

ΘΕΜΑ 26ο

Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο, και η συνάρτηση

$g(x) = (x^2 - 1)f(x)$ για την οποία ισχύει $g(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε

ότι: $g(1) = g(-1) = 0$ οπότε $g(x) \geq g(1)$ οπότε $g(1), g(-1) \in \text{εξίσωτα}$
και $g(x) \geq g(-1)$

α) η g παρουσιάζει ελάχιστο για $x=1$ και για $x=-1$ και στη συνέχεια ότι

$$f(1) = f(-1) = 0.$$

$$\beta) f'(1) \geq 0 \text{ και } f'(-1) \leq 0.$$

γ) η f δεν είναι κοίλη.

$$\delta) \int_{-1}^1 (x^3 - 3x)f'(x)dx \leq 0.$$

α) g παραγωγίσιμη ως πράξη
Παραγωγισίμων. $g'(x) = 2xf(x) + (x^2-1)f'(x)$

$g(1), g(-1) \in \text{εξίσωτα}$ οπότε από Fermat

$$g'(1) = g'(-1) = 0$$

$$g'(1) = 0 \Rightarrow 2 \cdot 1 \cdot f(1) = 0 \Rightarrow f(1) = 0$$

$$g'(-1) = 0 \Rightarrow -2 \cdot f(-1) = 0 \Rightarrow f(-1) = 0$$

$$\beta) f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{g(x)}{x^2-1}}{\frac{x-1}{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)}{(x^2-1)(x-1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)}{(x+1)(x-1)^2} \geq 0 \text{ αφού } g(x) \geq 0, (x-1)^2 > 0 \text{ για } x \neq 1$$

$$f'(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\frac{g(x)}{x^2-1}}{\frac{x+1}{x+1}} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{g(x)}{(x^2-1)(x+1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{g(x)}{(x+1)^2(x-1)} \leq 0 \text{ αφού } g(x) \geq 0, (x+1)^2 > 0, x-1 < 0 \text{ για } x \neq -1$$

δ) Αν f κοίλη $\Rightarrow f' \downarrow \Rightarrow f'(-1) > f'(1)$ Άρα αφού $f'(1) \geq 0 \geq f'(-1)$
Άρα η f δεν είναι κοίλη

$$\delta) \int_{-1}^1 (x^3 - 3x)f'(x)dx \leq 0 \Leftrightarrow [(x^3 - 3x)f(x)]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 (x^3 - 3x)'f(x)dx \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$(1-3)f(1) - (-1+3)f(-1) - \int_{-1}^1 (3x^2-3)f(x)dx \leq 0 \Leftrightarrow 0-0-3\int_{-1}^1 (x^2-1)f(x)dx \leq 0$$

$$\Leftrightarrow -3\int_{-1}^1 g(x)dx \leq 0 \Leftrightarrow \int_{-1}^1 g(x)dx \geq 0 \text{ που ισχύει αφού } g(x) \geq 0, x \in \mathbb{R}$$

ΘΕΜΑ 27ο

Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο για την οποία ισχύει ότι $f'(x) > f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 0$. Έστω επίσης η συνάρτηση $g(x) = e^{-x} f(x)$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x > 0$ και $f(x) < 0$ για κάθε $x < 0$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(|\eta\mu x| + 1) = f(|x| + 1)$.

δ) Αν E το εμβαδόν που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f τον άξονα x' και τις ευθείες $x=0$ και $x=1$, να αποδείξετε ότι $E < f(1)$.

α) g παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξη παραγωγίσιμων f & e^{-x}
 $g'(x) = -e^{-x} f(x) + e^{-x} f'(x) = e^{-x} (f'(x) - f(x)) > 0$, γιατί αφού $e^{-x} > 0$ $f'(x) > f(x)$, $x \in \mathbb{R}$
 Άρα $g \uparrow \mathbb{R}$

β) για $x > 0 \xrightarrow{g \uparrow} g(x) > g(0) \Rightarrow e^{-x} f(x) > 0 \Rightarrow f(x) > 0$
 για $x < 0 \xrightarrow{g \uparrow} g(x) < g(0) \Rightarrow e^{-x} f(x) < 0 \Rightarrow f(x) < 0$

γ) για $x > 0$ είναι $f(x) > 0 \Rightarrow f'(x) > f(x) > 0 \Rightarrow f \uparrow (0, +\infty)$
 $f(|\eta\mu x| + 1) = f(|x| + 1) \xleftrightarrow{f \uparrow (0, +\infty)} |\eta\mu x| + 1 = |x| + 1 \Leftrightarrow |\eta\mu x| = |x| \Leftrightarrow x = 0$
 $(|\eta\mu x| + 1 > 0 \wedge |x| + 1 > 0) \xrightarrow{f: 1-1} \text{ στο } (0, +\infty)$

$$\delta) E = \int_0^1 |f(x)| dx \stackrel{f(x) > 0 \text{ για } x > 0}{=} \int_0^1 f(x) dx$$

$$f'(x) > f(x) \Rightarrow \int_0^1 f'(x) dx > \int_0^1 f(x) dx \Rightarrow [f(x)]_0^1 > E \Rightarrow f(1) - f(0) > E \stackrel{f(0)=0}{\Rightarrow} \boxed{f(1) > E}$$