

2. Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και με τη βοήθεια αυτής να βρείτε, εφόσον υπάρχει, το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, όταν:

i) $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}$, $x_0 = 2$

ii) $f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 1 \\ \frac{1}{x}, & x > 1 \end{cases}$, $x_0 = 1$

$f(1,9) = -1,1$

, $f(2,1) = -0,9$

$f(1,99) = -1,01$

, $f(2,01) = -0,99$

$f(1,999) = -1,001$

, $f(2,001) = -0,999$

$f(1,9999) = -1,0001$

, $f(2,0001) = -0,9999$

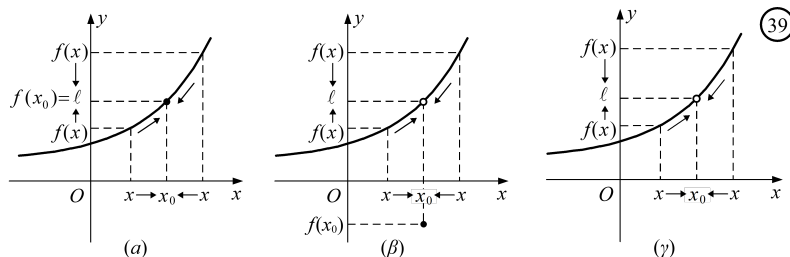
$f(x) = \frac{(x-2)(x-3)}{x-2}$
 $= x-3, x \neq 2$

Παρατηρώ ότι καθώς το x παίρνει τιμές κοντά στο 2
 το $f(x)$ αντιστοίχως παίρνει τιμές κοντά στο -1

x παίρνει τιμές κοντά στο 2 сверху. $x \rightarrow 2$ x τείνει
 στο 2

το $f(x)$ ———— -1 сверху $f(x) \rightarrow -1$
 Λέμε συ το οριο πως
 καθώς το x τείνει
 στο 2 είναι -1
 και συμπληρώνω $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -1$

Όταν οι τιμές μιας συνάρτησης f προσεγγίζουν όσο θέλουμε έναν πραγματικό αριθμό ℓ , καθώς το x προσεγγίζει με οποιονδήποτε τρόπο τον αριθμό x_0 , τότε γράφουμε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ και διαβάζουμε “το όριο της $f(x)$, όταν το x τείνει στο x_0 , είναι ℓ ” ή “το όριο της $f(x)$ στο x_0 είναι ℓ ”.

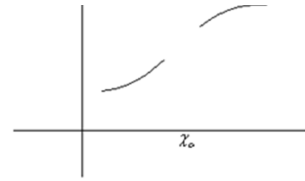


Παρατηρήσεις

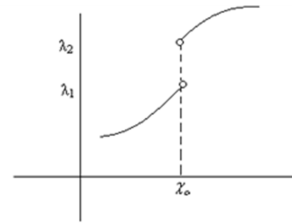
- Η έννοια του ορίου είναι ταυτόσημη με την έννοια του προσεγγίζω, του πλησιάζω, του τείνω. Όταν λέμε ότι το x τείνει στο x_0 και συμβολίζουμε $x \rightarrow x_0$, εννοούμε ότι το x πλησιάζει το x_0 κατά οποιοδήποτε τρόπο δηλαδή το x μπορεί να πάρει τιμές πολύ κοντά στο x_0 (είτε λίγο μικρότερες, είτε λίγο μεγαλύτερες είτε και τα δύο) χωρίς όμως ποτέ να γίνει ίσο με x_0 . Όταν λέμε ότι το όριο της f στο x_0 είναι ℓ και γράφουμε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ εννοούμε ότι το $f(x)$ πλησιάζει τον αριθμό ℓ χωρίς ποτέ και αυτό να γίνει ίσο με ℓ . Δηλαδή το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ σημαίνει ότι $f(x) \rightarrow \ell$ και όχι ότι $f(x) = \ell$.
- Για να αναζητήσουμε το όριο της f στο x_0 , πρέπει η f να ορίζεται όσο θέλουμε “κοντά στο x_0 ”, δηλαδή η f να είναι ορισμένη σ’ ένα σύνολο της μορφής $(a, x_0) \cup (x_0, b)$ ή (a, x_0) ή (x_0, b) (Αποδεικνύεται ότι το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ είναι ανεξάρτητο των άκρων a, b των διαστημάτων (a, x_0) και



