

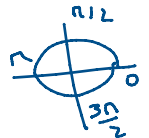
Μάθημα 26ο - Μη πεπερασμένα όρια στο χο

**Θέμα 1ο** Όρια μορφής  $\frac{\alpha}{0}$  με  $\alpha \neq 0$

Να βρείτε όσα από τα παρακάτω όρια υπάρχουν και για όσα δεν υπάρχουν να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

i.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-2}{x^2-2x+1}$     ii.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-2}{x-1}$     iii.  $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sin x}{(x-9)(\sqrt{x}-3)}$     iv.  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \epsilon \phi x$

v.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x| - |\eta \mu x|}$     vi.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x - \eta \mu x}$     vii.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-3}{x^2-x-2}$     viii.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x}-1}{x}$



iv)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \epsilon \phi x = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{\psi x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \left( \psi x \cdot \frac{1}{\sin x} \right) = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \psi x = 1$  ,  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \sin x = 0$  ,  $\sin x < 0$  για  $x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+$  ,  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{1}{\sin x} = -\infty$   
αφού  $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$

•  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \epsilon \phi x = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\psi x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \left( \psi x \cdot \frac{1}{\sin x} \right) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \psi x = 1$  ,  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \sin x = 0$  ,  $\sin x > 0$  για  $x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-$  ,  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{1}{\sin x} = +\infty$   
αφού  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$

Συνεπώς το  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \epsilon \phi x$  δεν υπάρχει

v)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x| - |\eta \mu x|} = +\infty$  αφού

$\lim_{x \rightarrow 0} (|x| - |\eta \mu x|) = 0$  ,  $|x| > |\eta \mu x|$  για  $x \neq 0$  οπότε  $|x| - |\eta \mu x| > 0$

vi)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x - \eta \mu x} = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x - \eta \mu x) = 0$  , για  $x > 0 \Rightarrow |x| = x$  οπότε  $\eta \mu x \leq |\eta \mu x| < |x| = x \Rightarrow \eta \mu x < x$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x - \psi x} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (x - \psi x) = 0,$$

για  $x < 0 \Rightarrow |x| = -x$  οπότε  
 $-\psi x \leq |\psi x| < |x| = -x \Rightarrow -\psi x < -x \Rightarrow \psi x > x$

Συμπεραίνει το  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x - \psi x}$  δεν υπάρχει

$$vii) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-3}{x^2-x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \left( (x-3) \frac{1}{x^2-x-2} \right)$$

|           |      |     |
|-----------|------|-----|
| $x$       | $-1$ | $2$ |
| $x^2-x-2$ | $+$  | $-$ |

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \left( (x-3) \frac{1}{x^2-x-2} \right) = -\infty \text{ αφού}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} (x-3) = -1, \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2-x-2) = 0, x^2-x-2 > 0 \text{ για } x \rightarrow 2^+, \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x^2-x-2} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \left( (x-3) \frac{1}{x^2-x-2} \right) = +\infty \text{ αφού}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} (x-3) = -1, \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2-x-2) = 0, x^2-x-2 < 0 \text{ για } x \rightarrow 2^-, \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x^2-x-2} = -\infty$$

Συμπεραίνει το  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-3}{x^2-x-2}$  δεν υπάρχει

$$vii) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x}-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{x}-1) \frac{1}{x} \stackrel{x>0}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sqrt{x}-1) \frac{1}{x} = -\infty \text{ αφού}$$

$$\text{Η } \frac{\sqrt{x}-1}{x} \text{ ορίζεται για } x > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sqrt{x}-1) = -1, \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

**Θέμα 2ο** Όρια μορφής  $\frac{0}{0}$  που ανάγονται  $\frac{\alpha}{0}$  με σε  $\alpha \neq 0$

Να βρείτε όσα από τα παρακάτω όρια υπάρχουν και για όσα δεν υπάρχουν να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

i.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 2x + 1}$    ii.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}$    iii.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x}{x^2}$    iv.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x}{x^3}$

i)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x-1}$  Δεν υπάρχει όριο

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x+1) \frac{1}{x-1} = +\infty \quad \text{ενώ}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x+1) \frac{1}{x-1} = -\infty$$

ii)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)^3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$

iii)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\eta \mu x}{x} \cdot \frac{1}{x} \right)$  Δεν υπάρχει όριο

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{\eta \mu x}{x} \cdot \frac{1}{x} \right) = +\infty \quad \text{ενώ} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \left( \frac{\eta \mu x}{x} \cdot \frac{1}{x} \right) = -\infty$$

iv)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\eta \mu x}{x} \cdot \frac{1}{x^2} \right) = +\infty$  αφού  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\eta \mu x}{x} \right) = 1, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$

**Θέμα 4ο** (Κάτι σαν κριτήριο παρεμβολής)

α) Αν  $x^2 f(x) - 1 \geq 0$  για κάθε  $x \neq 0$  να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

β) Αν  $x^2 f(x) + 1 \leq 0$  για κάθε  $x \neq 0$  να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

α) για  $x \neq 0$ :  $x^2 f(x) - 1 \geq 0 \Rightarrow x^2 f(x) \geq 1 \xrightarrow{x^2 > 0} f(x) \geq \frac{1}{x^2}$

και επειδή  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$  είναι και  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$

β) για  $x \neq 0$ :  $x^2 f(x) + 1 \leq 0 \Rightarrow x^2 f(x) \leq -1 \xrightarrow{x^2 > 0} f(x) \leq -\frac{1}{x^2}$

B) für  $x \neq 0$ :  $x^2 f(x) + 1 \leq 0 \Rightarrow x^2 f(x) \leq -1 \xrightarrow{x^2 > 0} f(x) \leq -\frac{1}{x^2}$

man erhält  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{x^2} = -\infty$  Given man  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$

Answer

Na beweise i)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \sqrt{x} \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right)$  ii)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \sqrt{x} \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right)$

Lösung

i)  $-1 \leq \sqrt{x} \frac{1}{x} \leq 1$

$$-1 + \frac{1}{x^2} \leq \sqrt{x} \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \leq 1 + \frac{1}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( -1 + \frac{1}{x^2} \right) = +\infty$$

Given  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \sqrt{x} \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) = +\infty$

ii)  $-1 \leq \sqrt{x} \frac{1}{x} \leq 1$

$$-1 - \frac{1}{x^2} \leq \sqrt{x} \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \leq 1 - \frac{1}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( 1 - \frac{1}{x^2} \right) = -\infty$$
 Given

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \sqrt{x} \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) = -\infty$$