

Μάθημα 105ο -Επαναληπτικά θέματα

ΘΕΜΑ 24ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - \ln x - \lambda x, x > 0$ όπου $\lambda \in \mathbb{R}$. Αν ισχύει

$e - \lambda = e^e - 1 - \lambda e$, να αποδείξετε ότι :

α) η f είναι κυρτή.

β) υπάρχει ακριβώς ένα $x_0 \in (1, e)$ με $f'(x_0) = 0$.

γ) για την f' ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο $[1, e]$.

δ) η f παρουσιάζει ολικό ακρότατο στο x_0 που είναι το $e^{x_0}(1-x_0)+1-\ln x_0$.

α) f παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ ως άρα ως αλγεαυαριστική

$$f'(x) = e^x - \frac{1}{x} - \lambda \quad , \quad f''(x) = e^x + \frac{1}{x^2} > 0 \rightarrow f' \uparrow (0, +\infty) \rightarrow f \text{ κυρτή}$$

β) $f(1) = e - \lambda$
 $f(e) = e^e - 1 - \lambda e$ $\xrightarrow{\text{υποθεση}} f(1) = f(e) \xrightarrow{\text{Βολτα}} \text{υπαρχει } x_0 \in (1, e) \text{ με } f'(x_0) = 0$

$$\boxed{e^{x_0} - \frac{1}{x_0} = \lambda} \quad (1)$$

γ) f' συνεχής
 $1 < x_0 < e \xrightarrow{f' \uparrow} f'(1) < f'(x_0) = f'(e) \rightarrow f'(1) < 0 < f'(e) \rightarrow f'(1) \cdot f'(e) < 0$
 οπότε ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ. Bolzano για την f' στο $[1, e]$

δ)

$f(x_0)$ ολικό εγυκιστο

$$f(x_0) = e^{x_0} - \ln x_0 - \lambda x_0 \stackrel{(1)}{=} e^{x_0} - \ln x_0 - x_0 \left(e^{x_0} - \frac{1}{x_0} \right)$$

$$= e^{x_0} - \ln x_0 - x_0 e^{x_0} + 1 = e^{x_0}(1-x_0) + 1 - \ln x_0$$

ΘΕΜΑ 25ο

Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη, για την οποία ισχύει $f(x) \geq x^2 - x + 1$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) i. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$.

ii. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν έχει ασύμπτωτες.

iii. Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq \frac{3}{4}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) Αν επιπλέον $f(1) = 1$ και $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$ να αποδείξετε ότι:

i. $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$. ii. η f δεν είναι κοίλη.

iii) $f(x) \geq x^2 - x + 1, x \in \mathbb{R}$

α) i) για $x > 0$ έχω

$$\frac{f(x)}{x} \geq x - 1 + \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - 1 + \frac{1}{x} \right) = +\infty \text{ οπότε}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$$

ii) f συνεχής $\mathbb{R}$ οπότε δεν έχει κατακορυφή ασύμπτωτες

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ οπότε δεν έχει ασύμπτωτες στο $+\infty$

iii) $f(x) \geq x^2 - x + 1, x \in \mathbb{R}$

$$x^2 - x + 1 \geq \frac{3}{4} \Leftrightarrow x^2 - x + 1 - \frac{3}{4} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$x^2 - x + \frac{1}{4} \geq 0 \Leftrightarrow (x - \frac{1}{2})^2 \geq 0 \text{ που ισχύει}$$

Αρα $f(x) \geq \frac{3}{4}$.

b) i) $f(x) \geq \frac{3}{4} \Rightarrow f(x) \geq f(\frac{1}{2}), x \in \mathbb{R} \rightarrow f(\frac{1}{2}) \leftarrow$ έχουμε ορόσημο στο

Fermat $f'(\frac{1}{2}) = 0$

ii) Ανο ΘΜΤ για την f στο $[\frac{1}{2}, 1]$ υπάρχει $\xi \in (\frac{1}{2}, 1)$ με $f'(\xi) = \frac{f(1) - f(\frac{1}{2})}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1 - \frac{3}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$

Αγού $\xi > \frac{1}{2}$ και $f'(\xi) > f'(\frac{1}{2})$ η f' στρέφεται $\uparrow$ οπότε η f στρέφεται κοίτη.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ οπότε ορίζεται στο $+\infty$
ασυμπτωτική στο $+\infty$

για $x < 0$: $\frac{f(x)}{x} \leq x - 1 + \frac{1}{x}$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x - 1 + \frac{1}{x}) = -\infty$ οπότε και
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$ Αρα στρέφεται

ασυμπτωτική στο $-\infty$.