Μάθημα 23ο - Τριγωνομετρικά όρια - όρια σύνθετης

Θέμα 6ο Αν $f:(1,2)\to\Re$ με $f((1,2))=\Re$ η οποία είναι 1-1 να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0}(x\cdot f^{-1}(x))$

$f:(1,2)\to\mathbb{R}$, f 1-1, $f((1,2))=\mathbb{R} \Rightarrow D_{f^{-1}}=\mathbb{R}$

$f^{-1}(\mathbb{R})=D_f=(1,2) \Rightarrow 1<f^{-1}(x)<2$, $x\in\mathbb{R}$

για $\underline{x>0}$: $x<xf^{-1}(x)<2x$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^+} x=0\\ \lim\limits_{x\to 0^+} 2x=0\end{array}\right\} \xrightarrow[\text{περιβολής}]{\text{κριτήριο}} \lim\limits_{x\to 0^+} x\cdot f^{-1}(x)=0$$

για $x<0$: $x>xf^{-1}(x)>2x$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-} x=0\\ \lim\limits_{x\to 0^-} 2x=0\end{array}\right\} \xrightarrow[\text{περιβολής}]{\text{κριτήριο}} \lim\limits_{x\to 0^-} x\cdot f^{-1}(x)=0$$

Τελικά $\lim\limits_{x\to 0} xf^{-1}(x)=0$

Θέμα 7ο Να βρείτε τα όρια: $\alpha)\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu^2 x}{x}$, $\beta)\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sigma\upsilon\nu^2 x}{x}$, $\gamma)\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sigma\upsilon\nu^2 x}{x^2}$

$\delta)\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu^2 x-x\cdot\eta\mu x+x^2}{2x\cdot\eta\mu x+3x^2}$, $\varepsilon)\lim\limits_{x\to 0}(x\cdot\eta\mu\frac{1}{x})$, $\sigma\tau)\lim\limits_{x\to 0}(\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x})$

$\lim\limits_{x\to x_0}\eta\mu x=\eta\mu x_0$, $\lim\limits_{x\to x_0}\sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu x_0$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x}=0$

α) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu^2 x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\eta\mu x}{x}\cdot\eta\mu x\right)=1\cdot 0=0$

β) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sigma\upsilon\nu^2 x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1-\sigma\upsilon\nu x)(1+\sigma\upsilon\nu x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x}\cdot(1+\sigma\upsilon\nu x)=0\cdot(1+1)=0$

γ) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sigma\upsilon\nu^2 x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu^2 x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^2=1^2=1$

δ) $\lim \frac{\eta\mu^2 x-x\eta\mu x+x^2}{}$ * $\Big($ $\frac{\frac{\eta\mu^2 x}{x^2}-\frac{x\eta\mu x}{x^2}+\frac{x^2}{x^2}}{}=$ $\left(\begin{array}{l}x\to 0 \text{ οπότε}\\ x\neq 0\end{array}\right)$ *

δ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu^2 x - x\eta\mu x + x^2}{2x\eta\mu x + 3x^2} \overset{*}{=} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{\eta\mu^2 x}{x^2} - \dfrac{x\eta\mu x}{x^2} + \dfrac{x^2}{x^2}}{\dfrac{2x\eta\mu x}{x^2} + \dfrac{3x^2}{x^2}} =$ ($x\to 0$ * οπότε $x\neq 0$)

$= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)^2 - \dfrac{\eta\mu x}{x} + 1}{2\dfrac{\eta\mu x}{x} + 3} = \dfrac{1-1+1}{2\cdot 1+3} = \dfrac{1}{5}$

ε) $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\cdot\eta\mu\frac{1}{x}\right)$

$-1 \le \eta\mu\frac{1}{x} \le 1 \Rightarrow \left|\eta\mu\frac{1}{x}\right| \le 1 \Rightarrow |x|\left|\eta\mu\frac{1}{x}\right| \le |x| \Rightarrow \left|x\eta\mu\frac{1}{x}\right| \le |x| \Rightarrow$

