

Μάθημα 104ο -Επαναληπτικά θέματα

ΘΕΜΑ 12ο

Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, κοίλη που παρουσιάζει ακρότατο για

$x=1$.

α) Να αιτιολογήσετε γιατί $f'(1)=0$.

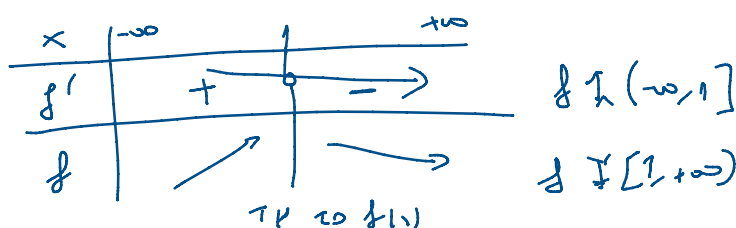
β) Να αιτιολογήσετε ότι $f'(x) < 0$ για κάθε $x > 1$ και $f'(x) > 0$ για κάθε $x < 1$.

γ) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το είδος του ακροτάτου στο 1.

α) Αφού η f παρουσιάζει ακρότατο για $x=1$ και f παραγωγίσιμη από Fermat $f'(1)=0$

β) f κοίλη $\Rightarrow f' \searrow$

γ)



ΘΕΜΑ 13ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 2023 - \frac{\eta\mu x}{x}, & x \neq 0 \\ \alpha, & x = 0 \end{cases}$, η οποία είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι $\alpha = 2022$.

β) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 2022$.

προφανώς για $x=0$ έχουμε $f(0)=2022$
 για $x \neq 0$ $\eta\mu x \neq x \Rightarrow \frac{\eta\mu x}{x} \neq 1 \Rightarrow$
 $-\frac{\eta\mu x}{x} \neq -1 \Rightarrow f(x) \neq 2022$
 Άρα $\boxed{x=0}$

$$α) \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(2023 - \frac{\eta\mu x}{x} \right) = 2023 - 1 = 2022$$

$$f \text{ συνεχής στο } 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \Rightarrow \boxed{\alpha = 2022}$$

$$β) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2023 - \frac{\eta\mu x}{x} \right) = 2023 - 0 = 2023$$

$$|\eta\mu x| \leq 1 \Rightarrow \frac{|\eta\mu x|}{|x|} \leq \frac{1}{|x|} \Rightarrow -\frac{1}{|x|} \leq \frac{\eta\mu x}{x} \leq \frac{1}{|x|}$$

$$\text{από κ.φ. παραβλ. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 0$$

ΘΕΜΑ 19ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + \frac{x^3}{x}$. Να αποδείξετε ότι

$$α) f'(x) = e^x + \frac{x^2}{2}$$

$$f''(x) = e^x + x$$

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + \frac{x^3}{6}$. Να αποδείξετε ότι

α) η f'' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β) η f έχει ένα ακριβώς σημείο καμπής $K(x_0, f(x_0))$ με $x_0 \in (-1, -\frac{1}{2})$ που

βρίσκεται στο 2ο τεταρτημόριο.

γ) η εφαπτομένη στο K έχει εξίσωση $y = (-x_0 + \frac{x_0^2}{2})x + x_0^2 - \frac{x_0^3}{3} - x_0$.

δ) $\frac{1}{e} - \frac{1}{6} < \frac{x_0^2}{2} - \frac{x_0^3}{3}$.

$$f'(x) = e^x + x^2$$

$$f''(x) = e^x + 2x$$

$$f'''(x) = e^x + 2 > 0 \Rightarrow f'' \uparrow \mathbb{R}$$

$$\beta) f''(-1) = e^{-1} - 1 = \frac{1}{e} - 1 < 0$$

$$f''(-\frac{1}{2}) = e^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{e}} - \frac{1}{2} > 0$$

Απο Θ. Πωλζαου υπάρχει $x_0 \in (-1, -\frac{1}{2})$ με $f''(x_0) = 0$ και λόγω μονotonίας παρουσιάζει

$$f''(x_0) = 0 \Rightarrow e^{x_0} + x_0 = 0 \Rightarrow \boxed{e^{x_0} = -x_0} \quad (1)$$

x	$-\infty$	-1	x_0	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
f''		-	0	+	
f					

ε.κ. $(x_0, f(x_0))$

$$x_0 \in (-1, -\frac{1}{2}) \rightarrow x_0 < 0$$

$$f(x_0) = e^{x_0} + \frac{x_0^3}{6} = -x_0 + \frac{x_0^3}{6} = x_0 \left(\frac{x_0^2}{6} - 1 \right) > 0$$

$$\text{αφού } x_0 < 0, \quad -1 < x_0 < -\frac{1}{2} \Rightarrow 1 > x_0^2 > \frac{1}{4} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{6} > \frac{x_0^2}{6} > \frac{1}{24} \Rightarrow \frac{x_0^2}{6} - 1 < 0$$

Αφού $x_0 < 0$, $f(x_0) > 0$ το $K(x_0, f(x_0))$ στο 2ο τεταρτημόριο

$$\delta) (1): y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Rightarrow y - \left(e^{x_0} + \frac{x_0^3}{6} \right) = \left(e^{x_0} + \frac{x_0^2}{2} \right) (x - x_0) \stackrel{(1)}{\Rightarrow}$$

$$y - \left(-x_0 + \frac{x_0^3}{6} \right) = \left(-x_0 + \frac{x_0^2}{2} \right) (x - x_0) \Rightarrow \dots \Rightarrow y = \left(-x_0 + \frac{x_0^2}{2} \right) x + x_0^2 - \frac{x_0^3}{3} - x_0$$

$$\delta) f \text{ κοιτάει στο } (-\infty, x_0) \text{ και } -1 \in (-\infty, x_0) \Rightarrow f(-1) < \left(-x_0 + \frac{x_0^2}{2} \right) (-1) + \frac{x_0^2}{2} - \frac{x_0^3}{3} - x_0$$

