

Θέμα 12°

Έστω $I = \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta \mu^2 x dx$ και $J = \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma \upsilon \nu^2 x dx$.

α) Να αποδείξετε ότι $I + J = \frac{\pi^2}{4}$.

$$\begin{aligned} I + J &= \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta \mu^2 x dx + \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma \upsilon \nu^2 x dx = \\ &= \frac{\pi}{2} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta \mu^2 x dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma \upsilon \nu^2 x dx \right) = \frac{\pi}{2} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\eta \mu^2 x + \sigma \upsilon \nu^2 x) dx \\ &= \frac{\pi}{2} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dx = \frac{\pi}{2} \cdot 1 \cdot \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) = \frac{\pi^2}{4} \end{aligned}$$

β) Με χρήση της αντικατάστασης $u = \frac{\pi}{2} - x$ να αποδείξετε ότι $I = J$ και κατόπιν ότι

$$I = \frac{\pi^2}{8}.$$

$$I = \frac{\pi}{2} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta \mu^2 x dx = \frac{\pi}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \eta \mu^2 \left(\frac{\pi}{2} - u \right) (-du) = \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma \upsilon \nu^2 u du = J$$

Οπότε $x = \frac{\pi}{2} - u \Rightarrow dx = -1 \cdot du$ | για $x=0 \Rightarrow u = \frac{\pi}{2}$
για $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow u = 0$

γ) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{\pi}{2} \eta \mu^2 x \text{ στο διάστημα } \left[0, \frac{\pi}{2} \right]. \text{ Η ευθεία } OA \text{ τέμνει τη } C_f \text{ στα σημεία } O(0,0)$$

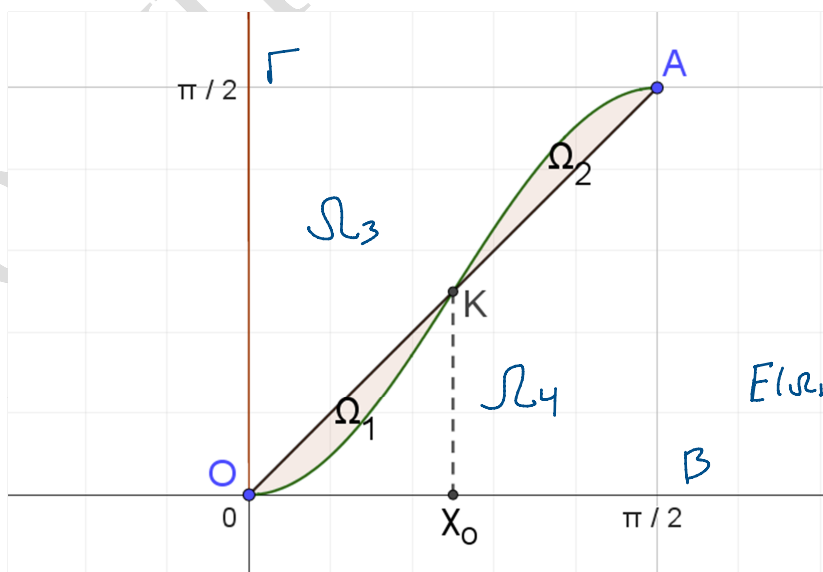
, $A\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $K(x_o, f(x_o))$ και ορίζει με τη C_f τα χωρία Ω_1, Ω_2 . Να αποδείξετε ότι :

i. το εμβαδόν που περικλείεται μεταξύ της C_f , του άξονα xy' και της ευθείας

$$y = \frac{\pi}{2} x \text{ είναι το } J.$$

ii. τα εμβαδά των χωρίων Ω_1, Ω_2 είναι ίσα.

iii. να δείξετε ότι το K είναι σημείο καμπής και ότι $x_o = \frac{\pi}{4}$



$$\lambda_{OA} = \frac{\frac{\pi}{2} - 0}{\frac{\pi}{2} - 0} = 1$$

$$OA: \boxed{y=x}$$

$$\begin{aligned} \text{i) A.v.S.2. } E(\Omega_1) + E(\Omega_3) &= J \\ E(\Omega_1) + E(\Omega_3) &= (OAB) - (E(\Omega_2) + E(\Omega_4)) \\ &= \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \\ &= \frac{\pi^2}{4} - I = J \end{aligned}$$

$$\text{ii) } J = I \Rightarrow E(\Omega_1) + E(\Omega_3) = E(\Omega_2) + E(\Omega_4) \Rightarrow$$

$$E(\Omega_1) + (OAB) - E(\Omega_2) = E(\Omega_2) + (OAB) - E(\Omega_1) \Rightarrow$$

$$2E(\Omega_1) = 2E(\Omega_2) \Rightarrow E(\Omega_1) = E(\Omega_2)$$

