

### Θέμα 10°

Στο παρακάτω σχήμα 1 δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης  $f$  με πεδίο ορισμού το  $\mathbb{R}$ , η οποία είναι παραγωγίσιμη, κυρτή, γνησίως αύξουσα και διέρχεται από τα σημεία  $A(1,2)$  και  $B(2,4)$ . Το χωρίο  $\Omega$  περικλείεται μεταξύ των  $C_f$  του άξονα  $xx'$  και των ευθειών  $x=1$  και  $x=2$ . Να αποδείξετε αλγεβρικά και κατόπιν να ερμηνεύσετε γραφικά ότι

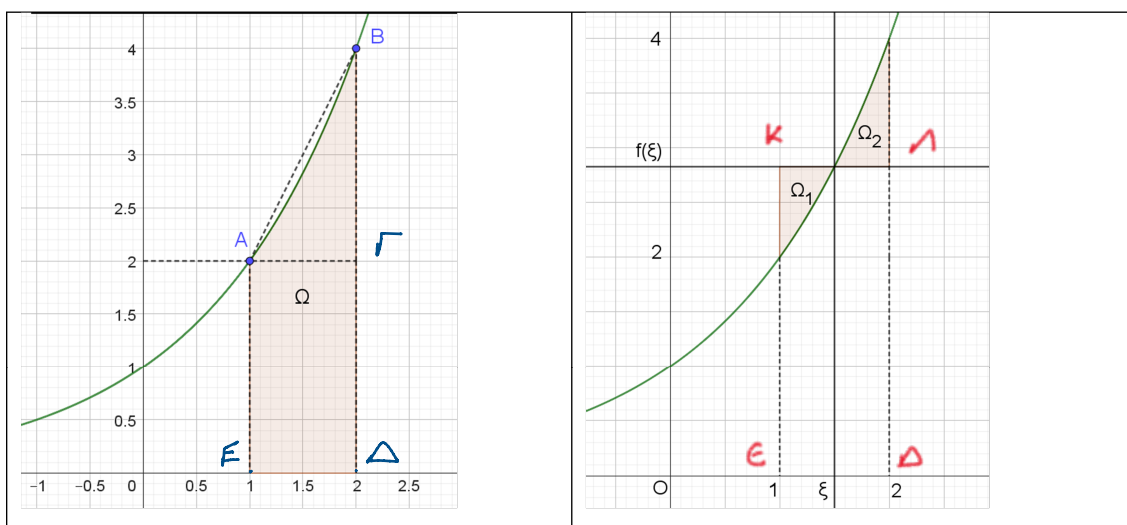
α)  $f(x) \leq 2x$  για κάθε  $x \in [1,2]$ .

β)  $2 < E(\Omega) < 3$ .

γ) υπάρχει ακριβώς ένα  $\xi \in (1,2)$  τέτοιο ώστε  $\int_1^2 f(x)dx = f(\xi)$

δ)  $E(\Omega_1) = E(\Omega_2)$ .

ε)  $\int_1^{3/2} f(x)dx < \int_{3/2}^2 f(x)dx$



α) Αλγεβρικά

Για  $x=1$  και για  $x=2$   
 Γίνεται  $f(x)=2x$

Για  $x \in (1,2)$

ΘΜΤ για την  $f$  στο  $[1,x]$  οπότε  
 υπάρχει  $\xi_1 \in (1,x)$  με  $f'(\xi_1) = \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{f(x)-2}{x-1}$  α)

ΘΜΤ για την  $f$  στο  $[x,2]$  οπότε  
 ... ..  $\xi_2 \in (x,2)$  με  $f'(\xi_2) = \frac{f(2)-f(x)}{2-x} = \frac{4-f(x)}{2-x}$

Γραφικά:

$$\eta_{AB} = \frac{4-2}{2-1} = \frac{2}{1} = 2$$

$$AB: y - y_A = \eta_{AB}(x - x_A)$$

$$y - 2 = 2(x - 1)$$

$$y = 2x$$

( $f$  κάτω από  $AB$  στο  $[1,2]$   
 με τη βοήθεια τα  $A, B$  συνδυάζ

$$\boxed{f(x) \leq 2x} \quad x \in [1,2]$$

ΘΜΤ για την  $f$  στο  $[x, 2]$  ορίζεται  
 η επεκτα  $f_2 \in (x, 2)$  με  $f'(f_2) = \frac{f(2) - f(x)}{2 - x} = \frac{4 - f(x)}{2 - x}$  (2)

$$\boxed{f(x) \leq 2x} \quad x \in [1, 2]$$

$T_0 =$  για  $x=1, x=2$

Όμως  $f_1 < f_2 \xrightarrow[\text{f' 1}]{\text{f κρπαι}} f'(f_1) < f'(f_2) \xrightarrow[\text{4}]{\text{4}}$

$$\frac{f(x) - 2}{x - 1} < \frac{4 - f(x)}{2 - x} \xrightarrow[\substack{x-1 > 0 \\ 2-x > 0}]{1 < x < 2} (2-x)(f(x)-2) < (x-1)(4-f(x)) \rightarrow$$

$$2f(x) - 4 - xf(x) + 2x < 4x - xf(x) - 4 + f(x) \rightarrow \boxed{f(x) < 2x}, x \in (1, 2)$$

$T \in J$  για  $f(x) \leq 2x, x \in [1, 2]$   $T_0 =$  για  $x=1, x=2$ .

