

Μάθημα 102ο -Επαναληπτικά θέματα

ΘΕΜΑ 1ο

Έστω συνάρτηση f γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$ της οποίας η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(3,0)$ και $B(0,8)$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η C_f είναι κάτω από τον άξονα xx' και για ποιες είναι πάνω από τον xx' .

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(\ln x) > 0$

$$f(3) = 0$$

$$f(0) = 8$$

$0 < 3$ και $f(3) < f(0)$
οπότε η f δν
είναι γν. αυξανόμενη και
επειδή είναι γν. φθίνουσα
είναι γν. φθίνουσα στο $\mathbb{R}$

$$B) C_f \text{ κάτω } xx' \Leftrightarrow f(x) < 0 \Leftrightarrow f(x) < f(3) \stackrel{f \downarrow}{\Leftrightarrow} x > 3$$

$$C_f \text{ πάνω από } xx' \Leftrightarrow f(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) > f(3) \stackrel{f \downarrow}{\Leftrightarrow} x < 3$$

$$\gamma) f(\ln x) > 0 \Leftrightarrow f(\ln x) > f(3) \stackrel{f \downarrow}{\Leftrightarrow} \ln x < 3 \Leftrightarrow 0 < x < e^3$$

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln(x-1)$ και $g(x) = \frac{1}{x-1}$.

Να βρείτε εφόσον υπάρχουν τα παρακάτω όρια αιτιολογώντας την απάντησή σας.

i. $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ ii. $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$ iii. το $\lim_{x \rightarrow 1} (f(x) \cdot g(x))$.

$$i) \lim_{x \rightarrow 1} \ln(x-1) \stackrel{x > 1}{\underset{x-1 < u}{\xrightarrow{u \rightarrow 0^+}}} \lim_{u \rightarrow 0^+} \ln u = -\infty$$

$$ii) \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty \quad / \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty \quad \text{οπότε } \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} \text{ δεν υπάρχει}$$

$$iii) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\ln(x-1) \cdot \frac{1}{x-1} \right) \stackrel{x-1 > 0}{\underset{x \rightarrow 1^+}{\xrightarrow{u \rightarrow 0^+}}} \lim_{u \rightarrow 0^+} \ln(u-1) \cdot \frac{1}{u-1} = -\infty$$

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \begin{cases} x-2 & , \quad x < 1 \\ x+1 & , \quad x > 1 \end{cases}$ και $g(x) = \frac{1}{x-1}$.

Να βρείτε εφόσον υπάρχουν τα παρακάτω όρια αιτιολογώντας την απάντησή σας.

i. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ ii. $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$ iii. το $\lim_{x \rightarrow 1} (f(x) \cdot g(x))$

· · · · ·

i. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ ii. $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$ iii. το $\lim_{x \rightarrow 1} (f(x) \cdot g(x))$

$$\left. \begin{aligned} \text{i)} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} (x-2) = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} (x+1) = 2 \end{aligned} \right\} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \text{ δεν υπάρχει}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{ii)} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty \end{aligned} \right\} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} g(x) \text{ δεν υπάρχει}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{iii)} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \cdot g(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} (x+1) \frac{1}{x-1} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \cdot g(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} (x-2) \frac{1}{x-1} = +\infty \end{aligned} \right\} \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \cdot g(x) = +\infty$$

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{\eta \mu x}{x}, & x \neq 0 \\ \alpha, & x = 0 \end{cases}$, η οποία είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 0$.

β) Να αποδείξετε ότι $f'(0) = 0$.

γ) Να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $(0, f(0))$.

$$\begin{aligned} \text{α)} \quad & \text{f συνεχής στο } 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{\eta \mu x}{x} \right) = \alpha \\ & 1 - 1 = \alpha \Rightarrow \boxed{\alpha = 0} \end{aligned}$$

$$\text{β)} \quad f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{\eta \mu x}{x} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \eta \mu x}{x^2}$$

$$\stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sin x}{2x} = 0 \quad \text{Άρα } f'(0) = 0$$

$$\gamma) \quad \varepsilon: \gamma - f(0) = f'(0)(x-0) \Rightarrow \gamma = 0 \rightarrow 0 \quad x \neq 0$$