

Μάθημα 15ο - Θέματα πανελληνίων στις συναρτήσεις

$$f(x) = -x^3, \quad D_f = \mathbb{R}, \quad f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ υπαρκτή } f^{-1} \mu \in D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$$

Οι τεταγμένες των κοινών σημείων $f^{-1}(x) = \begin{cases} -\sqrt[3]{x}, & x \geq 0 \\ \sqrt[3]{-x}, & x < 0 \end{cases}$
των $C_f, C_{f^{-1}}$ είναι οι λύσεις των

$$\begin{aligned} \text{εξίσωση } f(x) = f^{-1}(x) &\iff f(f(x)) = f(f^{-1}(x)) \iff \\ x \in D_f \cap D_{f^{-1}} = \mathbb{R} &\quad -f(x)^3 = x \iff -(x^3)^3 = x \iff \\ &\quad -(-x^9) = x \iff x^9 - x = 0 \iff \\ &\quad x(x^8 - 1) = 0 \\ &\quad x = 0 \text{ ή } x = 1 \text{ ή } x = -1 \end{aligned}$$

$$\text{για } x=0, \quad f(0)=0$$

$$\text{για } x=1, \quad f(1)=-1$$

$$\text{για } x=-1, \quad f(-1)=1$$

Άρα κοινά σημεία $(0,0), (1,-1), (-1,1)$

Θέμα 1^ο (2024)

Δίνονται οι συναρτήσεις $g: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$

και $h: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $h(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$

α) Να προσδιορίσετε τις συναρτήσεις $f = \frac{g}{h}$ και $r = g \cdot h$.

Για τα παρακάτω ερώτημα να θεωρήσετε ότι $f(x) = \frac{x+1}{x-1}, x > 1$ και $r(x) = x - \frac{1}{x}, x \geq 1$

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και ότι $f^{-1} = f$, όπου f^{-1} είναι η αντίστροφη συνάρτηση της f .

γ) Να λύσετε την εξίσωση $(f^{-1}(f(x)))^2 = 1 + 4r(x)$.

$$\alpha) D_f = D_{\frac{g}{h}} = D_g \cap D_h = \{x \in D_h \mid h(x) \neq 0\} = (1, +\infty)$$

$$h(x) = 0 \iff \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = 0 \iff x - 1 = 0 \iff x = 1$$

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}} = \frac{\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x}}}{\frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x}}} = \frac{x+1}{x-1}$$

$$D_r = D_{g \cdot h} = D_g \cap D_h = [1, +\infty)$$

$$r(x) = g(x) \cdot h(x) = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \sqrt{x^2} - \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 = x - \frac{1}{x}$$

$$\beta) \text{ για κάθε } x_1, x_2 \in D_f = (1, +\infty) \text{ με } f(x_1) = f(x_2) \iff \frac{x_1+1}{x_1-1} = \frac{x_2+1}{x_2-1} \iff$$

$$(x_1+1)(x_2-1) = (x_2+1)(x_1-1) \iff x_1x_2 - x_1 + x_2 - 1 = x_1x_2 - x_2 + x_1 - 1 \iff$$

$$2x_2 = 2x_1 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \quad \text{Αρα } f: 1-1$$

2ος τρόπος $f(x) = \frac{x+1}{x-1} = \frac{x-1+2}{x-1} = \frac{x-1}{x-1} + \frac{2}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1}$

και βρίσκω το ποσότητα να

έστω $f(x) = y \Rightarrow \frac{x+1}{x-1} = y \Rightarrow x+1 = y(x-1) \Rightarrow x+1 = yx-y \Rightarrow$

$$x - yx = -y - 1 \Rightarrow x(1-y) = -y-1$$

Αν $y=1$ τότε $x \cdot 0 = -2$ Αδύνατο Αρα $y \neq 1$

Για $y \neq 1$ έχω $x = \frac{-y-1}{1-y}$

Επίσης $x > 1 \Leftrightarrow \frac{-y-1}{1-y} > 1 \Leftrightarrow \frac{-y-1}{1-y} - 1 > 0 \Leftrightarrow$

$$\frac{-y-1-1+y}{1-y} > 0 \Leftrightarrow \frac{-2}{1-y} > 0 \Leftrightarrow 1-y < 0 \Leftrightarrow y > 1$$

Αρα $f^{-1}(x) = \frac{-x-1}{1-x} = \frac{x+1}{x-1}, x > 1$

Ακόι $D_f = D_{f^{-1}} = (1, +\infty)$ και $f(x) = f^{-1}(x), \forall x > 1$ είναι $f = f^{-1}$

8) $\left(f^{-1}(f(x))\right)^2 = 1 + 4f(x) \Leftrightarrow x^2 = 1 + 4\left(x - \frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow$

Τίπιν
 $x \in D_f$ και $x \in D_{f^{-1}}$
 $\boxed{x > 1}$

$$x^2 = 1 + 4x - \frac{4}{x} \Leftrightarrow x^3 = x + 4x^2 - 4 \Leftrightarrow$$

$$x^3 - 4x^2 - x + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2(x-4) - (x-4) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x-4)(x^2-1) = 0$$

$x = 4$ ή $x = 1$ ή $x = -1$
 Ακριβή Απορ. Απορ.