

Θέμα 5^ο (Βοηθητική συνάρτηση)

Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ σε κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις

α) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-2}{f(x)} = +\infty$, α) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-2} = -\infty$, α) $\lim_{x \rightarrow 1} [f(x)(x-2)] = +\infty$.

α) Θέτω $g(x) = \frac{x-2}{f(x)}$ οπότε $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = +\infty$ και
 $g(x)f(x) = x-2$ οπότε $g(x) > 0, x \rightarrow 1$
 $f(x) = \frac{x-2}{g(x)}$, για $x \rightarrow 1$ οπότε $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-2}{g(x)} = 0$

β) Θέτω $g(x) = \frac{f(x)}{x-2}, x \neq 2$ οπότε $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = -\infty$

$f(x) = g(x)(x-2), x \neq 2$
 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (g(x)(x-2)) = +\infty$

γ) Θέτω $g(x) = f(x) \cdot (x-2)$ $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = +\infty$

για $x \neq 2$ $f(x) = \frac{g(x)}{x-2}$ οπότε $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)}{x-2} = -\infty$

Θέμα 6^ο (Παραμετρικά όρια)

A) Να βρείτε τα παρακάτω όρια για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$

i) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x - \lambda - 2}{x^2 - \lambda}$ ii) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x - \lambda}{x^2 - \lambda}$ iii) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 2\lambda}{x - \lambda^2}$ iv) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x - \lambda^2}{(x - \lambda)^2}$ v) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x - \lambda^2}{(x - \lambda)^3}$

γ) Αν $\lambda \neq 4$: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x - \lambda - 2}{x^2 - \lambda} = \frac{2 - \lambda}{4 - \lambda} \in \mathbb{R}$

Αν $\lambda = 4$: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x - 6}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x - 6}{x + 2} \cdot \frac{1}{x - 2}$

τα ολόμενα δίνονται ίσα τότε δεν υπάρχει

$$\text{ii) } \text{Av } a \neq 4 : \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x-2}{x^2-2} = \frac{4-2}{4-2} = 1$$

$$\text{Av } a = 4 : \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x-4}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(x-2)}{(x+2)(x-2)} = \frac{1}{2}$$

$$\text{iii) } \text{Av } a \neq 2 \text{ και } a \neq -2 : \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-2a}{x-a^2} = \frac{4-2a}{4-a^2} = \frac{2}{2+a}$$

$$\text{Av } a = 2 : \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{x-4} = 1$$

$$\text{Av } a = -2 : \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x+4}{x-4} \text{ δεν υπάρχει}$$

δίνονται τα ολόμενα δίνονται ίσα

$$\text{iv) } \text{Av } a \neq 2 : \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x-a^2}{(x-a)^2} = \frac{4-a^2}{(2-a)^2} = \frac{2+a}{2-a}$$

$$\text{Av } a = 2 : \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x-4}{(x-2)^2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(x-2)}{(x-2)^2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2}{x-2}$$

το οποίο δεν υπάρχει δίνονται τα ολόμενα δίνονται ίσα

$$\text{v) } \text{Av } a \neq 2 : \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x-a^2}{(x-a)^3} = \frac{4-a^2}{(2-a)^3} = \frac{2+a}{(2-a)^2}$$

$$\text{Av } a = 2 : \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x-4}{(x-2)^3} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(x-2)}{(x-2)^3} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2}{(x-2)^2} = +\infty$$

B) Να προσδιορίσετε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ σε κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις

i) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\alpha x^2 + x - 2}{x - 1} = \lambda \in \mathbb{R}$ ii) το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\alpha x^2 + x - 2}{x - 1}$ υπάρχει

iii) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\alpha - 1)x^2 + x - \beta}{x - 1} = 3$ iv) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\alpha^2 x^2 - \alpha}{(x - 1)^3} = \lambda \in \mathbb{R}$

v) $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{x^2 + \alpha}{x^2 - 4x + \alpha^2} = +\infty$ vi) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\alpha x^2 + \beta x + 4}{x^2 - 2x + 1} \right) = \lambda \in \mathbb{R}$

i) Θετω $f(x) = \frac{\alpha x^2 + x - 2}{x - 1}$, $x \neq 1$ οπότε $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lambda \in \mathbb{R}$

και $(x - 1) \cdot f(x) = \alpha x^2 + x - 2$

Είναι $\lim_{x \rightarrow 1} (x - 1) f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (\alpha x^2 + x - 2) \Rightarrow$

$$0 \cdot \lambda = \alpha \cdot 1^2 + 1 - 2 \Rightarrow 0 = \alpha - 1 \Rightarrow \boxed{\alpha = 1}$$

Για $\alpha = 1$ έχω $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 2)}{x - 1} = 3$

ii) Σχόλιο Ο τρόπος που ανάλυσε το i) δεν μπορεί να ισχύσει εδώ διότι δεν ξέρουμε ότι το $\lim_{x \rightarrow 1} (x - 1) f(x)$ κάνει σίγουρα 0 αφού δεν ξέρω ότι $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lambda \in \mathbb{R}$ οπότε θα μπορούσε να υπάρχει απροσδιορίστια $0 \cdot (\pm \infty)$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (\alpha x^2 + x - 2) = \alpha - 1, \quad \lim_{x \rightarrow 1} (x - 1) = 0$$

Για $\alpha \neq 1$: $\lim_{x \rightarrow 1} (\alpha x^2 + x - 2) \cdot \frac{1}{x - 1}$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (ax^2 + x - 2) \frac{1}{x-1} = \begin{cases} +\infty, & a > 1 \\ -\infty, & a < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (ax^2 + x - 2) \frac{1}{x-1} = \begin{cases} -\infty, & a > 1 \\ +\infty, & a < 1 \end{cases}$$

Συνεπώς
για $a \neq 1$
το όριο
δεν υπάρχει
αφού τα άκρα
δεν είναι ίσα

Για $a = 1$. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+2)(x-1)}{x-1} = 3$