrightarrow x > 0. \quad A = (0, +\infty)$$

$$\delta) 3 - e^x \geq 0 \quad \text{και} \quad \sqrt{x} - 1 \neq 0 \quad \text{και} \quad x \geq 0$$

$$e^x \leq 3$$

$$\sqrt{x} \neq 1$$

$$x \leq \ln 3$$

$$x \neq 1$$

$$A = [0, 1) \cup (1, \ln 3]$$

$$3 > e$$

$$\ln 3 > 1$$

$$\frac{e^x - 1}{e^{2x} - 4} > 0$$

$$e^{2x} - 4 \neq 0$$

$$-2 < w < 1 \quad \vee \quad w > 2$$

$$-2 < e^x < 1 \quad e^x > 2$$

$$x < 0$$

$$x > \ln 2$$

$$\theta \in \mathbb{R} \quad e^x = w$$

$$\frac{w-1}{w^2-4} > 0$$

w	-2	1	2
$w-1$	-	-	+
w^2-4	+	0	-
$P(w)$	-	+	-

$$A = (-\infty, 0) \cup (\ln 2, +\infty)$$

Για ποια τιμές του x ορίζεται η συνάρτηση x^a

$$A, \quad a \in \mathbb{N} - \{0\} \quad \text{τότε} \quad x \in \mathbb{R}$$

$$A, \quad a \in \mathbb{Z} \quad \text{τότε} \quad x \in \mathbb{R} - \{0\}$$

$$A, \quad a \in \mathbb{Q} \quad \text{τότε} \quad x \in (0, +\infty)$$

$$A, \quad a \in \mathbb{Q} \quad \text{και} \quad a > 0 \quad \text{τότε} \quad x \in [0, +\infty)$$

$$A, \quad a \in \mathbb{R} \quad \text{τότε} \quad x \in (0, +\infty)$$

$$A, \quad a \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad a > 0 \quad \text{τότε} \quad x \in [0, +\infty)$$

$$x^{\ln 5}$$

$$e < 5 < e^2 \Rightarrow \ln e < \ln 5 < \ln e^2 \Rightarrow 1 < \ln 5 < 2$$

$$e \approx 2,71$$

$$\ln 5 \notin \mathbb{Z}$$

$$\ln 5 > 0$$

$$\text{οπότε} \quad A = [0, +\infty)$$

$$x^{\ln \frac{1}{3}}$$

$$1 < \ln 5 < 2 \Rightarrow -1 > -\ln 5 > -2 \Rightarrow$$

$$x^{\ln \frac{1}{x}}$$

$$1 < \ln 5 < 2 \Rightarrow -1 > -\ln 5 > -2 \Rightarrow$$

$$-1 > \ln 5^{-1} > -2 \Rightarrow -1 > \ln \frac{1}{5} > -2$$

$$\ln \frac{1}{5} \notin \mathbb{Z}, \ln \frac{1}{5} < 0 \quad A = (0, +\infty)$$

Θέμα 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & \text{αν } x < 0 \\ x - 2, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$.

α) Να βρείτε τις τιμές $f(-1), f(0), f(2)$.

β) Να λυθεί η εξίσωση $f(x) = 0$.

γ) Να λυθεί η ανίσωση $f(x) < 0$.

δ) Να εξετάσετε αν το -3 ανήκει στο σύνολο τιμών της f .

$$\gamma) f(x) < 0$$

$$\text{για } x < 0: x^2 - 1 < 0$$

$$x^2 < 1$$

$$\sqrt{x^2} < \sqrt{1}$$

$$|x| < 1$$

$$-1 < x < 1$$

Ομως $x < 0$ οπότε $x \in (-1, 0)$

$$\text{για } x \geq 0: x - 2 < 0$$

$$x < 2$$

ομως $x \geq 0$ οπότε $x \in [0, 2)$

$$\text{Τελικά } x \in (-1, 2)$$

$$A = \mathbb{R}$$

$$f(-1) = (-1)^2 - 1 = 0$$

$$f(0) = 0 - 2 = -2$$

$$f(2) = 2 - 2 = 0$$

$$f(x) = 0$$

$$\text{για } x < 0: x^2 - 1 = 0$$

$$x = 1 \text{ ή } x = -1$$

$$\text{αλλά } x < 0$$

$$\text{για } x \geq 0: x - 2 = 0$$

$$x = 2 \text{ δεκτή}$$

δ) Εξετάζω αν η εξίσωση

$$f(x) = -3 \text{ έχει λύση}$$

$$\text{γιν } A = D_f = \mathbb{R}$$

$$\text{για } x < 0: x^2 - 1 = -3$$

$$x^2 = -2$$

$$A \text{ Συνατή}$$

$$\text{για } x \geq 0: x - 2 = -3$$

$$x = -1$$

$$\text{Αρα } -3 \notin f(A)$$

$$\text{απορριπτική}$$