

Μάθημα 17ο - Θέματα πανελληνίων στις συναρτήσεις

Θέμα 5° (2020)

Δίνονται οι συναρτήσεις :  $f : (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο  $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$  και

$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο  $g(x) = e^x$

α) Να προσδιορίσετε τη  $f \circ g$

β) Να δείξετε ότι η  $f \circ g$  είναι 1-1 και να βρείτε το σύνολο τιμών της και τον τύπο της  $(f \circ g)^{-1}$

γ) Αν  $\phi(x) = (f \circ g)^{-1}(x)$ , να δείξετε ότι  $\phi(x) = \ln(1 + \frac{3}{x-1})$ ,  $x > 1$  και να μελετήσετε τη συνάρτηση  $\phi$  ως προς τη μονοτονία της.

$$a) D_{f \circ g} = \left\{ \begin{array}{c} x \in D_g \\ \text{και} \\ g(x) \in D_f \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} x \in \mathbb{R} \\ \text{και} \\ e^x > 1 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} x \in \mathbb{R} \\ \text{και} \\ x > 0 \end{array} \right\} = (0, +\infty)$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \frac{e^x + 2}{e^x - 1}, \quad x > 0$$

β) για κάθε  $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$  με  $(f \circ g)(x_1) = (f \circ g)(x_2) \Rightarrow$

$$\frac{e^{x_1} + 2}{e^{x_1} - 1} = \frac{e^{x_2} + 2}{e^{x_2} - 1} \Rightarrow (e^{x_1} + 2)(e^{x_2} - 1) = (e^{x_2} + 2)(e^{x_1} - 1) \Rightarrow$$

$$\cancel{e^{x_1} e^{x_2}} - \cancel{e^{x_1}} + 2e^{x_2} - 2 = \cancel{e^{x_1} e^{x_2}} - \cancel{e^{x_2}} + 2e^{x_1} - 2 \Rightarrow$$

$$3e^{x_2} = 3e^{x_1} \Rightarrow e^{x_2} = e^{x_1} \xrightarrow{e^x \uparrow} x_2 = x_1$$

Άρα  $f \circ g$  1-1

$$\text{Έστω } y = (f \circ g)(x) \Leftrightarrow y = \frac{e^x + 2}{e^x - 1} \Leftrightarrow y e^x - y = e^x + 2$$

$$\Leftrightarrow y e^x - e^x = y + 2 \Leftrightarrow e^x (y - 1) = y + 2$$

Αν  $y = 1$  τότε  $e^x \cdot 0 = 2$  Άτονο Άρα  $y \neq 1$  οπότε

$$e^x = \frac{y+2}{y-1}$$

$$\text{Άρα } e^x > 0 \Leftrightarrow \frac{y+2}{y-1} > 0$$

οπότε  $y < -2$  ή  $y > 1$

$$\text{και } x = \ln \frac{y+2}{y-1}$$

$$\text{Όμως } x > 0 \Leftrightarrow \ln \frac{y+2}{y-1} > 0 \Leftrightarrow \ln \frac{y+2}{y-1} > \ln 1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{y+2}{y-1} > 1 \Leftrightarrow \frac{y+2}{y-1} - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{y+2-y+1}{y-1} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{3}{y-1} > 0 \Leftrightarrow y-1 > 0 \Leftrightarrow \boxed{y > 1}$$

$$\text{Τέλος } (f \circ g)^{-1}(x) = \ln \frac{x+2}{x-1}, \quad x > 1$$

$$\delta) \varphi(x) = (f \circ g)^{-1}(x) = \ln \frac{x+2}{x-1} = \ln \frac{x-1+3}{x-1} = \ln \left( \frac{x-1}{x-1} + \frac{3}{x-1} \right) = \ln \left( 1 + \frac{3}{x-1} \right)$$

οπότε για κάθε  $x_1, x_2 \in (1, +\infty)$  με  $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 - 1 < x_2 - 1 \xrightarrow{\frac{x-1}{x-1} \uparrow} \frac{3}{x-1} \downarrow$

οπότε για κάθε  $x_1, x_2 \in (1, +\infty)$  με  $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 - 1 < x_2 - 1 \xrightarrow{x_1-1 > 0, x_2-1 > 0}$

$$\frac{1}{x_1-1} > \frac{1}{x_2-1} \Rightarrow \frac{3}{x_1-1} > \frac{3}{x_2-1} \Rightarrow 1 + \frac{3}{x_1-1} > 1 + \frac{3}{x_2-1} \Rightarrow \ln\left(1 + \frac{3}{x_1-1}\right) > \ln\left(1 + \frac{3}{x_2-1}\right)$$

Άρα  $\varphi \downarrow (1, +\infty)$

#### ΘΕΜΑ 6ο (2020)

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{3x+1}{x-3}$ ,  $x \in \mathbb{R} - \{3\}$ .

α) Να αποδείξετε ότι η  $f$  αντιστρέφεται στο  $\mathbb{R} - \{3\}$ .

β) Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις  $f$  και  $f^{-1}$  είναι ίσες.

γ) Να αποδείξετε ότι  $(f \circ f)(x) = x$  για κάθε  $x \in \mathbb{R} - \{3\}$ .

α) για κάθε  $x_1, x_2 \in \mathbb{R} - \{3\}$  με  $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{3x_1+1}{x_1-3} = \frac{3x_2+1}{x_2-3} \Rightarrow$

$$(3x_1+1)(x_2-3) = (x_1-3)(3x_2+1) \Rightarrow 3x_1x_2 - 9x_1 + x_2 - 3 = 3x_1x_2 + x_1 - 9x_2 - 3 \Rightarrow$$

$$10x_2 = 10x_1 \Rightarrow x_2 = x_1 \quad \text{Άρα } f: 1-1$$

β) Έστω  $y = f(x) \Leftrightarrow y = \frac{3x+1}{x-3} \Leftrightarrow y(x-3) = 3x+1 \Leftrightarrow yx - 3y = 3x+1 \Leftrightarrow$

$$yx - 3x = 3y + 1 \Leftrightarrow x(y-3) = 3y+1$$

Αν  $y = 3$  τότε  $x \cdot 0 = 10$  Άρα  $y \neq 3$  οπότε

$$x = \frac{3y+1}{y-3} \Leftrightarrow f^{-1}(y) = \frac{3y+1}{y-3}, y \neq 3$$

$$f^{-1}(x) = \frac{3x+1}{x-3}, x \neq 3$$

Άρα  $D_f = D_{f^{-1}} = \mathbb{R} - \{3\}$  και  $f^{-1}(x) = f(x)$ , για  $x \neq 3$  Άρα  $f = f^{-1}$

γ)  $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f^{-1}(f(x)) = x$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R} - \{3\}$

$$D_{f \circ f} = \left\{ x \in D_f \mid \text{και } f(x) \in D_f \right\} = \left\{ x \neq 3 \mid \text{και } f(x) \neq 3 \right\} = \left\{ x \neq 3 \mid \frac{3x+1}{x-3} \neq 3 \right\} \Leftrightarrow 3x+1 \neq 3x-9 \Leftrightarrow 1 \neq -9 \text{ που είναι αληθές}$$

Τελικά  $D_{f \circ f} = \mathbb{R} - \{3\}$