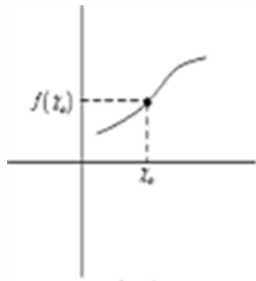
θέλουμε “κοντά στο x_0 ”, δηλαδή η f να είναι ορισμένη σ’ ένα σύνολο της μορφής $(a, x_0) \cup (x_0, \beta)$ ή (a, x_0) ή (x_0, β) (Αποδεικνύεται ότι το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ είναι ανεξάρτητο των άκρων a, β των διαστημάτων (a, x_0) και (x_0, β) στα οποία θεωρούμε ότι είναι ορισμένη η f).



- Το x_0 μπορεί να ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης ή να μην ανήκει σ’ αυτό. Δεν μας ενδιαφέρει δηλαδή αν η f ορίζεται στο x_0 , αρκεί να ορίζεται όσο κοντά θέλουμε στο x_0 δηλαδή να είναι ορισμένη σε σύνολα της μορφής της προηγούμενης παρατήρησης.
- Το όριο μιας συνάρτησης στο x_0 δεν υπάρχει πάντα όπως στην περίπτωση που τα πλευρικά όρια υπάρχουν και είναι διαφορετικά. Αν όμως υπάρχει είναι μοναδικό.

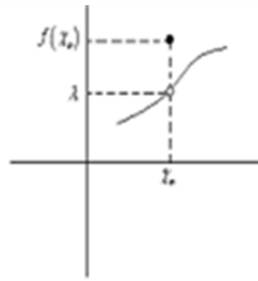


- Η τιμή της f στο x_0 , όταν υπάρχει, μπορεί να είναι ίση με το όριό της στο x_0 ή διαφορετική από αυτό. Δηλαδή αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lambda$ τότε μπορεί να είναι $f(x_0) = \lambda$, μπορεί και $f(x_0) \neq \lambda$, μπορεί και να μην ορίζεται καν το $f(x_0)$ στην περίπτωση που το x_0 δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της f .



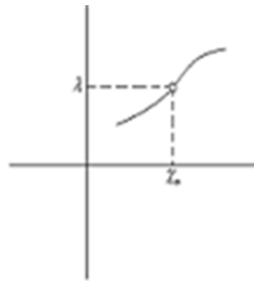
σχήμα 1

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lambda$ με $\lambda = f(x_0)$



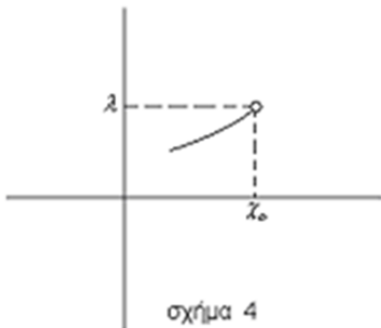
σχήμα 2

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lambda$ με $\lambda \neq f(x_0)$



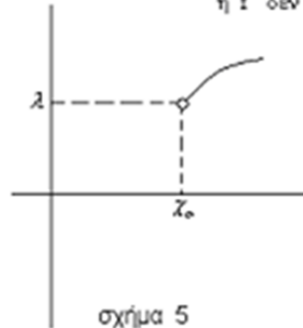
σχήμα 3

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lambda$ ενώ η f δεν ορίζεται στο x_0



σχήμα 4

η f ορίζεται μόνο αριστερά του x_0
οπότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lambda$

