

Μάθημα 16ο - Θέματα πανελληνίων στις συναρτήσεις

Θέμα 2° (2023)

Δίνεται η συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = \frac{4-e^{2x}}{e^x}$ και η συνάρτηση

$h: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $h(x) = \ln x$.

α) Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $f = g \circ h$

β) Έστω $f(x) = \frac{4-x^2}{x}$, $x > 0$

i) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία

ii) Να αποδείξετε ότι $\frac{4-\pi^2}{4-e^2} > \frac{\pi}{e}$

α) $D_f = D_{g \circ h} = \begin{cases} x \in D_h \\ \text{και} \\ h(x) \in D_g \end{cases} = \begin{cases} x > 0 \\ \text{και} \\ \ln x \in \mathbb{R} \end{cases} = (0, +\infty)$

$(g \circ h)(x) = g(h(x)) = \frac{4-e^{2\ln x}}{e^{\ln x}} = \frac{4-e^{\ln x^2}}{x} = \frac{4-x^2}{x}$, $x > 0$

β) i) για κάθε $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ με $x_1 < x_2 \xrightarrow{x_1, x_2 > 0} x_1^2 < x_2^2 \Rightarrow$
 $-x_1^2 > -x_2^2 \Rightarrow 4-x_1^2 > 4-x_2^2$ (1)

Επίσης, $0 < x_1 < x_2 \Rightarrow \frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2}$ (2)

(1) x (2) $\Rightarrow \frac{4-x_1^2}{x_1} > \frac{4-x_2^2}{x_2} \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow f \downarrow (0, +\infty)$

δ) $\frac{4-\pi^2}{4-e^2} > \frac{\pi}{e} \xLeftrightarrow \frac{4-e^2}{4-\pi^2} < \frac{(4-e^2)\pi}{e} \xLeftrightarrow \frac{4-\pi^2}{\pi} < \frac{4-e^2}{e} \Leftrightarrow$
 $f(\pi) < f(e) \xLeftrightarrow \pi > e$ που ισχύει αφού
 $\pi \approx 3,14$
 $e \approx 2,71$

Θέμα 3° (2022)

Δίνεται η συνάρτηση $f: (-\infty, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$ και η συνάρτηση

$g: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = \sqrt{x}$.

α) Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $h = f \circ g$.

β) Αν $h(x) = (x-1)^2$, $x \in [0, 1]$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h είναι "1-1" και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση h^{-1} της h .

$$\alpha) D_h = D_{f \circ g} = \left\{ \begin{array}{l} x \in D_g \\ \text{και} \\ g(x) \in D_f \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} x \geq 0 \\ \text{και} \\ \sqrt{x} \leq 1 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} x \geq 0 \\ \text{και} \\ x \leq 1 \end{array} \right\} = [0, 1]$$

$$h(x) = f(g(x)) = (\sqrt{x})^4 - 2\sqrt{x}^2 + 1 = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2, \quad x \in [0, 1]$$

$$\beta) \text{ Για να έχουμε } x_1, x_2 \in D_h = [0, 1] \text{ με } h(x_1) = h(x_2) \Rightarrow$$

$$(x_1 - 1)^2 = (x_2 - 1)^2 \Rightarrow |x_1 - 1| = |x_2 - 1| \xrightarrow{x_1, x_2 \in [0, 1]}$$

$$-x_1 + 1 = -x_2 + 1 \Rightarrow -x_1 = -x_2 \Rightarrow x_1 = x_2 \text{ Άρα } h: 1-1$$

$$y = h(x) \Leftrightarrow y = (x-1)^2$$

$$\text{Επειδή } (x-1)^2 \geq 0 \text{ πρέπει } y \geq 0, \text{ οπότε } \sqrt{y} = \sqrt{(x-1)^2} \Rightarrow$$

$$\sqrt{y} = |x-1| \xrightarrow{x \in [0, 1]} \sqrt{y} = -x + 1 \Rightarrow \boxed{x = 1 - \sqrt{y}}, \quad y \geq 0$$

$$(\text{γνω}) \quad 0 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq 1 - \sqrt{y} \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq -\sqrt{y} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$1 \geq \sqrt{y} \geq 0 \Leftrightarrow \boxed{1 \geq y \geq 0}$$

$$\text{Τελικά } f^{-1}(x) = 1 - \sqrt{x}, \quad x \in [0, 1]$$

Θέμα 4^ο (2020)

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 + \alpha$ και $g(x) = x + \beta$ όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει $(f \circ g)(x) = x^2 + x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις f, g είναι 1-1 και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτησή τους, εφόσον αυτή υπάρχει.

β) Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $g^{-1} \circ f$ και να παραστήσετε γραφικά

τη συνάρτηση $\varphi(x) = \sqrt{(g^{-1} \circ f)(x)}$.

$$\alpha) D_f = \mathbb{R}$$

$$\text{για να έχουμε } x_1, x_2 \in D_f \text{ με } f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1^2 + \alpha = x_2^2 + \alpha \Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow$$

$$x_1 = x_2 \text{ ή } x_1 = -x_2 \text{ Άρα } f \text{ όχι } 1-1$$

$$D_g = \mathbb{R}$$

$$\text{για να έχουμε } x_1, x_2 \in D_g \text{ με } g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow x_1 + \beta = x_2 + \beta \Rightarrow x_1 = x_2$$

$$\text{Άρα } g: 1-1$$

$$(f \circ g)(x) = x^2 + x \Leftrightarrow (x + \beta)^2 + \alpha = x^2 + x \Leftrightarrow x^2 + 2\beta x + \beta^2 + \alpha = x^2 + x$$

$$\text{για να έχουμε } x \in \mathbb{R} \text{ οπότε}$$

$$(f \circ g)(x) = x^2 + x \iff (x+b) + a = x + x \iff x + \dots$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Συγκρίνω Given ισότητα να συγκρίνω απόψε

$$2b = 1 \quad \text{και} \quad b^2 + a = 0$$

$$b = \frac{1}{2}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + a = 0$$

$$a = -\frac{1}{4}$$

$$\text{Συγκρίνω } f(x) = x^2 - \frac{1}{4}, \quad g(x) = x + \frac{1}{2}$$

$$\text{και } y = g(x) \iff y = x + \frac{1}{2} \iff x = y - \frac{1}{2}, \quad y \in \mathbb{R}$$

$$\text{Αρα } g^{-1}(x) = x - \frac{1}{2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$b) \quad D_{g^{-1} \circ f} = \left\{ \begin{array}{l} x \in D_f \\ \text{και} \\ f(x) \in D_{g^{-1}} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} x \in \mathbb{R} \\ \text{και} \\ x \in \mathbb{R} \end{array} \right\} = \mathbb{R}$$

$$(g^{-1} \circ f)(x) = f(x) - \frac{1}{2} = x^2 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = x^2 - \frac{3}{4}$$

$$\varphi(x) = \sqrt{x^2 - \frac{3}{4}}$$

$$\text{Οπότε } \varphi(x) = y \implies y = \sqrt{x^2 - \frac{3}{4}} \quad y \geq 0$$

$$y^2 = x^2 - \frac{3}{4} \implies x^2 - y^2 = \frac{3}{4}$$

ισοσκελής
υπερβολή

