

Μάθημα 21ο - Ασκήσεις στις ιδιότητες ορίων

Θέμα 3ο (ρητή συνάρτηση μορφής $\frac{0}{0}$ - παραγοντοποίηση με σχήμα Horner)

Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x - 2}{x^5 + x - 2}$.
$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2+x+2)}{(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+2)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Horner για $(x^2+x+2):(x-1)$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ & & 1 & 1 & 2 \\ \hline & 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}$$

Horner για $(x^5+x-2):(x-1)$

$$\begin{array}{r|rrrrrr} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ & & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}$$

Θέμα 4ο (άρρητη συνάρτηση μορφής $\frac{0}{0}$ - πολζω αριθμητή και παρονομαστή με τη συζυγή παράσταση του όρου που ευθύνεται για την απροσδιοριστία)

Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x+8}-3)(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt[3]{x}-1)}$. =

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x+8}-3)(\sqrt{x+8}+3)(\sqrt{x}^2+\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt[3]{x}^2+\sqrt[3]{x}+1^2)(\sqrt{x+8}+3)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+8-9)(\sqrt{x}^2+\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)}{(x-1)(\sqrt{x+8}+3)} = \frac{3 \cdot (-1)}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

Θέμα 5ο (συνάρτηση μορφής $\frac{0}{0}$ σε τύπο με απόλυτα- αν δεν μηδενίζεται κάποια παράσταση μέσα σε απόλυτο βρίσκω το πρόσημό της με όριο και διάταξη, ενώ αν μηδενίζεται έστω και μία παίρνω πλευρικά)

Να βρείτε τα όρια : α) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x^3 + x + 2| - 4}{|x^3 - x - 2| - 2}$. β) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x-1| + 2x - 2}{|x-2| - 1}$

α) $\lim_{x \rightarrow 1} (x^3 + x + 2) = 4 > 0 \xrightarrow[\text{διατηρείται}]{\text{ορίο}} x^3 + x + 2 > 0, \text{ για } x \rightarrow 1$

$\lim_{x \rightarrow 1} (x^3 - x - 2) = -2 < 0 \xrightarrow[\text{διατηρείται}]{\text{ορίο}} x^3 - x - 2 < 0, \text{ για } x \rightarrow 1$

ορίζεται $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x + 2 - 4}{-x^3 + x + 2 - 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x - 2}{-x^3 + x} =$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2+x+2)}{(x-1)(-x^2-x)} = \frac{4}{-2} = -2$$

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ & 1 & 1 & 2 & \\ 1 & 1 & 2 & 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ & -1 & -1 & 0 & \\ -1 & -1 & 0 & 0 & \end{array}$$

β) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x-1| + 2x-2}{|x-2| - 1}$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1 + 2x-2}{-x+2-1} =$$

x	1	2
x-1	-	+
x-2	-	+

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3(x-1)}{-(x-1)} = -3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-x+1+2x-2}{-x+2-1} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-1}{-(x-1)} = -1$$

Συνεπώς το όριο δεν υπάρχει

Θέμα 6ο (όριο συνάρτησης πολλαπλού τύπου – αν αναζητώ όριο σε σημείο όπου εκατέρωθεν αλλάζει ο τύπος τότε πλευρικά, αν όχι επιλέγω κατάλληλη περιοχή)

$$\text{Έστω } f(x) = \begin{cases} x+1 & , x \leq 1 \\ 2x & , 1 < x \leq 2 \\ x-1 & , x > 2 \end{cases}$$

Να βρείτε τα όρια: $\alpha) \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, $\beta) \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, $\gamma) \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$, $\gamma) \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} f(x)$

να βρείτε τα όρια: $\alpha) \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, $\beta) \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, $\gamma) \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$, $\gamma) \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} f(x)$

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x+1) = 1$$

$$\beta) \left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} (x+1) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} 2x = 2 \end{aligned} \right\} \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$$

$$\delta) \left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} 2x = 4 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} (x-1) = 1 \end{aligned} \right\} \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \text{ δεν υπάρχει}$$

$$\epsilon) \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} 2x = 3$$

Θέμα 7ο (εύρεση παραμέτρων ώστε να υπάρχει ένα όριο σε σημείο αλλαγής τύπου συνάρτησης πολλαπλού τύπου— απαιτώ τα πλευρικά όρια να είναι ίσα)

$$\text{Έστω } f(x) = \begin{cases} x + \alpha & , x \leq 1 \\ 2x - \beta & , 1 < x \leq 2 \\ x + \gamma & , x > 2 \end{cases} \quad \text{Να βρείτε τις τιμές των } \alpha, \beta, \gamma \text{ αν είναι γνωστό ότι}$$

το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ υπάρχει και $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5$.

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \text{ υπάρχει} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} (x + \alpha) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2x - \beta) \Rightarrow$$

$$1 + \alpha = 2 - \beta \Rightarrow \boxed{\alpha + \beta = 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 5 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 5 \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} (2x - \beta) = 5 \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} (x + \gamma) = 5$$

$$4 - \beta = 5 \quad 2 + \gamma = 5$$

$$\boxed{\beta = -1} \quad \boxed{\gamma = 3}$$

$$\text{και } \alpha + \beta = 1 \rightarrow \boxed{\alpha = 2}$$