β) Αλγεβρική

$$x \in [1, 2]$$

$$1 \leq x \xrightarrow{\text{f 1}} f(x) \leq f(x) \Rightarrow 2 \leq f(x)$$

$T_0 =$  για  $x=1$

Είχα  $2 \leq f(x) \leq 2x \Rightarrow$

$$\int_1^2 2 dx < \int_1^2 f(x) dx < \int_1^2 2x dx$$

$$[2x]_1^2 < E(\Omega) < [x^2]_1^2 \Rightarrow \boxed{2 < E(\Omega) < 3}$$

Γραφική

$$(A \cap \Delta E) < E(\Omega) < (A \cup \Delta E)$$

$$2 \cdot 1 < E(\Omega) < \frac{(4+2) \cdot 1}{2}$$

$$\boxed{2 < E(\Omega) < 3}$$

γ) Αλγεβρική

$$2 < E(\Omega) < 3 < 4 \Rightarrow$$

$$f(1) < \int_1^2 f(x) dx < f(2) \xrightarrow{\text{D.F.T}}$$

ή απλά  $f \in (1, 2)$  με  $f(2) = \int_1^2 f(x) dx$

και λόγω μονotonίας  $w$   $f$   
 παραδίδω

Γραφική

$T_0$   $f(\Omega)$  είναι 150 με  $f$  ορθογώνιο  
 κλάσε με βάση 1 και ύψος  $f(2)$

Εκτίμηση 2

δ)  $E(\Omega_1) = E(\Omega_2) \Leftrightarrow$

$$\int_1^2 (f(2) - f(x)) dx = \int_1^2 (f(x) - f(1)) dx \Leftrightarrow$$

Γραφική

Αρα  $E(\Omega) = (K \cap \Delta E) \Rightarrow E_1 = E_2$

$$\int_1^{\frac{3}{2}} (f(x) - f(x)) dx = \int_{\frac{3}{2}}^2 (f(x) - f(x)) dx \Leftrightarrow$$

$$\int_1^{\frac{3}{2}} f(x) dx - \int_1^{\frac{3}{2}} f(x) dx = \int_{\frac{3}{2}}^2 f(x) dx - \int_{\frac{3}{2}}^2 f(x) dx \Leftrightarrow$$

$$\int_1^{\frac{3}{2}} f(x) dx + \int_{\frac{3}{2}}^2 f(x) dx = \int_1^{\frac{3}{2}} f(x) dx + \int_{\frac{3}{2}}^2 f(x) dx \Leftrightarrow \int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 f(x) dx \Leftrightarrow$$

$$f(x) \cdot (2-1) = \int_1^2 f(x) dx \Leftrightarrow f(x) = \int_1^2 f(x) dx \text{ now inverse}$$

e) Argumentation

Sei  $F(x)$  eine primitive von  $f$

$$\text{Dann } \int_1^{\frac{3}{2}} f(x) dx = [F(x)]_1^{\frac{3}{2}} = F\left(\frac{3}{2}\right) - F(1)$$

$$\text{und } \int_{\frac{3}{2}}^2 f(x) dx = [F(x)]_{\frac{3}{2}}^2 = F(2) - F\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$\text{Dann } \int_1^{\frac{3}{2}} f(x) dx < \int_{\frac{3}{2}}^2 f(x) dx \Leftrightarrow F\left(\frac{3}{2}\right) - F(1) < F(2) - F\left(\frac{3}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\frac{F\left(\frac{3}{2}\right) - F(1)}{\frac{3}{2} - 1} < \frac{F(2) - F\left(\frac{3}{2}\right)}{2 - \frac{3}{2}}$$

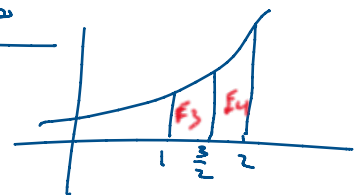
mittelm. w.  $f$

$$\Leftrightarrow f'(u_1) < f'(u_2) \Leftrightarrow$$

$u_1 \in \left[1, \frac{3}{2}\right]$   
 $u_2 \in \left[\frac{3}{2}, 2\right]$

$$f(u_1) < f(u_2) \stackrel{f \uparrow}{\Leftrightarrow} u_1 < u_2 \text{ now inverse } 1 < u_1 < \frac{3}{2} < u_2 < 2$$

Diagramm



$$E_3 < E_4 \Rightarrow \int_1^{\frac{3}{2}} f(x) dx < \int_{\frac{3}{2}}^2 f(x) dx$$