

ΘΕΜΑ 28ο

Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία $f(0)=1$ και για κάθε

$x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x) + 2x = f'(x) + x^2$ (1)

α) Να αποδείξετε ότι αν $g(x) = f(x) - x^2$, τότε ισχύει

i. $g'(x) = g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

ii. $f(x) = e^x + x^2, x \in \mathbb{R}$

β) Να αποδείξετε ότι

i. Υπάρχει μοναδικό σημείο $M(x_0, f(x_0))$, $x_0 \in (-1, 0)$ στο οποίο η εφαπτομένη της C_f είναι οριζόντια.

ii. Η f παρουσιάζει ελάχιστο στο x_0 και για την ελάχιστη τιμή m της συνάρτησης ισχύει $e^{-1} < m < 2$.

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad g'(x) &= f'(x) - 2x = \\ &= \underline{f'(x) + x^2 - x^2} - 2x \stackrel{(1)}{=} \\ &= f(x) + 2x - x^2 - 2x = \\ &= f(x) - x^2 = g(x), \quad x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\text{ii)} \quad g'(x) = g(x) \Rightarrow g(x) = c \cdot e^x. \quad \text{για } x=0 \quad g(0) = c \cdot e^0$$

$$\begin{aligned} f(0) - 0^2 &= c \\ 1 &= c \end{aligned}$$

Τελικά

$$g(x) = e^x \Rightarrow$$

$$f(x) - x^2 = e^x \Rightarrow f(x) = e^x + x^2$$

β) i) Α.ν.Σ.ο. υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (-1, 0)$ με $f'(x_0) = 0$
 $f'(x) = e^x + 2x$ $f'(-1) = e^{-1} - 2 < 0$ $f'(0) = 1 > 0$ $\rightarrow$ Απο Θ.Βολτσα για f'
 $f''(x) = e^x + 2 > 0 \Rightarrow f' \uparrow$
 στο $[-1, 0]$ υπάρχει $x_0 \in (-1, 0)$
 με $f'(x_0) = 0$ και λόγω
 μονοτονίας $\rightarrow f'$ μοναδικό

ii)

x	-1	x_0	0
f'	-	0	+
f	$\searrow$		$\nearrow$

$$\begin{aligned} f(x_0) &= m \quad \text{ελαχιστο και} \\ -1 < x_0 < 0 &\Rightarrow \begin{cases} e^{-1} < e^{x_0} < e^0 \\ 1 > x_0^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \\ \begin{cases} \frac{1}{e} < e^{x_0} < 1 \\ 0 < x_0^2 < 1 \end{cases} &\stackrel{(*)}{\Rightarrow} \frac{1}{e} < e^{x_0} + x_0^2 < 2 \Rightarrow \\ \frac{1}{e} < f(x_0) < 2 &\Rightarrow \boxed{\frac{1}{e} < m < 2} \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 21ο

Έστω συνάρτηση g παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $g(0) = 1$ και

$$(1+x^2)g'(x) + 2xg^3(x) = 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

α) g συνεχής στο $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$
 $g(x) \neq 0, x \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι $g(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) Να μελετήσετε την g ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

g συνεχής προσήμο
 στο $\mathbb{R}$ και
 αφού $g(0) = 1 > 0$
 είναι
 $g(x) > 0, x \in \mathbb{R}$

γ) Να αποδείξετε ότι $\frac{1}{g^2(x)} = 2\ln(1+x^2) + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και κατόπιν να βρείτε

τον τύπο της g .

δ) Να υπολογίσετε το $\int_0^1 g'(x) \cdot \ln(x^2 + 1) dx$.

δ) 1ω Θεωρώ $h(x) = \frac{1}{g^2(x)} - 2\ln(1+x^2) - 1$

Παραγωγισμένη στο $\mathbb{R}$ ως πράξη

Παραγωγισμένη $\mathbb{R} \leftarrow$

$$h'(x) = \frac{-2g(x)g'(x)}{g^4(x)} - 2 \cdot \frac{2x}{1+x^2} = 0$$

$$= \frac{-2g'(x)}{g^3(x)} - 2 \cdot \frac{2x}{1+x^2} = \frac{-2xg^3(x)}{g^3(x)} - 2 \cdot \frac{2x}{1+x^2} = 2 \cdot \frac{2x}{1+x^2} - 2 \cdot \frac{2x}{1+x^2} = 0$$

Αρα $h(x) = C$. $h(0) = \frac{1}{g^2(0)} - 2\ln 1 - 1 = 1 - 1 = 0 \Rightarrow C = 0$

Συνεπώς $h(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{g^2(x)} = 2\ln(1+x^2) + 1, x \in \mathbb{R}$

