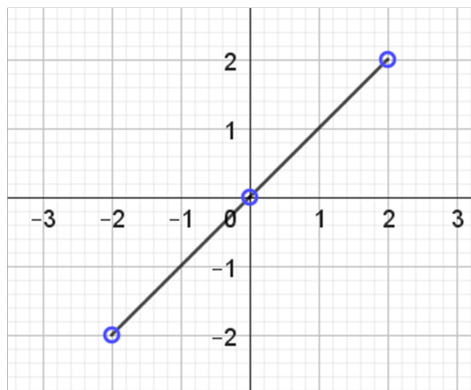


Μάθημα 10ο - Συναρτήσεις : Μονοτονία - Ακρότατα -
Συμμετρίες

Θέμα 1ο

Με βάση τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις να βρείτε για κάθε συνάρτηση το πεδίο ορισμού, το σύνολο τιμών, τα διαστήματα μονοτονίας, τα ακρότατα και τις θέσεις ακροτάτων (αν υπάρχουν) και να εξετάσετε αν είναι άρτια ή περιττή.



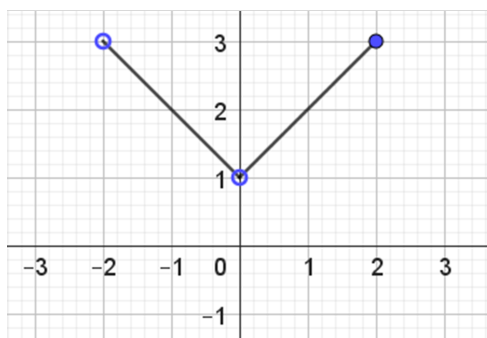
$$A = (-2, 0) \cup (0, 2)$$

$$f(A) = (-2, 0) \cup (0, 2)$$

ΠΕΡΙΤΤΗ

$$f \downarrow (-2, 0), f \uparrow (0, 2)$$

ακρότατα δεν έχει



$$A = (-2, 0) \cup (0, 2]$$

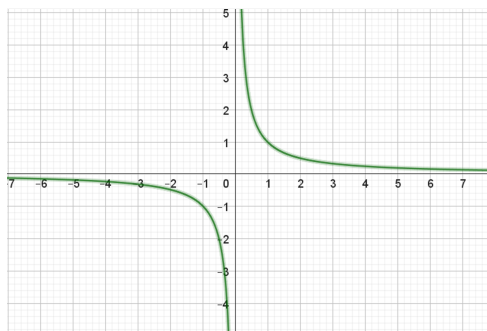
$$f(A) = (1, 3]$$

όχι άρτια, όχι περιττή

$$f \downarrow (-2, 0), f \uparrow [0, 2]$$

μέγιστο το 3 όταν $x = -2$ ή $x = 2$
 $\hookrightarrow$ μέγιστο

$\hookrightarrow$ μέγιστο δεν έχει

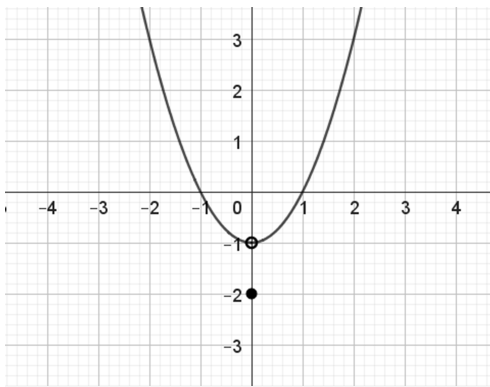


$$A = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) = \mathbb{R}^*$$

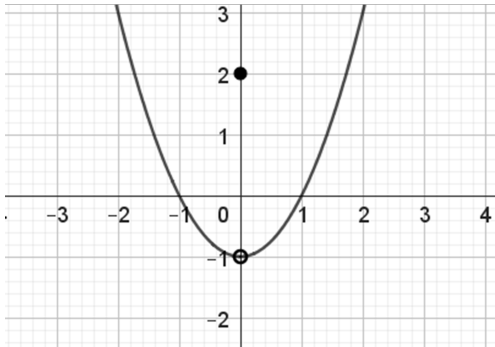
$$f(A) = \mathbb{R}^*, \text{ ΠΕΡΙΤΤΗ}$$

$$f \downarrow (-\infty, 0), f \uparrow (0, +\infty)$$

ακρότατα δεν έχει



$A = \mathbb{R}, f(A) = (-1, +\infty) \cup \{-2\}$
 $f \downarrow (-\infty, 0], f \uparrow [0, +\infty)$
 άρτια, μέγιστο δεν έχει
 ελάχιστο το -2 όταν $x = 0$