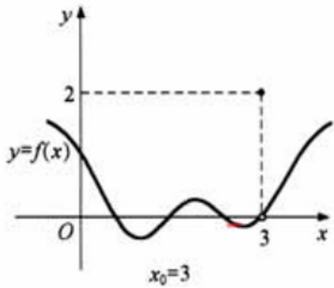


σχήμα 5

η f ορίζεται μόνο δεξιά του x_0
οπότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lambda$

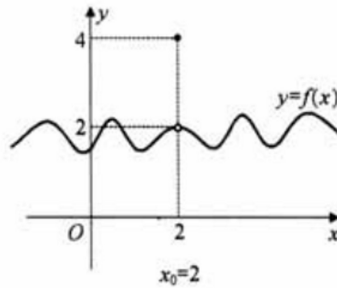
Α' ΟΜΑΔΑΣ

1. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ και το $f(x_0)$, εφόσον υπάρχουν, όταν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι:



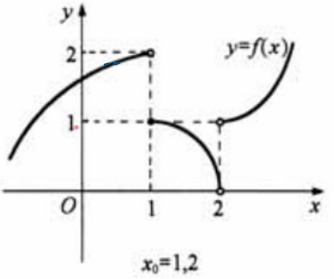
$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 0$$

$$f(3) = 2$$



$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2$$

$$f(2) = 4$$



$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1$$

$$\text{Το } \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

δεν υπάρχει.

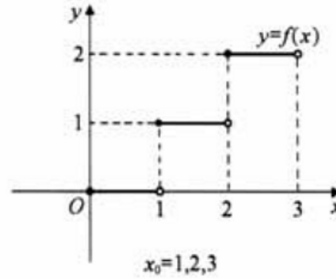
$$f(1) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1$$

$\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ δεν υπάρχει

$f(2)$ δεν ορίζεται



$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2$$

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ δεν υπάρχει
 $f(1) = 1$

$\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ δεν υπάρχει
 $f(2) = 2$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 2$$

$$f(3) \text{ δεν ορίζεται}$$

4. Δίνεται η συνάρτηση f που είναι ορισμένη στο $[-2, +\infty)$ και έχει γραφική παράσταση που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Να εξετάσετε ποιοι από τους επόμενους ισχυρισμούς είναι αληθείς.

i) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 2$ Σ

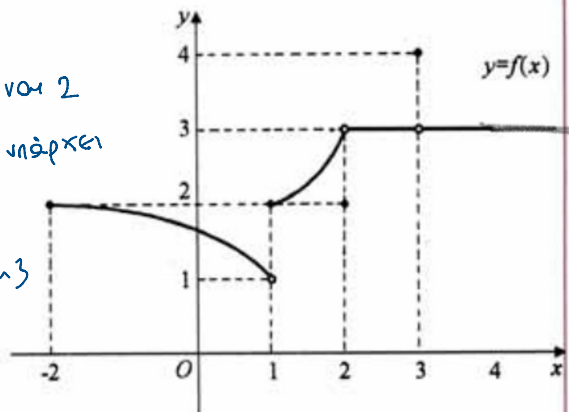
ii) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1$ $\wedge$ είναι 2

iii) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$ $\wedge$ δεν υπάρχει

iv) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$ Σ

v) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 4$ $\wedge$ είναι 3

vi) $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 3$ Σ



$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$$

5. Δίνεται μια συνάρτηση f ορισμένη στο $(a, x_0) \cup (x_0, \beta)$, με $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lambda^2 - 6$ και $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lambda$. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, για τις οποίες υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, τότε ισχύει η ισοδυναμία:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \ell$$