Αφ'αυτo αντιστρέφω
στο (x_0, ∞)

$$\Rightarrow \frac{1}{e} - \frac{1}{6} < \frac{x_0^2}{2} - \frac{x_0^3}{3}$$

ΘΕΜΑ 22ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x$ και το σημείο $A(0,2)$. Αν $K(x, \ln x)$ με $x > 0$ τυχαίο σημείο της C_f και $M(x_0, \ln x_0)$ με $x_0 > 0$ το σημείο εκείνο της C_f που απέχει την ελάχιστη απόσταση από το σημείο A , να αποδείξετε ότι:

α) η απόσταση AK συναρτήσει του $x > 0$ είναι $d(x) = \sqrt{x^2 + \ln^2 x - 4 \ln x + 4}$.

β) $x_0^2 + \ln x_0 - 2 = 0$.

γ) η εφαπτομένη της C_f στο M

i. είναι κάθετη στην AM .

ii. τέμνει τον άξονα xx' στο σημείο $(x_0^3 - x_0, 0)$.

$$α) (AK) = d(x) = \sqrt{(x-0)^2 + (\ln x - 2)^2} = \sqrt{x^2 + \ln^2 x - 4 \ln x + 4}$$

β) Η $d(x)$ παρουσιάζει ελάχιστο για $x = x_0$ οπότε από Fermat
 $d'(x_0) = 0 \Rightarrow \dots \Rightarrow x_0^2 + \ln x_0 - 2 = 0 \Rightarrow \boxed{\ln x_0 - 2 = -x_0^2} \quad (1)$

$$γ) \Sigma_M: y - \ln x_0 = f'(x_0)(x - x_0) \Rightarrow y - \ln x_0 = \frac{1}{x_0} (x - x_0)$$

$$i) \quad \left. \begin{aligned} \lambda_{EM} &= \frac{1}{x_0} \\ \lambda_{AM} &= \frac{\ln x_0 - 2}{x_0 - 0} = \frac{\ln x_0 - 2}{x_0} \end{aligned} \right| \Rightarrow \lambda_{EM} \cdot \lambda_{AM} = \frac{\ln x_0 - 2}{x_0^2} \stackrel{(1)}{=} \frac{-x_0^2}{x_0^2} = -1$$

οπότε $EM \perp AM$

$$ii) \quad \text{Α.ν.Σ.} \quad 0 - \ln x_0 = \frac{1}{x_0} (x_0^3 - x_0 - x_0) \Leftrightarrow -\ln x_0 = x_0^2 - 2 \Leftrightarrow \ln x_0 - 2 = -x_0^2 \text{ που ισχύει από (1)}$$

ΘΕΜΑ 23ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - \ln x$. Να αποδείξετε ότι

α) η f είναι κυρτή.

β) η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο σε κάποιο $x_0 \in (\frac{1}{2}, 1)$ το οποίο είναι μοναδικό.

γ) το ολικό ελάχιστο είναι το $\frac{1}{x_0} + x_0$.

δ) η εξίσωση $f(x) = 2$ είναι αδύνατη.

$$α) f'(x) = e^x - \frac{1}{x}, \quad f''(x) = e^x + \frac{1}{x^2} > 0 \rightarrow f \text{ κυρτή, } f' \nearrow$$

$$β) f(1) = e - 1 > 0 \quad \left| \begin{array}{l} \text{Βολτανο} \\ \text{...} \end{array} \right. \Rightarrow \text{υπάρχει } x_0 \in (\frac{1}{2}, 1) \text{ με } f'(x_0) = 0 \text{ και}$$

b) $f(1) = 2 - 1 > 0$ $\left| \begin{array}{l} \text{Bolzano} \\ f' \text{ συνεχής} \end{array} \right.$ υπάρχει $x_0 \in (\frac{1}{2}, 1)$ με $f(x_0) = 0$ και
 $f'(\frac{1}{2}) = e^{1/2} - 2 < 0$ $\left| \begin{array}{l} f' \text{ συνεχής} \end{array} \right.$ f έχει μονotonία f' μοναδική

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
f'	$-$	0	$+$
f	$\searrow$		$\nearrow$

$$f'(x_0) = 0 \Rightarrow \boxed{e^{x_0} = \frac{1}{x_0}} \quad (1)$$

$$\Rightarrow x_0 = \ln \frac{1}{x_0} = -\ln x_0 \quad (2)$$

γ) ο.ε. $f(x_0) = e^{x_0} - \ln x_0 \stackrel{(1)}{=} \frac{1}{x_0} + x_0$

δ) $f(x) \geq f(x_0)$ και $f(x_0) > 2 \Leftrightarrow \frac{1}{x_0} + x_0 > 2 \stackrel{x_0 > 0}{\Leftrightarrow} 1 + x_0^2 > 2x_0 \Leftrightarrow$

$$x_0^2 + 1 - 2x_0 > 0 \Leftrightarrow (x_0 - 1)^2 > 0 \text{ που ισχύει αφού } x_0 \neq 1$$