$\left.\begin{aligned} -|x| \le x\eta\mu\tfrac{1}{x} \le |x| \\ \lim\limits_{x\to 0}|x| = \lim\limits_{x\to 0}(-|x|) = 0 \end{aligned}\right\} \xrightarrow[\text{παρεμβολής}]{\text{κριτήριο}} \lim\limits_{x\to 0}\left(x\,\eta\mu\frac{1}{x}\right) = 0$

στ) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}\right)$

$-1 \le \sigma\upsilon\nu\frac{1}{x} \le 1 \Rightarrow \left|\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}\right| \le 1 \Rightarrow |\eta\mu x|\left|\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}\right| \le |\eta\mu x| \Rightarrow$

$\left.\begin{aligned} -|\eta\mu x| \le \eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu\tfrac{1}{x} \le |\eta\mu x| \\ \lim\limits_{x\to 0}|\eta\mu x| = \lim\limits_{x\to 0}(-|\eta\mu x|) \end{aligned}\right| \xrightarrow[\text{παρεμβολής}]{\text{κριτήριο}} \lim\limits_{x\to 0}\left(\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}\right) = 0$

Θέμα 8ο Έστω συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει $xf(x) < \eta\mu x$ για κάθε $x\neq 0$. Αν $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lambda$ να βρείτε την τιμή του λ.

Είναι $xf(x) < \eta\mu x$, $x\neq 0$

για $x>0$: $f(x) < \dfrac{\eta\mu x}{x} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) \le \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\eta\mu x}{x} \Rightarrow \boxed{\lambda \le 1}$ (1)

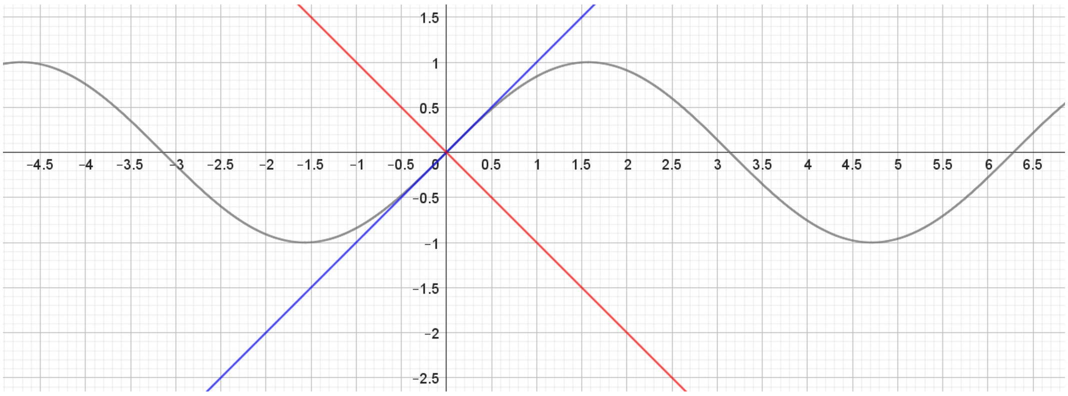
για $x<0$: $f(x) > \dfrac{\eta\mu x}{x} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) \ge \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\eta\mu x}{x} \Rightarrow \boxed{\lambda \ge 1}$ (2)

Από (1), (2) $\Rightarrow \boxed{\lambda = 1}$

Θέμα 9ο α) Να αποδείξετε ότι $\eta\mu x < x$ για κάθε $x>0$ και $\eta\mu x > x$ για κάθε $x<0$

β) Να λυθεί η εξίσωση $\eta\mu(x^2-2x) = x^2-2x$

$|ημx| \le |x|, \; x \in \mathbb{R}$ και $|ημx| = |x| \iff x = 0$



α) $|ημx| \le |x|, \; x \in \mathbb{R}$ για $x \neq 0$ $|ημx| < |x|$

γνωστά $|ημx| \ge ημx, \; |ημx| \ge -ημx$

για $x > 0$: $|x| = x$

οπότε $ημx \le |ημx| < |x| = x$ Άρα για $x > 0$ $ημx < x$

για $x < 0$: $|x| = -x$

$-ημx \le |ημx| < |x| = -x \implies -ημx < -x \implies ημx > x$ για $x < 0$

β) $ημ(x^2 - 2x) = x^2 - 2x \iff x^2 - 2x = 0 \iff \boxed{x = 0}$ ή $\boxed{x = 2}$