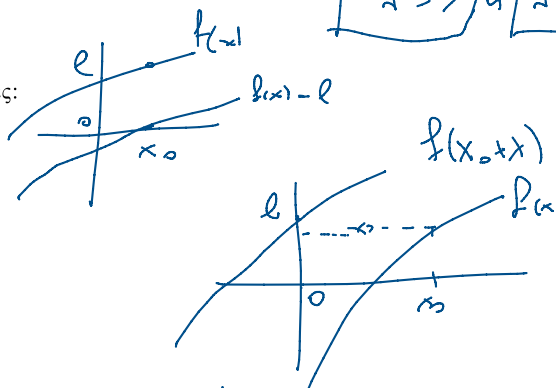
Πρέπει και αρκεί $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \Leftrightarrow 2^2 - 6 = 2$

$$2^3 - 2 - 6 = 0$$

$$2 = 3 \text{ ή } 2 = -2$$

Συνέπεια του παραπάνω ορισμού είναι οι ακόλουθες ισοδυναμίες:

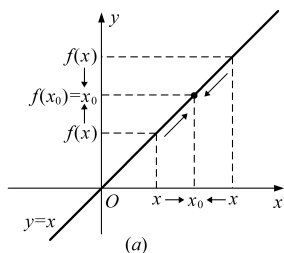
$$\begin{aligned} (\alpha) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell &\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - \ell) = 0 \\ (\beta) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell &\Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = \ell \\ (\gamma) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell, \quad x_0 \neq 0 &\Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 1} f(x_0 h) = \ell \end{aligned}$$



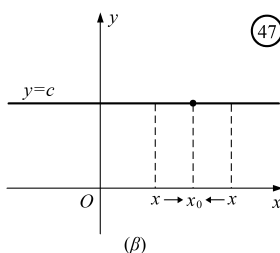
Όριο ταυτοτικής - σταθερής συνάρτησης

Με τη βοήθεια του ορισμού του ορίου αποδεικνύεται ότι:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$$



$$\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$$



Θέμα 1ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x-1} - \sqrt{x^2-3x+2}$

Να βρείτε το πεδίο ορισμού της και στη συνέχεια να βρείτε από τα παρακάτω όρια είναι καλά ορισμένα (μπορούμε να αναζητήσουμε) και γιατί

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow 1} f(x), \quad \beta) \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x), \quad \gamma) \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x), \quad \delta) \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$$

Πρέπει και αρκεί $x-1 \geq 0$ και $x^2-3x+2 \geq 0$

$$x \geq 1$$

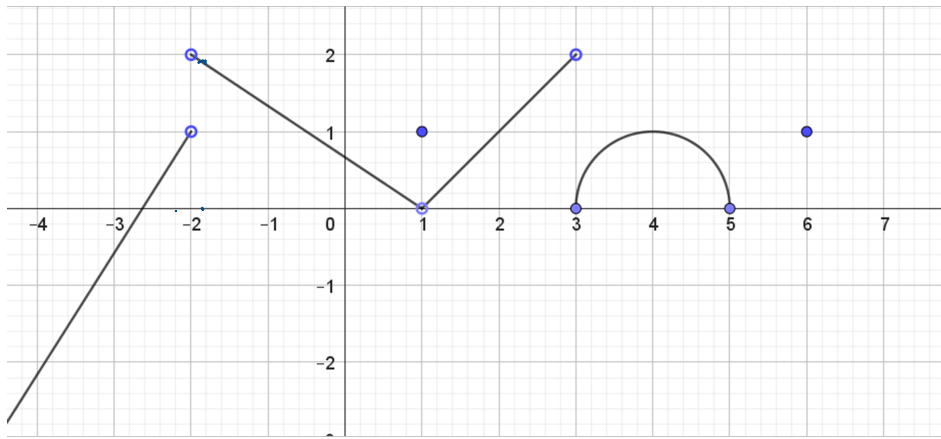
$$x^2-3x+2 \geq 0$$

$$x \leq 1 \text{ ή } x \geq 2$$

$$D_f = [2, +\infty) \cup \{1\}$$

α) οχι, β) ναι, γ) οχι, δ) ναι $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$