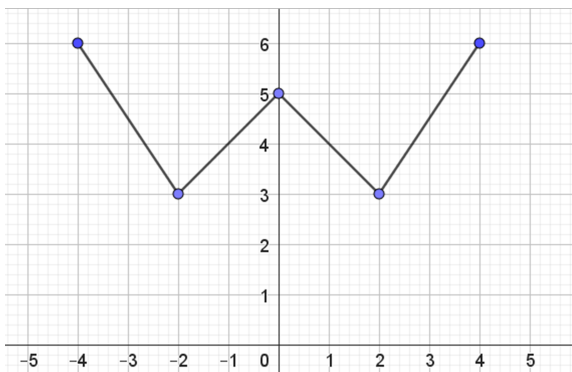
$A = \mathbb{R}, f(A) = (-1, +\infty)$
 $f \downarrow (-\infty, 0), f \uparrow (0, +\infty)$
 άρτια, ακρότατα δεν έχει

Θέμα 2ο

Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

α) Να βρείτε πεδίο ορισμού της, το σύνολο τιμών, τα διαστήματα μονotonίας, τα ακρότατα και τις θέσεις ακροτάτων και να εξετάσετε αν είναι άρτια ή περιττή.

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 3\eta\mu(\frac{\pi}{4}x)$.



$A = [-4, 4], f(A) = [3, 6]$
 άρτια, $f \downarrow [-4, -2]$
 $f \uparrow [-2, 0], f \downarrow [0, 2], f \uparrow [2, 4]$
 μέγιστο το 6 όταν $x = 4, x = -4$
 ελάχιστο το 3 όταν $x = -2, x = 2$

Πλύνει ρίζες της εξίσωσης $f(x) = k, k \in \mathbb{R}$

Αν $k > 6$ καμία ρίζα

Αν $k = 6$ δύο ρίζες

Αν $5 < k < 6$ δύο ρίζες

Αν $k = 5$ 3 ρίζες

Αν $3 < k < 5$ 4 ρίζες

$\Delta \nu \quad \nu = 1 \quad \dots \quad \nu = 5$
 $A \nu \quad 3 < \nu < 5 \quad 4 \text{ πύκες}$
 $A \nu \quad \nu = 3 \quad 2 \text{ πύκες}$
 $A \nu \quad \nu < 3 \quad \text{καμία}$

$$\beta) \left. \begin{aligned} 3 \leq f(x) \leq 6, \text{ για κάθε } x \in A \\ -1 \leq \psi\left(\frac{\pi}{4}x\right) \leq 1 \Rightarrow -3 \leq 3\psi\left(\frac{\pi}{4}x\right) \leq 3 \end{aligned} \right\}$$

$$f(x) = 3\psi\left(\frac{\pi}{4}x\right) \Leftrightarrow f(x) = 3\psi\left(\frac{\pi}{4}x\right) = 3 \Leftrightarrow$$

$$f(x) = 3 \quad \text{και} \quad 3\psi\left(\frac{\pi}{4}x\right) = 3$$

$$x = -2 \text{ ή } x = 2 \quad \psi\left(\frac{\pi}{4}x\right) = 1$$

$$\text{για } x = 2 \quad \psi\left(\frac{\pi}{4} \cdot 2\right) = \psi\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \quad \text{στοιχείο}$$

$$\text{για } x = -2 \quad \psi\left(\frac{\pi}{4} \cdot (-2)\right) = \psi\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1 \quad \text{στηρίζουσα}$$

Τελικά μοναδική λύση $\boxed{x=2}$

Θέμα 3ο

Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα $(\alpha, 6)$ είναι περιττή και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $(4, 2)$.

α) Να βρείτε την τιμή του α , το $f(-4)$ και το $f(0)$.

β) Τι συμπέρασμα προκύπτει για τη μονοτονία της f ;

α) Αφού είναι περιττή ηρέσει για κάθε $x \in (\alpha, 6)$ και $-x \in (\alpha, 6)$ οπότε $\alpha = -6$

$$\beta) (4, 2) \in G \Rightarrow f(4) = 2$$

$$f \text{ περιττή} \rightarrow f(-x) = -f(x), \quad x \in A$$

$$\text{για } x = 4 \text{ έχω } f(-4) = -f(4) = -2$$

$$f(0) = 0 \Rightarrow f(0) + f(0) = 0$$

για $x=1$ έχουμε $f(1)=0$

$$\text{για } x=0 \text{ έχουμε } f(-1) = -f(1) \Rightarrow f(0) + f(0) = 0 \\ \Rightarrow 2f(0) = 0 \Rightarrow \boxed{f(0) = 0}$$

γ) $0 < 2$ και $f(0) < f(2)$ οπότε η f δεν είναι χνσίως φθίνουσα