2ω (1) $\Rightarrow (1+x^2)g'(x) = -2x \cdot g^3(x) \xrightarrow{g(x) > 0} -\frac{g'(x)}{g^3(x)} = \frac{2x}{1+x^2} \Rightarrow$

$$-g'(x) \cdot g^3(x) = \frac{2x}{1+x^2} \Rightarrow \left(\frac{g^{-2}(x)}{2}\right)' = (\ln(1+x^2))' \Rightarrow$$

$$\frac{g^{-2}(x)}{2} = \ln(1+x^2) + C \quad \text{για } x=0 \Rightarrow C = \frac{1}{2} \quad \text{οπότε}$$

$$\frac{g^{-2}(x)}{2} = \ln(1+x^2) + \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{g^2(x)} = 2\ln(1+x^2) + 1 \Rightarrow$$

$$g^2(x) = \frac{1}{2\ln(1+x^2) + 1} \xrightarrow{g(x) > 0} g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\ln(1+x^2) + 1}}$$

β) $(1+x^2)g'(x) = -2xg^3(x)$ (1)

$$g'(x) = \frac{-2x \cdot g^3(x)}{1+x^2}$$

$$g'(x) > 0 \xleftrightarrow{\frac{g(x) > 0}{1+x^2 > 0}} -2x > 0 \Leftrightarrow x < 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
g'	$+$	0	$-$
g	$\nearrow$	$\rightarrow$	

βρίσκω το $g(0) = 1$

$$g^2(x) = \frac{1}{2 \ln(1+x^2)+1} \implies g(x) = \frac{1}{\sqrt{2 \ln(1+x^2)+1}}$$

$$\delta) \int_0^1 g'(x) \cdot \ln(x^2+1) dx = \left[g(x) \cdot \ln(x^2+1) \right]_0^1 - \int_0^1 g(x) \frac{2x}{x^2+1} dx$$

$$\stackrel{\text{ii)}}{=} g(1) \ln 2 - 0 - \int_0^1 g(x) \frac{-g'(x)}{g^3(x)} dx = g(1) \ln 2 - \int_0^1 \frac{-g'(x)}{g^2(x)} dx =$$

$$= g(1) \ln 2 - \left[\frac{1}{g(x)} \right]_0^1 = g(1) \ln 2 - \left(\frac{1}{g(1)} - \frac{1}{g(0)} \right) = \dots$$

Θέμα 6°

Δίνεται συνάρτηση $f: [0,2] \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο $[0,2]$, παραγωγίσιμη στο $(0,2)$ και ισχύουν $f(1)=1$ και $f(x) \cdot f'(x) = -x+1$, για κάθε $x \in (0,2)$.

α) Να αποδείξετε ότι $f^2(x) = -x^2 + 2x$ για κάθε $x \in [0,2]$.

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \sqrt{-x^2 + 2x}$ για κάθε $x \in [0,2]$.

γ) Αφού αιτιολογήσετε ότι η γραφική παράσταση της f είναι ημικύκλιο με κέντρο $K(1,0)$ και ακτίνα 1, να τη σχεδιάσετε σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων.

δ) Να υπολογίσετε το $\int_0^2 f(x) dx$.

α) Θεωρώ $g(x) = f^2(x) + x^2 - 2x$, $x \in [0,2]$ παραγωγίσιμη στο $(0,2)$ ως πράξη παραγωγισίων και συνεχής στο $[0,2]$ ως πράξη συνεχών
 $g'(x) = 2f'(x)f(x) + 2x - 2 \stackrel{\text{ii)}}{=} 2(-x+1) + 2x - 2 = -2x + 2 + 2x - 2 = 0, x \in (0,2)$
 και επειδή g συνεχής στο $[0,2] \implies g(x) = C, x \in [0,2]$

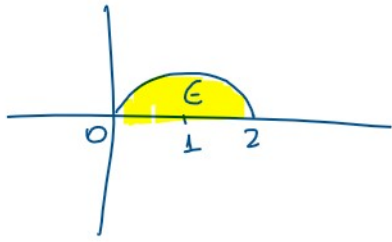
$$\text{Τέλος } g(1) = f^2(1) + 1^2 - 2 \cdot 1 \implies C = 1 + 1 - 2 \implies C = 0$$

$$\text{Τέλος } g(x) = 0 \implies f^2(x) = 2x - x^2, x \in [0,2]$$

$$\beta) f(x) = 0 \iff f^2(x) = 0 \iff 2x - x^2 = 0 \iff x = 0 \text{ ή } x = 2$$

Άρα $f(x) \neq 0, x \in (0,2)$ και αφού f συνεχής η f διατηρεί πρόσημο. Τέλος $f(1) > 0 \implies f(x) > 0, x \in (0,2)$ οπότε $f(x) = \sqrt{2x - x^2}$
 $x \in (0,2)$
 και επειδή $f(0) = f(2) = 0$ είναι τελικά $f(x) = \sqrt{2x - x^2}, x \in [0,2]$

8) Dato $f(x)=y$ $y \geq 0$ onoz $y = \sqrt{2x-x^2} \Rightarrow y^2 = 2x-x^2 \Rightarrow$
 $x^2-2x+y^2=0 \Rightarrow x^2-2x+1+y^2=1 \Rightarrow (x-1)^2+y^2=1, y \geq 0$
 Naš cikan upikuvana y karp $K(1,0)$ kan oniva $P=1$



$$6) \int_0^2 f(x) dx = F = \frac{\pi r^2}{2} = \frac{\pi \cdot 1^2}{2} = \frac{\pi}{2}$$