Θέμα 2ο



$$Df = (-\infty, 5] \cup \{6\}$$

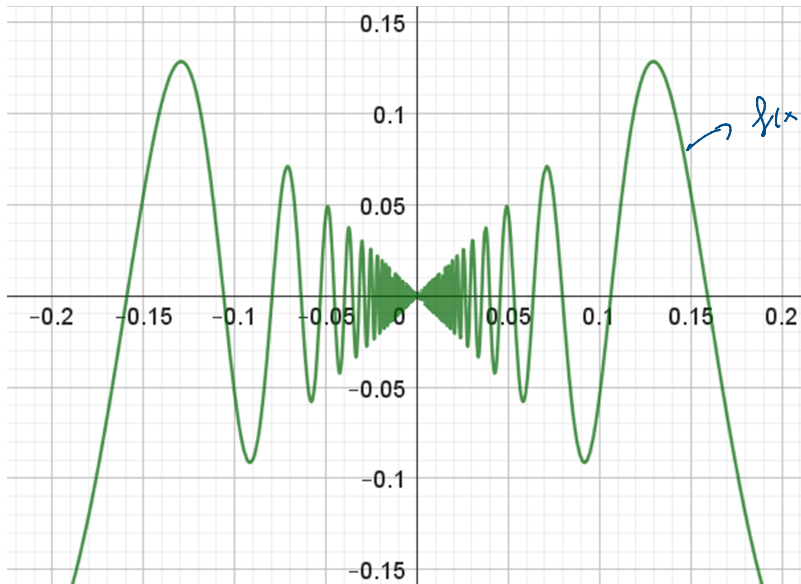
A) Με βάση το παρακάτω σχήμα να βρείτε όσα από τα παρακάτω όρια υπάρχουν

$\alpha) \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$, $\beta) \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = 2$, $\gamma) \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = 1$, $\delta) \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \text{δεν υπάρχει}$

$\epsilon) \lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 0$, $\sigma\tau) \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 0$, $\zeta) \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 2$, $\eta) \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \text{δεν υπάρχει}$

B) Έχει νόημα να αναζητήσουμε το $\lim_{x \rightarrow 6} f(x)$; *οχι διότι η f δεν ορίζεται όσο κοντά σε 6 θέλουμε ούτε για μικρότερες ώστε και για μικρότερες τιμές*

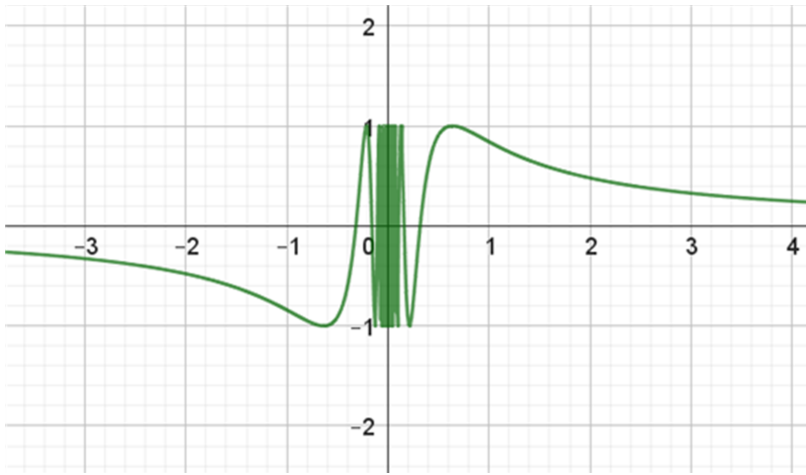
Θέμα 3ο Με βάση τα παρακάτω σχήματα να βρείτε σε κάθε περίπτωση το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.



$$f(x) = x \cdot \cos \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

Σχόλιο: Η f δεν είναι μονότονη κοντά στο x_0



$$f(x) = \sin \frac{1}{x}$$

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ does not exist